METHODES ET TECHNIQUES D'INTEGRATION NUMERIQUE
ADAPTEES A L'ETUDE DES ECOULEMENTS PLANETAIRES

Robert Sadourny

Laboratoire de Météorologie dynamique
Centre national de la Recherche scientifique
Paris

I. INTRODUCTION

L'écoulement atmosphérique est un écoulement turbulent, à régime quasi-stationnaire. On dispose aujourd'hui d'un certain nombre de mesures, effectuées de diverses manières dans l'atmosphère réelle, permettant d'évaluer la répartition spectrale de l'énergie cinétique (WIIN-NIELSEN (1967), MOREL et NECCO (1973)). On a pu mettre en évidence que, dans un domaine spectral allant des ondes planétaires aux ondes d'échelle 200 km environ, le spectre d'énergie suit une loi voisine de k^{-3} . En première approximation, l'écoulement de grande échelle peut être considéré comme horizontal et non divergent, obéissant par conséquent aux lois statistiques de la turbulence bidimensionnelle. La répartition spectrale en k^{-3} correspond à la loi bien connue de KOLMOGOROV-OBUKHOV. Elle dépend étroitement de l'existence d'un invariant quadratique: l'enstrophie, intégrale spatiale du carré du rotationnel, pour les équations inviscides. Dans un domaine spectral inertiel, c'est à dire sans sources ni dissipation, l'enstrophie est simplement transférée des grandes vers les petites échelles. L'état d'équilibre statistique est caractérisé par un taux de transfert uniforme, qui impose à lui seul la forme du spectre. La théorie de KOLMOGOROV apparaît aujourd'hui amplement confirmée. Récemment, l'intégration temporelle de modèles stochastiques de la turbulence bidimensionnelle à très grand nombre de Reynolds (ANDRE, LESIEUR et POUQUET (1973)) a permis de mettre en évidence l'apparition d'un état de régime en k^{-3} , à transfert d'enstrophie constant vers les échelles les plus courtes. Il est certain que l'application de cette théorie à l'atmosphère ne peut se faire que de façon approchée. CHARNEY (1971) a toutefois développé une théorie analogue dans le cas d'un écoulement

tridimensionnel quasi-géostrophique, analogue à l'écoulement atmosphérique à grande échelle.

Le domaine spectral dont nous parlons est le domaine qui correspond justement aux modèles numériques actuels de circulation générale. En effet, étant donné le grand nombre de paramètres physiques intervenant dans la description de l'état de l'atmosphère, et, d'autre part, la longueur de certains calculs (en particulier, l'inclusion des échanges radiatifs dans les sources d'énergie), le degré de développement actuel des calculateurs limite la résolution à une centaine de kilomètres environ. Dans ces conditions, si l'on veut représenter de façon convaincante l'atmosphère réelle, il importe d'accorder une attention particulière aux mécanismes de transfert. Des progrès importants dans ce sens ont été accomplis dans les années soixante. Le premier, ARAKAWA (1966) a introduit l'enstrophie comme invariant formel au niveau des équations tronquées, obtenant ainsi un bilan plus réaliste des interactions non linéaires. Simultanément, l'introduction par SMAGORINSKY d'une pseudo-viscosité non linéaire peut être considérée comme la première tentative de paramétrisation des interactions entre les modes effectivement représentés par le modèle, et les modes situés au-delà de la troncature.

Il est clair que les modèles tronqués sans dissipation d'enstrophie, même dans le cas de schémas d'ARAKAWA, représentent très imparfaitement les mécanismes de transfert, dans la mesure où ceux-ci sont bloqués à la troncature. Leurs états d'équilibre statistique propres seront fondamentalement différents de celui de l'atmosphère, puisque non régis par un transfert uniforme d'enstrophie. On peut d'ailleurs, étant donné un modèle inviscide tronqué, calculer théoriquement ses états d'équilibre statistique (au moyen des méthodes classiques de la mécanique statistique à nombre fini de degrés de liberté), vérifier numériquement la tendance vers ces états d'équilibre (ergodisme), et constater qu'il ne s'agit pas de spectres en k^{-3} . On peut consulter à ce sujet: ORSZAG et FOX (1973), BASDEVANT (1973). Pour retrouver un état de régime analogue à celui de l'atmosphère réelle, il convient par conséquent d'ajouter au modèle inviscide une dissipation représentant le transfert réel d'enstrophie à la troncature. La clé de ce problème est une théorie statistique des interactions entre les mouvements explicites du modèle et les mouvements d'échelle plus petite. Cette théorie doit faire appel à un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Entre autres, il est naturel d'admettre l'isotropie

et l'homogénéité statistique des mouvements d'échelle inférieure à une centaine de kilomètres. Cette hypothèse est physiquement bien fondée. Toutefois, les modes dont on représente ainsi l'influence sont définis dans le modèle comme tous les modes externes par rapport à la troncature. Il importe donc, si l'on veut une paramétrisation cohérente, de définir celle-ci de la façon la plus homogène et la plus isotrope possible sur la totalité de la sphère.

Les transferts d'enstrophie, ou, plus généralement, les interactions non linéaires, ne sont pas les seuls processus nécessitant une évaluation statistique des phénomènes de petite échelle au niveau des équations tronquées. En effet, il existe dans l'atmosphère des sources d'énergie extrêmement importantes à des échelles inférieures à 100 km. Par exemple, les phénomènes de convection associés à la présence de cumulus, et les échanges énergétiques correspondants ont une influence considérable sur l'écoulement de plus grande échelle, par dégagement de chaleur latente, effet radiatif et induction de subsidence à grande échelle. Il est bien sûr hors de question de représenter individuellement chaque cumulus, et les effets qu'il provoque, dans un modèle de circulation générale. Les météorologistes ont ainsi été amenés à se poser le problème de la paramétrisabilité de ces phénomènes. La première théorie statistique véritablement satisfaisante est due à ARAKAWA(1973). L'occurrence et l'influence des cumulus sont paramétrisés en fonction des variables physiques à plus grande échelle, moyennant certaines hypothèses, dont des hypothèses de structure sur la répartition nuageuse probable. On se donne ainsi une répartition spectrale des nuages, dépendant d'un simple paramètre scalaire λ , assimilable à un facteur d'échelle. Ces hypothèses d'homogénéité et d'isotropie statistiques de la répartition nuageuse sont inséparables d'une résolution homogène et isotrope de l'écoulement de grande échelle.

Si l'on considère le problème sous cet angle, l'utilisation (très fréquente jusqu'à ce jour) de réseaux réguliers en coordonnées sphériques (longitude-latitude) n'est pas vraiment appropriée. La résolution est-ouest devient de plus en plus fine à mesure que l'on se rapproche des pôles, l'élongation des mailles dans le sens nord-sud, de plus en plus accentuée, et les modèles de paramétrisation, de moins en moins satisfaisants. On sait par ailleurs que, sur ces réseaux, le pas temporel, lié aux conditions de stabilité pour les ondes de gravité, est très faible eu égard à la résolution effective dans les latitudes moyennes. (Ce dernier inconvénient peut être éliminé

toutefois, si l'on procède à un filtrage systématique des ondes courtes au voisinage des pôles.) Des modèles spectraux, basés sur le développement des fonctions scalaires en séries tronquées d'harmoniques sphériques, ont été développés récemment, en particulier par ELIASSEN et al. (1970). Néanmoins, de tels modèles ne sont pas particulièrement adaptés à la représentation des sources physiques d'énergie, ni des phénomènes de petite échelle. D'une façon générale, l'utilisation de coordonnées sphériques est peu compatible avec une discrétisation quasi-uniforme sur la sphère. Par exemple, sur un réseau quasi-uniforme, les accroissements en longitude ne tendent pas uniformément vers zéro quand le module géométrique du réseau tend vers zéro. Ceci conduit, dans le cas d'équations aux différences, à des défauts de consistance aux pôles. Les conséquences pratiques sont, entre autres, une distorsion des ondes, indépendante de la résolution. Nous proposons ici l'abandon des coordonnées sphériques, au profit d'une représentation plus adaptée à une discrétisation quasi-homogène, quasi-isotrope, de l'écoulement.

II. REPRESENTATION POLYEDRALE

Nous prendrons pour exemple une forme très simplifiée des équations du problème, à savoir les équations qui gouvernent l'écoulement d'une eau peu profonde, de densité uniforme, à surface libre. La méthode utilisée se généralise naturellement aux équations complètes d'une atmosphère en équilibre hydrostatique. Si l'on désigne par $\vec{V}$ le vecteur vitesse horizontal, et par ϕ le géopotentiel de la surface libre, les équations sont les suivantes:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (f + \text{rot} \vec{V}) \vec{k} \times \vec{V} + \text{grad}(\phi + \frac{1}{2} V^2) &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\phi \vec{V}) &= 0 \end{aligned}$$

f représente ici le rotationnel d'entraînement dû à la rotation de la planète, $\vec{k}$ le vecteur unitaire normal à la sphère. Les opérateurs sont les opérateurs de dérivation sphériques. L'écoulement étant bidimen-

sionnel, les rotationnels sont assimilés à des scalaires.

On considère un polyèdre régulier P , que l'on suppose concentrique à la sphère S . Dans la pratique, P sera un cube, ou de préférence un icosaèdre. On désignera par Π la projection de P sur S à partir de leur centre commun. Dans la projection Π , chacune des faces P_n de P s'applique sur un polygone sphérique S_n . L'ensemble des polygones S_n reconstitue la sphère S . Dans chaque face P_n , on se donne un repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)_n$, et le système de coordonnées correspondant, $(x^1, x^2)_n$. Ces coordonnées constituent un système de coordonnées curvilignes dans S_n . La métrique locale est définie par le tenseur symétrique:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^j}$$

où M est un point de S_n . On définit également le facteur d'aire:

$$g = \left| \det (g_{ij}) \right|^{\frac{1}{2}}$$

On désigne par P_{nm} l'intersection de P_n et de P_m , par S_{nm} l'intersection de S_n et de S_m , par N le nombre des faces du polyèdre P .

Dans ces conditions, un champ scalaire ϕ de classe C_1 sur la sphère S est défini par N champs $\phi(x^1, x^2)$ de classe C_1 sur P_n , moyennant, comme conditions aux limites, la continuité de ϕ et de $\text{grad} \phi$ sur les frontières P_{nm} . De façon analogue, un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe C_1 sur S est défini par $2N$ champs de composantes covariantes $u_i(x^1, x^2)$, ou contravariantes $u^i(x^1, x^2)$, de classe C_1 sur P_n , moyennant la continuité de $\vec{V}$, $\text{rot} \vec{V}$, $\text{div} \vec{V}$ sur les frontières P_{nm} .

Si l'on se place dans une face S_n , les équations (1) s'écrivent:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \varepsilon_{ij} u^j (g f + \varepsilon_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x^k}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi + \frac{1}{2} u_k u^k) = 0$$

(2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} (g \phi u^j) = 0$$

où ε_{ij} est le tenseur antisymétrique:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur les arêtes S_{nm} , les conditions aux limites indiquées plus haut entraînent naturellement que les équations (2) exprimées dans S_n et dans S_m coïncident.

L'énergie du système est définie par:

$$E = \int_S (\phi^2 + \phi v^2) \, dS$$

et sa masse, par:

$$M = \int_S \phi \, dS$$

Le fait que ϕ soit une variable positive ne pose pas de problème dans les intégrations numériques, car elle varie relativement peu devant sa valeur moyenne.

La variable dépendante du problème est le vecteur fonction de l'espace-temps:

$$X = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \phi \end{pmatrix}$$

Il est commode d'introduire, d'une part, le produit scalaire:

$$(X, X') = \int_S (\vec{v} \cdot \vec{v}' + \phi \phi') \, dS$$

et, d'autre part, l'opérateur de dérivation D , défini par:

$$DX = \begin{pmatrix} \vec{\text{grad}} \phi \\ \text{div } v \end{pmatrix}$$

L'opérateur D possède la propriété d'être antihermitien par rapport au produit scalaire. La conservation de la masse et celle de l'énergie se déduisent directement de cette propriété.

Par exemple, la conservation de l'énergie se déduit de

$$(3) \quad (Y, DY) = 0$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} V \\ \phi + \frac{1}{2}V^2 \end{pmatrix}$$

Dans la représentation polyédrale, on définit un produit scalaire partiel dans chaque polygone sphérique:

$$(X, X')_n = \int_{S_n} (V \cdot V' + \phi \phi') dS$$

Une fois la sommation exprimée dans le système de coordonnées correspondant, on obtient

$$(4) \quad (X, DX)_n = \sum_m \oint_{P_{nm}} g \phi \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix}_{(n)}$$

dc étant l'élément de courbe sur S_{nm} , orientée positivement autour du polygone S_n . Sur l'arête P_{nm} , les conditions aux limites déjà données entraînent:

$$\begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix}_{(n)} = - \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ dc^1 & dc^2 \end{vmatrix}_{(m)}$$

de sorte que les relations (4) équivalent à dire que l'opérateur D est antihermitien.

On définit un réseau R à peu près homogène sur la sphère en discrétisant de façon identique chaque face P_n du polyèdre suivant un réseau régulier R_n , et en projetant l'ensemble sur la sphère. A cause des conditions aux limites, on aura à considérer les intersections des divers réseaux R_n , qui constituent des réseaux réguliers partiels R_{nm} sur les arêtes P_{nm} . Dans le cas de l'icosaèdre, le réseau résultant définit une troncature à peu près homogène (les distances entre points voisins ont une variation de l'ordre du dixième autour de leur valeur moyenne), et à peu près isotrope (la presque totalité des points

possède six voisins immédiats, à l'exception des sommets du polyèdre, qui n'en possède que cinq; on connaît les très bonnes propriétés d'isotropie des réseaux triangulaires réguliers). (figure 1)

FIGURE 1.

On se propose de définir des formes discrétisées des équations (1) possédant des propriétés de conservation analogues. La dérivée par rapport au temps ne sera pas discrétisée. La masse et l'énergie du système discret seront définies de la façon suivante.

$$E' = \frac{s}{2} \sum_R (\phi^2 + \phi V^2) gl$$

$$M' = s \sum_R gl$$

s étant l'aire de la maille des réseaux R_n , divisée par le nombre de sommets de la maille, et l le nombre de mailles par point sur le réseau R. Ce dernier est uniforme, sauf aux sommets du polyèdre. On introduit également le produit scalaire:

$$\langle X, X' \rangle = s \sum_R (V \cdot V' + \phi \phi') gl$$

les fonctions X, X' étant désormais discrètes. Il s'agit donc de définir une discrétisation D' de D, vérifiant la propriété:

$$(5) \quad \langle X, D'X \rangle = 0$$

Si l'on se place à l'intérieur d'une face P_n , on définit le produit scalaire partiel:

$$\langle X, X' \rangle_n = s \sum_{R_n} (V \cdot V' + \phi \phi') gl_n$$

où l_n est le nombre de mailles par point dans le réseau R_n . Il diffère de sa valeur normale l sur les frontières P_{nm} . On a dans ces conditions

$$\langle X, X' \rangle = \sum_n \langle X, X' \rangle_n$$

Pour assurer la propriété (5), il suffit de définir une discrétisation D'_n de D sur R_n , telle que l'on ait la relation (analogue à (4))

$$(6) \quad \langle X, D'_n X \rangle_n = \sum_m B_{nm} \left(g\phi, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}_{(n)} \right)$$

B_{nm} étant, pour les fonctions discrètes définies sur R_{nm} , une forme bilinéaire, telle que:

$$(7) \quad B_{nm} = B_{mn}$$

et c^1, c^2 les composantes d'une discrétisation de dc . L'opérateur D' est ensuite défini de la façon suivante:

(a) en dehors des réseaux R_{nm} , en prenant $D' = D'_n$.

(b) aux points des réseaux R_{nm} , en prenant D' égal à la moyenne des opérateurs D'_n , affectés des poids l_n , pour tous les réseaux R_n auxquels appartient le point.

Dans ces conditions, (6) et (7) entraînent bien la propriété (5).

Dans la mesure où toutes les arêtes jouent un rôle équivalent, il est naturel d'imposer aux B_{nm} d'être toutes égales à une forme bilinéaire unique B , condition qui entraîne (7). Il suffit pour cela que D'_n soit invariant dans les automorphismes (rotations et symétries propres) T_n de R_n .

$$(8) \quad T_n D'_n T_n^{-1} = D'_n$$

Dans la pratique, il suffit de partir d'un opérateur de dérivation discrétisé homogène et isotrope sur le réseau R_n étendu à l'infini, et de le fermer sur les frontières R_{nm} en faisant intervenir uniquement les points frontière: les conditions (6) et (8) seront automatiquement vérifiées, les équations discrétisées conserveront la masse et l'énergie. Le schéma le plus simple dans le cas du cube est basé sur l'opérateur centré à trois points, et l'on prend dans chaque face les vecteurs de base parallèles aux directions principales du réseau R_n . Dans le cas de l'icosaèdre, les directions principales de R_n sont dirigées suivant trois vecteurs unitaires $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, avec $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$. Le schéma le plus simple est obtenu en considérant les opérateurs centrés à trois points d_1, d_2, d_3 dans les trois directions $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, et en définissant l'opérateur de dérivation dans la direction $\vec{e}_i$ de la façon suivante:

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_i \cdot \vec{a}_j d_j$$

Les méthodes que nous avons développées ont pour défaut principal une perte de précision le long des frontières internes. Par exemple, les schémas centrés les plus simples, qui sont du second ordre en général, deviennent du premier ordre aux points des réseaux R_{nm} . On peut prévoir que ces erreurs de troncature isolées vont engendrer des perturbations des solutions à une échelle voisine de celle de la maille.

Ceci ne se produit pas dans le cas d'un écoulement purement rotationnel. En effet, la conservation simultanée des deux invariants quadratiques (énergie et enstrophie) empêche alors toute apparition artificielle d'énergie au voisinage de la troncature. Par conséquent, les solutions sont stables par rapport aux sources d'erreur sur les frontières. Au contraire, dans le cas d'un écoulement avec divergence, tel que celui décrit par les équations (1), il apparaît des perturbations à l'échelle de la grille, qui s'accumulent peu à peu.

Jour 0

FIGURE 2

Par exemple, on considère un écoulement à divergence faible, du type des ondes de ROSSBY, que l'on intègre numériquement sur un réseau cubique. Le champ initial du géopotentiel est représenté sur la figure 2., en projection sur une face du cube. Le champ initial des vitesses est déduit de ϕ par les deux conditions:

$$\text{div } V = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } V = 0$$

Après une intégration de 4 jours, utilisant le schéma le plus simple donné plus haut, les perturbations de petite échelle se sont accumulées. (figure 3). Elles finiront par affecter tout le spectre des mouvements au bout d'un temps plus ou moins long, par le jeu des interactions non linéaires.

Jour 4

FIGURE 3

Un moyen simple d'éliminer les perturbations dues aux frontières consiste à remarquer que les perturbations apparaissent par l'intermédiaire de la composante irrotationnelle du vent, la composante rotationnelle étant, comme on l'a dit, relativement stable. Le problème se ramène donc à un filtrage des ondes de gravité à l'échelle de la maille du réseau. Par exemple, on peut rajouter un terme dissipatif de la forme $\nu \text{grad div } \vec{V}$ au second membre de l'équation du mouvement. On peut voir sur la figure 4 le résultat d'une intégration numérique utilisant cette technique, où le bruit à petite échelle a totalement disparu.

Jour 4

FIGURE 4

III. CONCLUSION

La représentation polyédrale est à ce jour la seule tentative de représentation à peu près homogène et isotrope des écoulements sphériques. Toutefois, sous sa forme actuelle, la nécessité d'un filtrage de la divergence à petite échelle est un handicap assez lourd. Il y a, dans l'atmosphère réelle, des sources d'énergie dont l'impact sur la circulation générale se fait par l'intermédiaire d'une création locale de divergence. Physiquement, filtrer la divergence à l'échelle de la grille signifie donc une perte nette en résolution. Par ailleurs, la technique de filtrage donnée plus haut n'est pas suffisamment sélective dans le domaine spectral. Il reste à développer des méthodes , aux différences ou autres, plus précises sur les frontières.

REFERENCES

- ARAKAWA,A. "Computational design for long term numerical integration of the equations of fluid motion" Part I. J. Computational Physics, Vol.1, N°1, August 1966.
- ARAKAWA,A. "Parameterization of cumulus convection" University of California, Los Angeles, 1973.
- ANDRE,J.C., M. LESIEUR, A. POUQUET "High Reynolds number simulation of two-dimensional turbulence using a stochastic model" Observatoire de Nice, June 1973, en préparation pour publication.
- BASDEVANT,C. "Propriétés ergodiques des écoulements bidimensionnels inviscides tronqués, à divergence nulle" Laboratoire de Météorologie Dynamique, 1973.
- CHARNEY,J.G. "Geostrophic turbulence" Journal of Atmospheric Sciences, 28, September 1971, 1087-1095.
- ELIASSEN,E., B. MACHENHAUER and E. RASMUSSEN "On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields" Dept. of Meteorology, Copenhagen University, 1970.
- MOREL,P. and G. NECCO "Scale dependence of the 200 mb divergence inferred from EOLE data". Journal of Atmospheric Sciences, 30, N°5, July 1973, 909-921.
- FOX,D.G. and S.H. ORSZAG "Inviscid dynamics of two-dimensional turbulence" Physics of Fluids, Vol.16, n°2, February 1973.
- WIIN-NIELSEN,A. "On the annual variation and spectral distribution of atmospheric energy". Tellus n°19, 540-559, 1967.