PROBLEMES ET METHODES NUMERIQUES EN PHYSIQUE DES PLASMAS

A TRES HAUTE TEMPERATURE

par

C. MERCIER^{*}, J.C. ADAM^{**}, SOUBBARAMAYER^{*} et J.L. SOULE^{*}

^{*} Association EURATOM-CEA, Section de la Théorie des gaz ionisés,
Centre d'Etude Nucléaires BP. N°6. 92-Fontenay aux Roses (France).

^{**} Physique théorique des plasmas, Ecole Polytechnique, 17 rue Descartes,
(Paris Vème).

INTRODUCTION

Les études sur les plasmas sont extrêmement nombreuses et concernent des domaines très divers : Astrophysique, Fusion thermonucléaire Contrôlée, problèmes de l'espace, générateurs magnétohydrodynamiques, chimie des plasmas etc... Il ne peut être question de les présenter toutes ici, même si l'on se limite aux plasmas très chauds (température de l'ordre de quelques dizaines de millions de degrés). Aussi avons nous choisi d'exposer un certain aspect du problème : Celui lié aux plasmas de très hautes températures que l'on désire obtenir en fusion thermonucléaire Contrôlée. Autour de ce thème nous allons essayer de décrire les équations et les méthodes utilisées (de plus en plus numériques) pour obtenir les renseignements nécessaires à la compréhension, la fabrication et l'entretien de ces plasmas.

QUELQUES ELEMENTS DE LA FUSION THERMONUCLEAIRE CONTROLEE /1/

La fusion thermonucléaire repose sur la réaction bien connue entre certains isotopes de l'hydrogène au cours de laquelle une fraction de masse des éléments en collision est convertie en énergie. Par exemple, la réaction entre le deutérium et le tritium donne naissance à l'hélium 4, un neutron et un dégagement d'énergie de 17,6 MeV suivant la formule

Ce type de réaction peut donc être utilisé pour la production d'énergie et plusieurs laboratoires dans le monde travaillent pour maîtriser cette réaction. Le problème consiste à élever la température de l'hydrogène suffisamment haut pour vaincre la barrière de répulsion électrostatique Coulombienne, c'est-à-dire quelques centaines de millions de degrés. Une telle haute température doit ensuite être maintenue suffisamment longtemps pour que la réaction de fusion ait une forte probabilité de se produire.

Une méthode pour résoudre ce problème est d'opérer avec de l'hydrogène à l'état de "plasma" (gaz totalement ionisé) et de "confiner" ce plasma par un champ magnétique. Un plasma est dit "confiné" quand il est isolé de toute paroi matérielle par l'action d'un champ magnétique. Les particules chargées ont un mouvement tel que leurs trajectoires ne rencontrent aucune paroi matérielle. Le plasma ainsi confiné doit être chauffé jusqu'à la température d'ignition et maintenu chaud suffisamment longtemps. De plus la densité du plasma doit être assez élevée pour obtenir un nombre appréciable de réactions de fusion par unité de temps. Le calcul montre que l'objectif à atteindre est un plasma de température de 10 KeV, de densité n_e confiné pendant un temps τ_E tel que

$$n_e \tau_E \geq 10^{14} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}$$

Un des appareils de confinement le plus prometteur semble être actuellement le TOKOMAK dont le principe est très simple (Fig. 1)

Fig. 1 : SECTION D'UN TOKOMAK

Un tore est initialement rempli d'hydrogène. Un courant électrique est induit dans le gaz, en utilisant l'anneau de gaz comme le circuit secondaire d'un transformateur. Ce courant joue trois rôles : la création du plasma par ionisation du gaz initial, le chauffage du plasma par effet JOULE et le confinement du plasma par l'action du champ magnétique poloïdal induit par le courant. Pour raison de stabilité, le plasma est aussi soumis à un champ magnétique longitudinal très

fort (quelques dizaines de kilogauss) créé par un enroulement convenable de bobines autour du tore.

POSITION DE QUELQUES PROBLEMES

L'étude d'un plasma confiné comme précédemment soulève un certain nombre de problèmes tels que l'équilibre, la stabilité vis-à-vis de différents types de perturbations, la méthode pour réaliser une forme donnée de la section du plasma, l'évolution spatio temporelle du plasma etc... Le traitement mathématique exact de tous ces problèmes étant hors de question, chacun de ces problèmes exige une étude particulière et conduit selon les cas à utiliser des modèles mathématiquement différents, en particulier selon l'échelle de temps des phénomènes mis en jeu et le degré de finesse nécessaire dans la description du plasma. Malgré les simplifications souvent très importantes que l'on est amené à faire, il est nécessaire de plus en plus de recourir aux méthodes numériques pour prendre le relai des méthodes analytiques.

Cet exposé sera ainsi subdivisé en 2 parties traitant de deux approches très différentes du milieu plasma : dans la première nous utiliserons une représentation fluide du plasma, utilisant plus ou moins des résultats d'une étude plus microscopique. Dans la deuxième partie, le plasma est vu sous son aspect particules chargées en mouvement dans des champs électriques et magnétiques. Cet aspect a déjà été très développé analytiquement. Nous présenterons ici les méthodes numériques qui se développent actuellement.

Les problèmes qui sont ainsi abordés ne sont pas spécifiques aux plasmas de fusion, mais contribueront à éclaircir les questions de micro-instabilités et de turbulence dans les plasmas et ainsi à mieux connaître les coefficients de transport qui jouent un grand rôle dans la qualité des plasmas à haute température.

I - ETUDES LIEES A L'ASPECT MACROSCOPIQUE DES PLASMAS. /2/A) Equilibre et stabilité

Le système d'équations utilisé dans ce cas est appelé système magnétohydrodynamique à 1 fluide à pression scalaire. Sans le justifier ici, notons qu'il est adapté aux mouvements rapides du plasma (étude de la stabilité) que l'on suppose adiabatiques. Ce système s'écrit :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad } p + \vec{J} \times \vec{B} \\ (2) \quad \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \\ (3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div } \rho \vec{V} \\ (4) \quad \frac{d}{dt} (\rho \rho^\gamma) = 0 \\ (5) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (6) \quad \text{rot } \vec{B} = \vec{J} \\ (7) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

(1) étant l'équation du mouvement (2) la loi d'Ohm généralisée (3) l'équation de continuité (4) la condition d'adiabaticité (5) (6) et (7) les équations de Maxwell.

ρ est la densité massique, $\vec{V}$ la vitesse du fluide, p la pression, $\vec{B}$ et $\vec{E}$ les champs magnétiques et électriques, $\vec{J}$ la densité de courant, γ rapport des chaleurs spécifiques et η la résistivité.

Dans le cas de l'équilibre, le système à étudier s'écrit simplement

$$(I') \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} \times \vec{B} = \text{grad } p \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{J} = \text{rot } \vec{B} \end{array} \right.$$

Une première difficulté s'élève : on n'a pu démontrer mathématiquement l'existence d'une solution de type torique de ce système, excepté en symétrie de révolution, qui est justement une des caractéristiques des appareils TOKOMAK.

Les solutions cherchées sont des surfaces à pression constante en forme de tore emboîtée ; ces surfaces sont appelées surfaces magnétiques car, comme il est visible sur ce système les lignes magnétiques (et les lignes de courant) sont situées sur ces surfaces. En général, ces lignes remplissent toute la surface mais entre ces surfaces existent des surfaces où les lignes magnétiques se referment après un nombre fini de grands tours et de petits tours autour du tore : ces surfaces jouent un grand rôle dans la stabilité de ces équilibres.

En symétrie de révolution, la solution générale de $\text{div } \vec{B} = 0$

s'écrit :

$$(8) \quad \vec{B} = f \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \times \text{grad } F$$

$$(9) \quad \vec{J} = \text{rot } \vec{B} = \mathcal{L} F \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} - \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \times \text{grad } f$$

$$(10) \quad \mathcal{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

$$\equiv \rho^2 \text{div} \left(\frac{1}{\rho^2} \text{grad } F \right)$$

f et F sont des fonctions arbitraires de ρ et z , l'équation (1') implique que p et f soit des fonction de F :

FIG. 2

$$(11) \quad \begin{cases} p = p(F) \\ f = f(F) \end{cases}$$

et la fonction F est déterminée alors par l'équation :

$$(12) \quad \mathcal{L} F = -\frac{1}{2} \frac{df^2}{dF} - \rho^2 \frac{dP}{dF}$$

équation de type elliptique définie lorsque les expressions (11) sont connues.

Elles sont en fait connues après l'étude de l'évolution du plasma dans le temps jusqu'à l'état d'équilibre (problème que nous envisageons ensuite). Cependant on peut chercher à définir les caractères généraux des équilibres possibles pour des classes générales de fonction $P(F)$ et $f(F)$, par exemple $p \equiv aF^2 + bF + c$; $f^2 = \alpha F^2 + \beta F + \gamma$ expressions qui rendent (12) linéaire. Ces études ont été développées tant analytiquement

que numériquement. Dans le cas linéaire, on relie les constantes ($\alpha, \dots$) à des quantités physiques caractéristiques de l'équilibre telles que le courant longitudinal I qui circule et la quantité

$$\beta = \left\langle \frac{2P}{B^2} \right\rangle = \frac{\text{Pression cinétique}}{\text{Pression magnétique}}$$

Les autres paramètres permettent de représenter diverses répartition de pression ou de densité de courant dans la section du plasma. Toutes ces études montrent que, pour une frontière de plasma fixée, la répartition des surfaces magnétiques est d'autant plus déformée que β est élevée. (Fig. (3)).

Figure 3

M.A. : Axe magnétique

C.A. : Axe central

Ces déformations quand elles sont trop intenses finissent soit par changer la topologie du plasma, soit par confiner pratiquement l'ensemble du plasma dans une région restreinte de la surface totale ; ces déformations extrêmes ne sont pas acceptables et l'on est conduit à définir un β maximum, qui dépendra de la répartition des courants, de la pression mais aussi de la section du plasma.

Comme la recherche d'un fort β est d'une importance extrême pour la réussite des appareils de fusion thermonucléaire, on comprendra l'intérêt de rechercher parmi les équilibres possibles ceux qui permettent les β les plus forts.

Il existe plusieurs codes numériques, résolvant l'équation d'équi-

libre (12) en se fixant la forme extérieure du plasma et permettant une recherche systématique des équilibres souhaitables.

Ces déformations peuvent aussi avoir des effets importants, en bien ou en mal, sur la stabilité de ces équilibres, ce qui nous amène à étudier cet aspect fondamental de la physique des plasmas.

STABILITE DES PLASMAS A RESISTIVITE NULLE

Les plasmas de fusion sont à haute température, donc la résistivité (en $T^{-3/2}$) est très faible. Une première approximation consiste à poser $\eta = 0$. (M.H.D. idéale). Le cas $\eta \neq 0$ conduit à d'autres types d'instabilités, moins dangereux, que l'on n'envisagera par ici. A cette approximation, l'étude de la stabilité est en général abordée à l'aide du principe d'énergie. On envisage des petites perturbations autour d'un état d'équilibre et après avoir linéarisé le système, on étudie l'évolution dans le temps de ces perturbations. Soit $\vec{\xi}(r)$ le champ de déformation du plasma. L'équation des petits mouvements peut être écrite :

$$N \vec{\xi} + U \vec{\xi} = 0$$

N et U sont des opérateurs symétriques. (N défini positif). Introduisons la fonctionnelle suivante, qui représente l'énergie potentielle du système :

$$\delta W = \langle \vec{\xi} \cdot U \vec{\xi} \rangle = \int_{\tau} (\vec{\xi} \cdot U \vec{\xi}) d\tau$$

on démontre (4)(5) que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que

$$\delta W > 0$$

pour toutes les perturbations $\vec{\xi}$ compatibles avec les conditions aux limites du plasma. On obtient l'expression suivante pour δW .

$$(13) \delta W = \frac{1}{2} \int d\tau \left\{ \vec{Q}^2 - \vec{J} \cdot \vec{Q} \times \vec{\xi} + \gamma p (\text{div } \vec{\xi})^2 + (\text{div } \vec{\xi}) \vec{\xi} \cdot \text{grad } p \right\}$$

$\vec{n}$ est le vecteur unité normal aux surfaces magnétique (la surface extérieure du plasma est une surface magnétique). $\vec{Q} = \text{rot} (\vec{\xi} \times \vec{B})$ est la perturbation du champ magnétique. Cette expression suppose que la fron-

tière du plasma reste immobile. Comme nous aurons à envisager des plasmas, loin de paroi matérielle, il faut traiter de façon générale un problème à 2 milieux - plasma et vide- certaines perturbations comportent une déformation de la frontière du plasma et une variation du champ électromagnétique dans le vide. Nous verrons par la suite ^{comment} /le problème d'équilibre peut être traité. Notons ici que le principe d'énergie s'étend à ce cas. On doit ajouter un terme δW_{vide} qui s'obtient en calculant la perturbation du champ magnétique dans le vide : posons :

$$\vec{Q} = \text{rot } \vec{A}$$

$\vec{Q}$ est donné par la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) &= 0 && \text{dans le vide} \\ \vec{n} \times \vec{A} &= -(\vec{n} \cdot \vec{f}) \cdot \vec{B} && \text{sur l'interface} \\ \vec{n} \times \vec{A} &= 0 && \text{sur la frontière extérieure.} \end{aligned}$$

Précisons que les propriétés électriques de cette frontière extérieure sont supposées telles qu'elle est imperméable aux perturbations mais peut ne pas intervenir dans le problème de l'équilibre plasma-vide. On définira dans ce cas une frontière extérieure qui peut ne pas coïncider avec celle définie pour le problème de stabilité.

$$\begin{aligned} (14) \quad \delta W &= \delta W_{\text{plasma}} + \delta W_{\text{vide}} > 0 \\ \delta W_{\text{vide}} &= \frac{1}{2} \int_{\text{vide}} d\tau \vec{Q}^2 \end{aligned}$$

PERTURBATIONS LOCALISEES ET NON LOCALISEES.

Minimiser ce δW est un problème difficile, non entièrement résolu. On est conduit à distinguer les perturbations localisées et les non localisées. Les perturbations localisées sont des perturbations qui sont limitées au voisinage immédiat des surfaces magnétiques, ayant des gradients locaux très importants. Ces perturbations sont souvent stables, mais dans le cas des plasmas, les perturbations localisées au voisinage des surfaces avec lignes magnétiques fermées conduisent à un critère dit localisé très sévère. Ce critère exige pour la stabilité de ces

modes que

$$(15) \quad \oint f dl > 0$$

sur toutes lignes magnétiques
fermées. /6/7/

f étant une fonction des propriétés locales de l'équilibre. On cherchera donc à calculer ce critère numériquement pour chaque équilibre envisagé. Ce critère dépend fortement des propriétés de l'équilibre telles que forme de la section torique, intensité et répartition de la densité de courant, valeur de la quantité β . Ce travail nous permet en particulier de connaître les limitations en β que ce type d'instabilité impose et ainsi nous oriente vers les configurations intéressantes.

La difficulté dans l'évaluation numérique de ces critères tient à la très grande précision nécessaire dans le calcul des surfaces magnétiques. Au voisinage du centre de la configuration, en général domaine le plus instable pour ces perturbations, des développements facilitent le calcul du critère. /8/

Pour les perturbations non localisées, il n'est pas possible d'établir un critère général de stabilité faisant appel explicitement et uniquement aux grandeurs caractérisant l'équilibre. Il devient donc nécessaire dans chaque cas de déterminer si la forme quadratique δW est ou non définie positive. Ceci n'est possible analytiquement que dans des cas très particuliers, et il est généralement nécessaire de recourir au calcul numérique.

Précisons que par "non localisées" nous entendons en fait "régulières", c'est-à-dire à variation lente. Il en résulte que les perturbations localisées et les perturbations non localisées n'épuisent pas toutes les perturbations possibles.

Pour les applications au TOKOMAK, nous avons particularisé le problème comme suit. Tenant compte de la symétrie axiale de l'équilibre, on peut décomposer la perturbation selon ses harmoniques azimutales,

qui se trouvent entièrement découplées dans δW . L'harmonique zéro (perturbation axisymétrique) jouera un rôle un peu particulier. Nous avons supposé petits les rapports $\frac{a}{R}$ et $\frac{B_m}{B_T}$ (a : dimension caractéristique de la section du tore, R : grand rayon du tore ; B_m : champ méridien poloidal; B_T : champ toroïdal). En fait, pour que le problème ait un sens à la limite, il faut faire tendre ensemble vers zéro ces deux rapports. Nous avons supposé d'autre part que B_T est constant (équilibres à faible pression). Nous ne traitons que les harmoniques basses. Dans ces conditions, on peut montrer d'une part qu'on peut remplacer le tore par un cylindre (périodique), d'autre part que les perturbations non localisées les plus instables sont celles dont la composante selon l'axe du cylindre est nulle et qui vérifient $\text{div } \vec{\xi} = 0$. (Il s'ensuit que la composante de $\vec{Q}$ dans la même direction est aussi nulle).

Soient x et y des coordonnées transversales méridiennes et z la coordonnée longitudinale. Il est commode d'introduire un potentiel u :

$$(16) \quad \vec{\xi} = \text{rot} (u \vec{e}_z) = \text{grad } u \times \vec{e}_z \quad (\rightarrow \text{div } \vec{\xi} = 0)$$

Dans le plasma, il en résulte que $\vec{Q}$ dérive du potentiel ψ_p :

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \text{rot} (\psi_p \vec{e}_z) \\ \psi_p &= \vec{B} \cdot \text{grad } u = \vec{B}_m \cdot \text{grad}_m u + B_z \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Dans le vide $\vec{Q}$ dérive du potentiel ψ_v défini par :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_v = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_v &= \psi_p && \text{sur l'interface} \\ \psi_v &= 0 && \text{sur la frontière extérieure} \end{aligned}$$

δW se réduit à :

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_P d\tau (\text{grad}_m \psi_p)^2 + \frac{1}{2} \int_P d\tau j_z \cdot \text{grad}_m u \times \text{grad}_m \psi_p + \frac{1}{2} \int_V d\tau (\text{grad}_m \psi_v)^2$$

Dans le cas où j_z s'annule au bord du plasma, une intégration par parties permet de réécrire le second terme sous la forme :

$$-\frac{1}{2} \int_P d\tau \frac{dj_z}{dF} \psi_p \vec{B}_m \cdot \text{grad}_m u = -\frac{1}{2} \int_P d\tau \frac{dj_z}{dF} \left[\vec{B}_m \cdot \text{grad}_m u + \frac{1}{2} B_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{1}{4} B_z^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

où F est le potentiel d'équilibre : $\vec{B}_m = \text{rot}(F\vec{e}_z)$

En définitive nous obtenons δW sous la forme d'une différence de deux formes quadratiques symétriques et définies positives :

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W_1 - \delta W_2 \\ \delta W_1 &= \frac{1}{2} \int_P d\tau (g \vec{\text{rad}}_m \psi_p)^2 + \frac{1}{2} \int_P d\tau \frac{1}{4} B_z^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_P d\tau (g \vec{\text{rad}}_m \psi_v)^2 \\ \delta W_2 &= \frac{1}{2} \int_P d\tau \left(\vec{B}_m \cdot g \vec{\text{rad}}_m u + \frac{1}{2} B_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2\end{aligned}$$

Enfin, l'élimination de la variable z s'effectue, comme nous l'avons déjà indiqué, par décomposition harmonique. Autrement dit, nous prendrons u sous la forme :

$$(17) \quad u = V(x, y) \cos kz + W(x, y) \sin kz$$

ψ_p et ψ_v auront des formes analogues.

L'intégration en z pourra alors être effectuée. Les expressions obtenues ne dépendent que de la distribution du champ d'équilibre transverse, plus un paramètre unique kB_z . Il est intéressant de normaliser celui-ci en posant :

$$(18) \quad q = k B_z \frac{1}{2\pi} \int \frac{dl}{B_m}$$

où l'intégrale est effectuée autour de la frontière du plasma. Le "facteur de sécurité" q représente alors le rapport entre le pas des lignes magnétiques et la longueur du tore.

La méthode qui a été utilisée consiste à chercher si le rapport $\delta W_1 / \delta W_2$ peut ou non devenir inférieur à un. Pour cela on détermine son minimum. Dans l'approximation algébrique obtenue par discrétisation, cela revient à calculer la plus petite valeur propre d'une matrice A par rapport à une matrice B , A et B étant symétriques et définies positives, autrement dit à calculer la plus grande valeur propre de $A^{-1}B$. La méthode de la puissance a été mise en oeuvre, en procédant par la surrelaxation par bloc pour tenir compte de la structure de A , qui est tridiagonale par bloc.

Des irrégularités numériques tendent à se produire au voisinage des surfaces magnétiques résonantes où les lignes magnétiques se refer-

ment sur une période. Nous avons éliminé les solutions parasites en rajoutant à δW_1 un terme de régularisation contenant le carré de la dérivée normale de u . Cette étude bidimensionnelle a été entreprise pour prévoir ce que deviennent les instabilités non localisées lorsque la section du plasma cesse d'être à peu près circulaire, comme c'est le cas dans les TOKOMAK usuels. En effet, dans l'hypothèse circulaire on se ramène à un problème unidimensionnel par une seconde décomposition harmonique angulaire, et on peut déterminer assez aisément les domaines d'instabilité des différents "modes".

Dans les exemples que nous avons étudiés (section elliptique, profil de courant d'allure parabolique, enveloppe elliptique confocale) nous avons trouvé que pour une même distance relative de l'enveloppe, ces domaines d'instabilité restaient sensiblement les mêmes lorsqu'on les exprimait en q . ^[9] Ce résultat est pratiquement intéressant, car il permet de prévoir une limitation du courant électrique moins sévère dans un plasma elliptique que dans un plasma circulaire. La considération de l'harmonique zéro introduit cependant une difficulté nouvelle, à savoir la nécessité de stabiliser les déplacements du plasma dans le sens du grand axe de la section, et ceci en plaçant une enveloppe conductrice suffisamment proche.

EVOLUTION SPATIO TEMPORELLE D'UN PLASMA CONFINE DANS UN TOKOMAK

1 - Equation de base

Pour cette étude nous considérons le plasma comme un mélange de deux fluides (électrons et ions) et nous nous proposons de décrire son évolution/^{spatio}temporelle avec un modèle macroscopique. Il s'agit d'un problème de transport de masse et d'énergie régi par trois causes :

1°) Les sources d'énergie et de masse. Le courant électrique induit chauffe par effet JOULE les électrons. Ceux-ci transmettent une partie de cette énergie aux ions par collision COULOMBIENNE. Par ailleurs, un flux de gaz neutre venant de la paroi pénètre plus ou moins profon-

dément dans le plasma et s'ionise par collision avec les électrons, créant ainsi une source locale de masse.

2°) Les pertes d'énergie et de masse. Ces pertes sont soit de surface (convections thermiques et fuite des particules par diffusion) soit volumiques (radiations, interaction avec les gaz neutres froids).

3°) Les coefficients de transport. Ce sont principalement la diffusion des particules, les conductivités thermiques des électrons et des ions et la résistivité électrique.

Une revue de travaux sur ce sujet est indiquée dans [10,11]. La plupart de ces travaux traitent le problème en approximation cylindrique et se ramènent à la résolution d'un système de 4 équations aux dérivées partielles décrivant en fonction des variables radiale r et temporelle t l'évolution de 4 quantités caractérisant l'état du plasma n densité des électrons, T_e température des électrons, T_i température des ions et J la densité du courant électrique. Un type d'un tel système de base est donné ci-dessous.

$$\begin{array}{l}
 (19) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v) = S_1 \\ (20) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n T_e \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{5}{2} T_e n v + Q_e \right) \right] + \eta J^2 \alpha (T_e - T_i) + S_2 \\ (21) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n T_i \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{5}{2} T_i n v + Q_i \right) \right] + \alpha (T_e - T_i) + S_3 \\ (22) \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\eta J) \right] \end{array} \right.
 \end{array}$$

Ce système est fermé en donnant les expressions du flux des particules (nv) des flux de chaleur Q_e , Q_i , des termes sources ou puits S_1 , S_2 , S_3 ainsi que les expressions de la résistivité η et du coefficient α de transfert d'énergie des électrons aux ions. Divers calculs ont été faits pour évaluer ces expressions à partir d'une théorie microscopique. Une approche très simple est de considérer pour les flux nv , Q_e et Q_i des expressions du type FOURRIER

$$(23) \quad mV = -D \operatorname{grad} m ; Q_e = -K_e \operatorname{grad} T_e ; Q_i = -K_i \operatorname{grad} T_i$$

où les coefficients D , K_e et K_i peuvent être calculés d'après une théorie microscopique, ou mesurés expérimentalement ou encore donnés phénoménologiquement. Quant aux termes sources ou puits S_1 , S_2 , S_3 il sont par exemple calculés par une analyse de l'interaction des gaz neutres froids (ou énergétiques) et des impuretés avec le plasma. Dans ces termes sont également inclus les pertes par radiations et les effets des éventuels chauffages complémentaires. Le système (II) est complété par la donnée des conditions initiales et des conditions aux limites appropriées. Un exemple de telles conditions est donné ci-dessous :

$$(24) \quad \begin{cases} t=0 & m(r,0) \quad T_e(r,0) \quad T_i(r,0) \quad J(r,0) \text{ donnés} \\ r=0 & \frac{\partial m}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial T_e}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial T_i}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial J}{\partial r} = 0 \\ r=a & m=0 \quad T_e=0 \quad T_i=0 \quad \int_0^a 2\pi r J dr = I(t) \text{ donné} \end{cases}$$

Des conditions aux limites plus générales du type mixte DIRICHLET-NEUMAN peuvent également être considérées.

Remarque : On peut montrer que le système se déduit d'un système M.H.D général dont un cas particulier a été utilisé pour l'étude de l'équilibre et de la stabilité. La différence essentielle entre ce système général et le système utilisé aux paragraphes ci-dessus réside dans les éléments suivants :

- . L'évolution considérée ici est un phénomène beaucoup plus lent,
- . Les phénomènes dissipatifs sont pris en compte
- . Il s'agit d'un schéma à 2 fluides.

Le système (II) a été traité numériquement sur une IBM 360/91 par BOUJOT et al [12] en utilisant les techniques de visualisation des résultats. Le détail de ce programme est indiqué au paragraphe suivant.

2 - Méthode numérique et programme conversationnel

Nous utilisons la méthode de décomposition liée aux techniques de pas fractionnaires. En notant G le vecteur de composantes n, J, T_e, T_i le système peut s'écrire

$$(15) \quad \frac{dG}{dt} + AG = F$$

où A est une matrice dont les coefficients sont des opérateurs différentiels non linéaires. Un organigramme est donné sur la figure N°4

Fig 4

Ce programme conversationnel est réalisé sous forme modulaire. En particulier, l'introduction de nouvelles sources ou de formes fonctionnelles

pour les coefficients de transport est une opération simple.

PROGRAMME MAIN

Effectue la gestion du programme et les rangements nécessaires pour les retours et la visualisation.

LECTURE

Toutes les constantes physiques définissant le problème sont lues : les dimensions géométriques, le champ toroïdal, la masse initiale les conditions aux limites etc... Les profils initiaux et le profil de la décharge $I(t)$ sont également lus. Les formes fonctionnelles pour les coefficients de transport D , K_e , K_i , η sont choisies.

RESOLUTION

Le système est intégré par une méthode globalement explicite. Chaque equation est traitée implicitement après linéarisation. Après analyse des grandeurs adimensionnelles la méthode de décomposition permet d'avoir différents pas d'intégration dans le temps pour chaque équation, la stabilité du système étant assurée. Ceci apporte un gain non négligeable de temps machine. La simulation de l'évolution d'une décharge de 500 millisecondes de durée, prend un temps machine, sur l'IBM 360-91 d'environ 30 à 50 secondes. Ce temps est plus élevé (2 à 3 minutes) si l'on simule l'introduction des neutres froids. A ce jour nous avons réalisé plus de 1000 simulations.

VERIFICATION ET CALCUL DES QUANTITES SUBSIDIAIRES

A chaque sortie de résultats, il est utile de s'assurer que la solution obtenue par l'intégration numérique vérifie certains invariants du système :

A cette fin nous calculons l'énergie totale du système, le champ magnétique induit etc...

Quand ces conditions sont satisfaites, on calcule également des quantités subsidiaires : densité moyenne, températures moyennes, temps

de confinement , inductance, etc...

SORTIES

Après impression sur listing des résultats et éventuellement impression sur microfilm des courbes apparaissant sur l'écran de visualisation (IBM 2250), le contrôle du programme est transféré à l'utilisateur : il peut alors changer éventuellement les données pour poursuivre l'intégration, ou revenir à l'instant précédent pour refaire l'intégration avec des données modifiées. Les différentes options possibles sont schématisées sur la Fig 5

Fig 5

3 - Application du programme

L'aspect conversationnel donne à notre programme une grande flexibilité. Nous utilisons ce programme pour l'interprétation des résultats expérimentaux ou pour faire des calculs d'extrapolation des machines futures. Il faut noter qu'il est particulièrement bien adapté pour le premier but. Nous donnons ci-dessous un exemple d'interprétation des résultats expérimentaux.

Un des buts importants des expériences sur le TOKOMAK est d'étu-

dier les propriétés physiques (notamment les coefficients de transport) des plasmas très chauds confinés dans ce type d'appareils. Au cours d'une décharge, diverses quantités sont mesurées : le champ électrique, les profils radiaux à divers instants de la densité électronique, de la température électronique, de la température ionique etc... Pour interpréter ces mesures, nous simulons la décharge en utilisant le modèle numérique et nous ajustons les coefficients de transports pour que les résultats des calculs soient en bon accord avec les résultats des mesures. Un exemple de cette simulation est donné sur la Fig 6. où l'on compare les résultats des calculs aux résultats expérimentaux obtenus sur le TOKOMAK de Fontenay aux Roses ^[13] qui est actuellement la machine la plus performante. Ces expériences de simulation nous ont conduit aux conclusions suivantes :

- La résistivité électrique est 5 à 10 fois plus forte que celle prévue théoriquement par SPITZER. Ceci peut être expliqué par la présence des impuretés.
- La conductivité thermique des ions prévue par la théorie n'est pas jusqu'à présent en contradiction avec les résultats expérimentaux.
- En revanche, la diffusion des particules et la conductivité thermique des électrons s'écartent notablement des expressions théoriques usuelles. En comparant également avec les résultats expérimentaux obtenus en d'autres laboratoires (MOSCOU, PRINCETON, OAK-RIDGE, JAPON) nous avons proposé des expressions empiriques pour ces deux coefficients qui vérifient bien les résultats connus à ce jour.

Signalons pour terminer que le modèle est utilisé pour prévoir les performances d'une machine future qui réaliserait l'ignition.

Fig 6 Comparaison entre les calculs et les mesures sur TFR de $U(t)$ $T_e(0,t)$ $n_e(\rho, t=150\text{ms})$

EQUILIBRE D'UN PLASMA DANS UNE ENCEINTE TORIQUE

Les études précédentes d'équilibre, de stabilité et d'évolution temporelle d'un plasma limité par une surface magnétique conduisent au choix d'une configuration possédant les caractères désirés.

Cette configuration doit maintenant être obtenue loin de toutes parois matérielles. Le champ magnétique dans le vide est bien défini par les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

et la donnée du champ magnétique sur la surface Γ_1 du plasma. Ce champ magnétique intérieur possède des singularités et sa détermination est un problème difficile. Si l'on connaissait les surfaces magnétiques (qui existent dans le cas de symétrie de révolution), on réaliserait l'équilibre désirée en matérialisant une, située avant la première singularité, avec une paroi de conductivité infinie. En fait c'est ce que l'on réalise actuellement avec les coques en métal. Comme leur

conductivité n'est pas infinie, le champ pénétrera dans la coque et son effet disparaîtra avec le temps conduisant à la disparition de la configuration désirée.

Nous nous proposons alors de réaliser cette configuration au moins de manière approximative en plaçant des courants d'intensité I_i autour du plasma l'ensemble étant entouré d'une enceinte éloignée pouvant ou non être une coque conductrice.

(17)
Le problème est d'abord traité avec une coque conductrice, mais on cherchera des dispositions de courant diminuant ou même annulant les courants dans cette paroi conductrice de telle sorte qu'elle ne joue pas de rôle important et n'influe pas sur la configuration de plasma cherché.

On place les courants I_i aux points (ρ_i, z_i) entre plasma et enceinte

$$(16) \quad \vec{J}_v = \sum_i I_i \delta(\rho - \rho_i) \delta(z - z_i) \vec{e}_z$$

Utilisant la solution (8) de $\text{div } B = 0$, l'équation à résoudre

$$(27) \quad \text{rot } \vec{B} = \vec{J}$$

devient

$$(28) \quad f = \text{Constant}$$

$$(29) \quad \Delta F = \sum_i \rho I_i \delta(\rho - \rho_i) \delta(z - z_i)$$

La première équation est satisfaite par un champ magnétique longitudinal, aisément réalisable avec un bobinage solénoïdal extérieur.

Pour résoudre la seconde, on posera

$$(30) \quad F_{T_0} = 0$$

$$(31) \quad F_{T_2} = \alpha$$

et on essayera de satisfaire le mieux possible, à l'aide des valeurs I_i des courants extérieurs et de leurs positions, à l'équation

$$(32) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial m} \Big|_{S_1} = B_{m\rho}(\ell)$$

B_m étant le champ méridien, tangent à la section normale du plasma. Cette fonction est donnée par l'étude précédente de la configuration du plasma et est la seule quantité à connaître pour résoudre le problème extérieur. Elle est exprimée en fonction de l'abscisse curviligne l de cette section.

Une condition supplémentaire peut-être d'annuler (au moins partiellement) les courants qui circulent dans la coque conductrice (Γ_0). Ces courants sont des courants de surface (si la paroi est infiniment conductrice ce que l'on suppose ici). Ils sont donnés par :

$$(33) \quad j_{\Gamma_0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0}$$

Le courant total qui circule dans la coque est égal à la somme algébrique des courants circulants dans le plasma et dans les conducteurs I_i .

Schématiquement la méthode utilisée pour résoudre ce problème consiste à définir une suite complète de fonction $w_{m, \Gamma_i}(l)$ périodiques sur la section du plasma sur laquelle on développe le champ $B_m(l)$ donné.

$$(34) \quad B_{m, \Gamma_i}(l) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = \sum a_m w_{m, \Gamma_i}(l)$$

soit

$$a_m = \oint \frac{w_{m, \Gamma_i}}{\rho} \frac{\partial F}{\partial n} dl$$

avec la norme

$$\oint w_{m, \Gamma_i} dl = 1$$

Définissons maintenant $w_m(l, \beta)$ par

$$(35) \quad \mathcal{L} w_m = 0$$

avec

$$w_m = 0 \text{ sur } \Gamma_0$$

$$w_m = w_{m, \Gamma_i}(l) \text{ sur } \Gamma_i$$

En utilisant la relation de type Green pour l'opérateur $\mathcal{L}$

$$(36) \quad \iiint_V (w \mathcal{L} U - U \mathcal{L} w) \frac{dV}{\rho^2} = \iint_{\Gamma_0 + \Gamma_i} (w \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial w}{\partial n}) \frac{d\sigma}{\rho^2}$$

Avec $U = F$ et $w = w_n$,

On obtient :

$$(37) \sum_i I_i w_m(r_i, \theta_i) + \gamma \int_{\Gamma} \frac{d\ell}{\rho} \frac{\partial w_m}{\partial n} = a_m$$

On cherche alors à résoudre au mieux ce système infini d'équations avec comme inconnus γ et I_i , le nombre de courant étant limité et leur position choisie pour à la fois avoir une somme $\sum |I_i|$ minimum et, si possible, les courants dans la coque très faibles.

Un tel programme a été mis au point par MM. BOUJOT et MORERA de la C.I.S.I et est actuellement en fonctionnement. Une communication à ce même colloque étant réservée à l'exposé mathématique du problème de contrôle correspondant (), je me contenterai ici de présenter les résultats obtenus sur un cas typique d'appareil à plasma à sections non circulaires. La fig. (8) montre les intensités des courants nécessaires selon la position des conducteurs pour obtenir une bonne approximation du problème posé. Les 3 cas correspondent à des courants très différents dans la coque extérieure.

Fig. 8

B - SIMULATIONS NUMERIQUES DES PLASMAS DECRITS PAR L'EQUATION DE VLASOV.

I-Introduction

L'objet du présent chapitre est la description des méthodes applicables aux problèmes qui nécessitent une description microscopique du plasma.

Dans toute la suite nous entendrons par description microscopique l'étude de l'évolution de la fonction de distribution à une particule $f(x, v, t)$ des ions et des électrons constituant le plasma. Compte tenu de l'immensité du sujet nous nous limiterons au plasma très idéalisé décrit dans le cadre des hypothèses et approximations suivantes :

1) Le plasma sera supposé infini ce qui sera habituellement simulé numériquement par des conditions de périodicité.

2) Les ions positifs (présents dans tout véritable plasma qui est toujours macroscopiquement neutre) sont supposés immobiles et distribués uniformément.

3) Les électrons sont supposés infiniment finement divisés, ce qui signifie qu'on se place dans le cadre d'une approximation de type milieu continue. Le rapport charge sur masse est constant et est égal au rapport e/m du plasma réel. On néglige en outre tout effet collisionnel. Les hypothèses précédentes constituent l'approximation habituelle des plasmas "de Vlasov".

4) Le plasma est soumis à un champ magnétique suffisamment fort pour rendre le mouvement des particules sensiblement unidimensionnel. De même toutes les perturbations de l'équilibre sont supposées unidimensionnelles.

5) On se limite aux interactions électrostatiques.

Dans ce cadre très restrictif la description mathématique du plasma se réduit à un ensemble de deux équations couplées (écrites en variables sans dimension)

L'équation de Vlasov à une dimension :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (1)$$

l'équation de Poisson à une dimension

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv \quad (2)$$

Dans le cas général d'un plasma pluri-dimensionnel et d'interactions électromagnétiques il "suffit" de remplacer les scalaires par des vecteurs et l'équation de Poisson par le système complet des équations de Maxwell et $\vec{E}$ par $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$ dans l'équation de Vlasov.

L'étude du système (1)(2) a fait l'objet d'une grande partie des travaux théoriques effectués dans le cadre de l'approche microscopique de l'étude des propriétés des plasmas chauds. Pratiquement les théoriciens ont été obligés de se limiter au cadre de théories linéaires ou quasilinearaires. Aucune méthode analytique n'a encore permis de s'attaquer avec succès à l'étude générale de la turbulence faible et à fortiori de la turbulence forte.

Le système précédent s'est malheureusement avéré presque aussi délicat à traiter numériquement qu'analytiquement. Il s'en suit un grand nombre d'approches différentes pour tenter de le résoudre que nous ne pouvons envisager de décrire en détails. Nous essaierons de dégager les caractéristiques des trois classes de techniques existantes. L'étude des deux premières sera volontairement succincte afin de pouvoir décrire plus en détails la dernière qui nous semble potentiellement plus riche.

Nous commencerons par souligner une propriété importante et gênante du système (1)(2). Une des caractéristiques des solutions de l'équation est leur tendance à acquérir une structure de plus en plus fine dans l'espace des phases (x, v) quand t croît. Ce phénomène apparaîtrait clairement même si on supprime le terme d'interaction $E \frac{\partial f}{\partial v}$ dans l'équation (1).

La solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

peut en effet s'écrire :

$$f(x, v, t) = f(x - vt, v, 0)$$

ce qui montre que les dérivées par rapport aux vitesses croissent indéfiniment avec t . L'introduction du terme d'interaction complique encore le phénomène en introduisant des structures dues au piégeage des particules dans le potentiel de l'onde.

Soulignons pour terminer que l'évolution de f_0 décrite par le système (1)(2) est réversible et qu'il peut être interprété comme l'équation d'évolution d'un fluide incompressible dans l'espace (x, v) . Cette dernière propriété vient du fait que f obéit à l'équation de Liouville.

Trois types d'approches ont été utilisées pour tenter de résoudre le système (1)(2).

II - Approche eulérienne

II.1 - Description

En raison de la tendance des solutions de l'équation de Vlasov à acquérir des structures très fines dans l'espace des phases, les méthodes directes d'intégration ont eu assez peu de succès. Ceci reste vrai même si on simplifie le problème en admettant que lorsque la structure devient suffisamment fine pour que son échelle caractéristique devienne beaucoup plus petite que les échelles caractéristiques des grandeurs physiques intéressantes, on peut abandonner sa description complète et passer à une fonction de distribution lissée définie en moyennant $f(x, v, t)$.

Bien qu'il soit en principe possible de choisir la moyenne de manière à conserver les n premiers moments des fonctions de distribu-

tion avec n quelconque le fait de se limiter habituellement à la conservation de l'impulsion et de l'énergie fait perdre la réversibilité dans le temps et la conservation de la densité dans l'espace des phases.

Ce type de lissage peut aussi être nécessaire dans les techniques de résolution du système (1)(2) par "transformée de f".

La philosophie de ces méthodes est une tentative pour passer de l'écriture de l'équation de Vlasov dans le système de coordonnées (x,v) à un système de coordonnées tel qu'il n'apparaisse pas de termes oscillant à une fréquence croissant avec $\frac{t}{\tau}$ une deuxième "contrainte" étant si possible de ramener les dérivées partielles à des opérations algébriques. Deux types de transformation ont été utilisées.

1) Double transformée de Fourier, la fonction de distribution étant dans ce cas décomposée à la fois en série de Fourier en position et en vitesse.

2) Transformation de Fourier Hermite dans lesquelles la fonction de distribution est décomposée en série de Fourier dans l'espace des x et en polynomes d'Hermite en v.

II.2 - Décomposition en double transformée de Fourier

On écrit les fonctions de distribution sous forme d'une somme d'harmoniques définis par

$$F_n(q,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iq v) dv \int_0^L f(x,v,t) \exp(-2\pi i n x) dx$$

n est le numéro du mode dans l'espace de configuration, q la transformée de v. Le champ électrique s'exprime de même sous forme d'une somme d'harmonique/ E_n

$$E_n = \int_0^L E(x,t) \exp(-2\pi i n x) dx$$

Le système Vlasov-Poisson se ramène alors à :

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + 2\pi n \frac{\partial F_n}{\partial q} = \frac{q}{2\pi} C_n(q, t) \quad (3)$$

$$F_n = \frac{i}{2\pi n} F_n(q=0) \quad (4)$$

$$C_n(q, t) = -2\pi i \sum_{m=-nmax}^{nmax} E_m(t) F_{n-m}(q, t) \quad (5)$$

l'équation (3) s'intègre en suivant les caractéristiques qui sont des droites de pente $2\pi n$ dans le plan (q, t) .

II.3 - Décomposition de type Fourier Hermite

On écrit les fonctions de distribution sous la forme

$$f(x, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(imk_0 x) \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) H_m(v) Z_{m,n}(t)$$

$$H_m(v) = \frac{(-1)^m}{2\pi^{1/2}} \frac{\exp(v^2/2)}{(m!)^{1/2}} \frac{d^m}{dv^m} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

En utilisant les relations d'orthogonalité et de récurrence des polynômes d'Hermite on est alors en mesure de ramener le système (1)(2) à un système algébrique non linéaire du type

$$\frac{d}{dt} Z_{m,n} = G_{m,n} Z \quad (6)$$

$$Z = \{Z_{m,n}\}$$

G_{mn} opérateur matriciel algébrique non linéaire. Le système (6) peut être résolu sans trop de difficultés à l'aide d'algorithmes standards du type Runge Kutta ou Prédicteur Correcteur. A l'actif de cette méthode il convient de souligner que bien que nécessitant un nombre élevé de termes du développement en polynôme d'Hermite elle permet la résolution de problème décrit par l'équation de Vlasov complétée par un second membre décrivant les collisions.

III - Le modèle du Water Bag"

III.1 - Description

Nous avons déjà mentionné que le point de départ de cette approche était le fait que l'équation de Vlasov décrivait le mouvement d'un fluide incompressible dans un espace à $2N$ dimensions. Elle exprime en outre que la fonction $f(x,v,t)$ est constante le long des trajectoires des particules définies par

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = v(\tau) \quad \frac{d}{d\tau} v(\tau) = -E(x(\tau), \tau)$$

Dans le cas où $N=1$ il est facile de représenter graphiquement les fonctions de distribution par des contours $f(x,v)=\text{cte}$ dans l'espace des phases bidimensionnel

Les contours C_i évoluent avec le fluide en conservant leur topologie (ils ne peuvent se croiser ou se couper). La surface comprise entre deux contours est un invariant du mouvement et chaque point du contour obéit aux équations du mouvement d'une particule.

En suivant l'évolution de chaque contour on est capable de déterminer la densité de charge $\int_{-\infty}^{+\infty} f dv$ de sorte qu'on sait calculer E à partir de (2). En utilisant alors les équations du mouvement on est alors capable de déterminer une nouvelle configuration à $t+dt$.

Cette méthode est particulièrement intéressante si la fonction de distribution est rigoureusement définie à l'aide d'un nombre fini de courbes. C'est le cas des fonctions de distribution constituées d'une suite finie de marche/d'escalier c'est-à-dire de régions où f

est constante séparées par des frontières où f est discontinue. On montre qu'il est possible d'approximer les fonctions de distribution réelles par de telles fonctions.

Approximation d'une Maxwellienne par une marche unique.

Approximation d'une maxwellienne par une suite de marche.

III.2 - La méthode numérique

Les contours sont définis par une chaîne de points lagrangiens liés entre eux par des segments de droite. Ils doivent être suffisamment rapprochés pour pouvoir approximer correctement par une somme sur les trapèzes la surface invariante comprise entre les contours. Il est intéressant de faire appel à une structure de liste afin de pouvoir ajouter ou supprimer des points si les segments sur un contour s'étirent ou se contractent de trop au cours des calculs. Le champ électrique est déterminé par la forme intégrale de l'équation de Poisson.

$$\begin{aligned}
 E(x_{m+1} - x_m) &= \left[\int_{x_m}^{x_{m+1}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv - \Delta x \right] \\
 &= \sum_j \Delta f_j S(x_{m+1}, x_m) - \Delta x
 \end{aligned}$$

Δf_j est la discontinuité due à la traversée du $j^{\text{ème}}$ contour
 $S(x_{m+1}, x_m)$ est la surface (avec son signe) comprise entre les points x_{m+1} et x_m ($x_{m+1} > x_m$). Les points x_m déterminent une grille eulérienne fixe et divisent l'espace en bandes verticales d'égales épaisseur Δx .

Quand le champ électrique a été obtenu en chaque point eulérien il est interpolé linéairement pour chaque P_i situé entre 2 points eulériens.

On fait alors évoluer les contours à partir d'une méthode centrée d'ordre 2 utilisant l'accélération à $t = n\Delta t$ pour faire évoluer la vitesse entre $(n - \frac{1}{2}) \Delta t$ et $(n + \frac{1}{2}) \Delta t$ suivant l'algorithme : (pour le i ème point lagrangien).

Ce schéma explicite n'est utilisable que parce que la densité de charge nécessaire pour calculer E au temps t ne dépend que des positions et non des vitesses.

Le principal inconvénient de la méthode est le nombre fini de contours que l'on peut traiter d'autant que comme pour l'intégration directe de l'équation de Vlasov on se heurte au développement de structures fines qui obligent à simplifier périodiquement les contours.

IV - Approche Lagrangienne

IV.1 - Introduction

L'approche que nous abordons ici est notablement différente de celles dont nous avons parlé jusqu'ici. Le point de départ qui nous rattache aux classes précédentes et en particulier au waterbag est le fait que les caractéristiques de l'équation de Vlasov sont

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{E}$$

c'est-à-dire les équations du mouvement d'une particule. On abandonne alors complètement l'aspect statistique pour adopter un point de vue purement dynamique. On se donne un nombre N de particules ayant une fonction de distribution initiale représentant $f(x,v,0)$ et on les fait évoluer grâce aux équations du mouvement couplées aux équations de Maxwell. L'état dynamique complet du système est connu à chaque instant et les quantités moyennes intéressantes comme la densité ou la fonction de distribution peuvent être calculées quand on le désire. Ce modèle est particulièrement intéressant par la souplesse, sa facilité relative de programmation et celle de modifier les conditions initiales ou extérieures. Les points lagrangiens étant indépendants le développement de structures fines ne pose aucun problème, la limite de résolution étant uniquement fixé par le nombre de particules en jeu. Enfin c'est actuellement le seul modèle qui ait été généralisé à plusieurs dimensions.

IV.2 - Description du modèle

Tel que nous l'avons décrit dans l'introduction de ce paragraphe l'approche lagrangienne semble particulièrement séduisante. Malheureusement quand on tente de l'appliquer pratiquement on se heurte immédiatement à des problèmes pratiques d'encombrement mémoire et de temps machine qui limitent considérablement le nombre de particules que l'on peut envisager de suivre. Afin de bien situer les problèmes il est utile de commencer par préciser le cycle normal d'une simulation numérique de ce type sous la forme la plus simple.

Le schéma ci-dessus résume le cycle fondamental : ayant la position des particules on calcule leur interaction mutuelle d'où l'on déduit une accélération qu'on utilise pour faire évoluer les vitesses puis des nouvelles vitesses on déduit de nouvelles positions. L'algorithme utilisé est le même que pour faire évoluer les particules lagrangienne du water bag seul le calcul du champ d'interaction est différent. Le calcul direct de ce champ est une étape excessivement coûteuse qui rend ce calcul impossible en pratique. Le champ crée sur la $i^{\text{ème}}$ particule par toutes les autres est en effet donné par

$$E_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j \vec{r}_{ij}}{\epsilon_0 |\vec{r}_{ij}|^2}$$

Si le nombre de dimensions est plus grand que 1 le calcul précédent nécessite sensiblement $10 N$ opérations (où N est le nombre de particules en jeu). Pour trouver le champ sur N particules il faut donc sensiblement $10N^2$ opérations. Dans le cas d'un ordinateur effectuant une opération arithmétique par μs , le calcul direct de l'interaction nécessite pour :

$N = 100$	0.1 seconde
$N = 1000$	10 secondes
$N = 10^4$	15 minutes
$N = 10^5$	1 jour

Une simulation nécessitant environ 1000 pas de temps, il est clair qu'on ne peut envisager sérieusement de suivre plus de 1000 particules par cette méthode. Ce nombre est beaucoup trop petit pour simuler correctement le comportement d'un plasma réel, il faut donc abandonner le calcul direct de l'interaction. On reprend donc un point de vue eulérien pour le calcul des champs d'interaction : l'espace de configuration (x) est divisé en mailles et on calcule la densité de charge dans chaque maille. L'équation de Poisson permet alors de calculer le potentiel au centre de chaque maille et par interpolation le champ

au point où se trouve chaque particule. On peut alors montrer que le temps de calcul ne croît plus que comme $N_G \times N \log N$ où N_G est le nombre de points de la grille. L'artifice précédent permet de suivre quelques 10^5 particules (le maximum absolu concevable actuellement étant de 10^6). Ce chiffre reste très faible devant le nombre de particules en jeu dans un véritable plasma qui est de l'ordre de 10^{10} à 10^{15} . Le paragraphe qui suit sera consacré à l'étude des conséquences de cette réduction du nombre de particules.

IV.3 Conséquences de l'utilisation d'un nombre réduit de particules

La réduction de la densité des particules entraîne une augmentation considérable du "grain" de l'espace. Pour conserver les grandeurs physiques fondamentales il faut en effet multiplier la charge par un facteur d'échelle et la masse par le même facteur pour ne pas changer les équations du mouvement. On constitue en quelque sorte des agglomérats de particules ou superparticules qui représentent un grand nombre de particules élémentaires. Il en résulte qu'on est très loin de l'approximation du milieu continu supposée par l'équation de Vlasov. Les fluctuations du champ d'interaction sont considérablement amplifiées par rapport au plasma réel ce qui risque de masquer les phénomènes fins qu'on se propose d'étudier.

Comment tourner la difficulté ? c'est ici que s'introduit l'aspect plus spécifiquement plasma de ces simulations qui sont aussi utilisées en mécanique des fluides. Le comportement d'un plasma est régi par des forces coulombiennes à longue portée qui dans le domaine des paramètres qui nous intéressent en font un milieu essentiellement collectif. L'important dans une simulation est donc de respecter ces interactions à longue distance, les interactions à courte distance sont beaucoup moins importantes car elles sont naturellement lissées par le milieu. Comme

ce sont précisément les collisions proches (c'est-à-dire avec de grandes déviations) qui sont amplifiées dans les plasmas numériques, il suffit de trouver un moyen pour les lisser.

La solution adoptée à en fait été fournie pour les plasma réels par Vlasov dès 1950 pour justifier l'approximation milieu continu. Il introduisit alors le concept de particules de dimensions finies. Il s'agit d'un être fictif obtenu en "solidifiant" un ensemble de particules contenu dans un volume caractéristique. Les solides ainsi obtenus sont indéformables mais peuvent se traverser librement lors d'une interaction. La façon la plus simple de concevoir ce type de particule est de "solidifier" une sphère de "Debye". La longueur de Debye est la longueur caractéristique à l'échelle de laquelle un plasma est susceptible de ne pas être rigoureusement neutre. A des distances plus importantes il s'introduit des effets d'écran qui permettent à l'agitation thermique de restaurer la neutralité. Ce sont précisément ces effets d'écran qui minimisent le rôle des collisions proches.

IV.4 - Physique des particules de dimension finie.

Les conséquences de la dimension finie des particules sur les propriétés linéaires du plasma peuvent être étudiées analytiquement en remplaçant les termes de charge ponctuelle $q \delta(x)$ par des termes $qS(x)$ où $S(x)$ est un facteur de forme. Il est aisé de constater que le but de lissage est atteint. La théorie électrostatique élémentaire montre d'ailleurs que la force d'interaction de 2 sphères chargées tend vers zéro quand la distance qui les sépare tend vers zéro alors qu'elle diverge pour des particules ponctuelles.

L'effet de lissage est d'autant plus marqué que le rayon des particules est plus grand au prix bien évidemment d'une perte de résolution des phénomènes. Chaque fois que cela est possible, il est intéressant de conserver l'image de la sphère de Debye qui de toute façon constitue une limite physique et de travailler avec des particules de rayon effectif de l'ordre de λ_D .

Les facteurs de forme utilisés en pratique sont carrés ou gaussiens suivant les méthodes numériques utilisées par ailleurs. Plus précisément lorsqu'on travaille directement dans l'espace de configuration on utilise des facteurs de forme carrés, tandis que lorsqu'on travaille dans l'espace réciproque (défini par la transformée de Fourier de l'espace de configuration) on utilise des facteurs gaussiens.

Les zéro qui apparaissent dans la transformée de Fourier de facteurs carrés bien que gênants s'ils se produisent pour des k trop petits (particule trop étendue) car ils correspondent à une absence d'interaction pour les nombres d'ondes en cause, ne sont pas catastrophiques car les modes correspondants sont (d'après l'étude de la relation de dispersion) infiniment amortis.

Quand on utilise l'espace réciproque l'introduction des facteurs de forme gaussien se fait simplement en introduisant une coupure exponentielle des grands nombre d'onde. Le rôle de tissage des fluctuations à courte longueur d'onde apparaît donc clairement dans cette image.

IV.5 - Rôle du maillage spatial

L'introduction du maillage enlérien pour le calcul du champ électrique à deux types de conséquences. Tout d'abord il correspond à un lissage supplémentaire du fait qu'on supprime automatiquement les longueurs d'onde plus petites que la grille. La discrétisation due à la grille enlérienne peut être plus ou moins "bruyante". Dans les simulations les plus simples on calcule la densité de charge dans chaque maille en déterminant la maille la plus proche de la position du centre de chaque particules. C'est l'approximation NGP (Nearest Grid Point) de la littérature anglosaxonne. Deux particules infiniment voisines peuvent ainsi contribuer à la charge de 2 mailles différentes, ce qui rend le processus très bruyant. Les simulations plus "évoluées" utilisent pleinement le concept de particules de dimensions finies : ayant déterminé la position du centre d'une particule on répartit la charge affectée à cette particule proportionnellement à la "surface" de chaque fraction de particule dans les cellules voisines.

La totalité de la charge est affectée à la cellule indiquée d'une croix.

La charge est répartie proportionnellement aux aires hachurées dans les 4 cellules.

Cette technique réduit notablement le bruit de fond des simulations. Elle est connue sous le nom de PIC ou CIC (Particule In Cell ou Cloud In Cell) et est due initialement à Harlow en mécanique des fluides.

Le fait que deux particules voisines peuvent contribuer soit à la charge d'une cellule soit à celle de 2 nous amène au deuxième type d'effet introduit par la grille. L'espace cesse d'être uniforme, il devient périodique.

Il y a perte de l'invariance par translation d'un système homogène. La force d'interaction ne dépend plus seulement de la distance qui sépare deux particules mais aussi de la position des particules par rapport à la grille. Elle devient périodique en Δx (Δx largeur de la maille). La situation physique est très semblable à celle d'un gaz de Fermions dans un réseau cristallin.

On démontre comme en physique du solide que l'effet de la grille est de coupler les nombres d'onde qui diffèrent de multiple entrés de nombre d'onde de la grille. Dans le cas des problèmes de simulation des plasmas il apparaît une complication supplémentaire qui est que dans certaines conditions de couplage (qui correspondent à des mailles grandes devant la distance de Debye le plasma numérique devient instable alors que le plasma réel ne l'est pas. Il y a donc une limite supérieure à la taille des mailles utilisables.

L'optimum consiste vraisemblablement à travailler avec des particules de l'ordre de la longueur de Debye et une maille de la même taille. Ceci est facilement réalisable avec les modèles unidimensionnels mais beaucoup plus délicat pour les modèles à 2 ou 3 dimensions. Des raffinements sont donc encore nécessaires pour réduire le bruit sans

introduire de phénomènes parasites.

IV.6 - Raffinements et problèmes liés à l'initialisation

Les positions initiales et les vitesses peuvent être choisies soit aléatoirement soit de façon ordonnée pour simuler les conditions initiales réelles d'un plasma expérimental.

Dans une initialisation aléatoire les positions initiales sont choisies de manière à représenter la densité initiale et les vitesses sont choisies au hasard avec des probabilités correspondant à la fonction de distribution initiale. Ce processus d'initialisation est simple et conceptuellement proche des conditions physiques réelles. Cependant par suite du nombre réduit de particules on excite un large spectre de fréquence à niveau relativement élevé ce qui peut-être gênant si par exemple on cherche à étudier le comportement d'une onde de faible amplitude.

Quand toutes les particules représentant une espèce donnée sont identiques il faut beaucoup de particules pour représenter les valeurs plus faibles. La nature discrète du plasma numérique est par conséquent particulièrement évidente dans les régions de l'espace des phases où la "densité en phase" est faible (par exemple la queue de la fonction de distribution). Pour palier à cet inconvénient on peut utiliser des particules pondérées conservant le même rapport charge sur masse mais ayant des charges et masses différentes ce qui permet d'améliorer la représentation du plasma dans les zones à faible densité en phase.

Pour initialiser les calculs dans ce cas l'espace des phases est recouvert d'un maillage x, v . Une particule est alors disposée

en chaque point de la grille avec une masse et charge proportionnelle à la valeur locale de la densité en phase initiale. Cette technique d'initialisation n'introduit aucune fluctuations aléatoires et permet de rester parfaitement maître des perturbations initiales. Il convient néanmoins de souligner que les particules forment alors un ensemble multifaisceaux qu'on sait être instable mais si le nombre de faisceau est suffisant le temps de développement des instabilités est très grand devant le temps caractéristique des phénomènes qu'on se propose d'étudier.

V. Conclusions

Malgré le caractère nécessairement succinct de l'exposé nous avons tenté de mettre en évidence les traits dominants des principales approches de résolution du système couplé Vlasov Poisson. La place nous manque ici pour décrire les applications de ces méthodes.

L'étude des modèles unidimensionnels de la turbulence faible à fait l'objet de nombreuses expériences numériques et permis de retrouver les résultats prévus qualitativement par la théorie. Beaucoup de microinstabilités prévus théoriquement, jamais observées expérimentalement ont pu être mises en évidence au cours de simulations numériques. Dans le domaine de la turbulence forte l'étude du développement de l'instabilité double faisceau totalement inaccessible à la théorie a été faite de façon détaillée. Les modèles unidimensionnels sont malheureusement trop restrictifs pour l'étude des plasmas confinés. En particulier l'étude des coefficients de transport nécessite des modèles bi ou tri dimensionnels les premiers résultats encourageants commencent à apparaître dans la littérature. Les modèles unidimensionnels connaissent un regain d'intérêt avec l'étude des plasmas créés par laser qui constituent peut être une autre voie vers la fusion

thermonucléaire. Dans ce domaine fortement linéaire les simulations numériques jouent un rôle d'autant plus fondamental que les expériences durent quelques microsecondes ce qui rend toute mesure fine impossible.

Nous n'avons indiqué aucune référence car une bibliographie exhaustive nécessiterait un nombre de pages équivalent à celui de cet article. L'unique référence [3] contient la date bibliographique.

- REFERENCES -

Références générales.-

- /1/ Congrès du Centenaire de la Société Française de Physique-Vittel 1973 - Colloque de Physique des Plasmas - Journal de Physique (à paraître).
- /2/ The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations - C.Mercier and H.Luc - 1970 - International School of Plasma Physics - Varenna, Como, Italy (à paraître).
- /3/ Methods in Computational Physics - Vol.9, Academic Press (1970).

Références particulières.-

- /4/ I.B.Bernstein , E.A.Frieman, M.D.Kruskal, R.M.Kruskal - Proc.Roy.Soc. - A.244 (1958) 17.
- /5/ G.Laval, C.Mercier, R.Pellat - Nuclear Fusion 5 (1965) 156.
- /6/ C.Mercier, Nuclear Fusion Suppl., part 2. (1962) 801.
- /7/ C.Mercier - Sixth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics - Moscou 1973 - Vol.I, p.75.

- /8/ F.Grelot, J.Weisse - Sixth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics - Moscou 1973 - Vol.I, p.79.
- /9/ G.Laval, R.Pellat - Tokomaks with non-circular cross-section - Sixth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics Moscou 1973.
- /10/ C.Mercier et Soubbaramayer - Numerical model for plasma evolution in Tokomak devices- Fith European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Grenoble 1972 - Vol.II, p.157/169.
- /11/ D.F.Düchs - Review of computer simulations of discharges - Third International Symposium on toroidal plasma confinement, Garching 1973 - B.10.
- /12/ J.P.Boujot, G.Meurant, J.P.Saussais - Le problème TOKOMAK. Rapport CEA.N.1546 (1972).
- /13/ P.Rebut et al. - First results on TFR - Sixth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Moscou 1973.