

Sur les diagonales épaisses et leurs complémentaires

Faten Labassi

Received: 17 March 2013 / Accepted: 22 October 2013 / Published online: 27 November 2013
© Tbilisi Centre for Mathematical Sciences 2013

Abstract Etant donné un espace topologique X , on désigne par $D_d(X, n)$ le sous-espace de X^n formé des points de X^n dont au moins une coordonnée se répète d fois et par $F^{d+1}(X, n)$ son complémentaire dans X^n . On étudie dans ce travail quelques propriétés topologiques et combinatoires de ces espaces. Dans le cas $n < 2d$, on montre que l'espace $D_d(X, n)$ se scinde, après une seule suspension, en un bouquet de smash produits de X . Par ailleurs, l'étude de l'espace $D_2(S^n, 4)$ montre que la condition $n < 2d$ est nécessaire. Pour $n = d + 1$, on calcule la caractéristique d'Euler de $F^{n-1}(X, n)$ lorsque X est un complexe simplicial et on détermine son anneau de cohomologie $H^*(F^{n-1}(X, n))$ quand X est une variété fermée et orientée.

Keywords Configurations spaces · Stable splitting · Discretisation · Cohomology ring

1 Introduction

Soit X un espace topologique compact et connexe par arcs. Pour un couple d'entiers positifs (n, d) , $d \leq n$, on associe le sous-espace de X^n défini par:

$$D_d(X, n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_{i_1} = \dots = x_{i_d}\} \\ \text{pour le choix d'une suite } i_1 < i_2 < \dots < i_d\}$$

Communicated by Frederick Cohen.

F. Labassi (✉)
Faculté des sciences de Tunis, Tunis, Tunisie
e-mail: labassi.faten@hotmail.fr

qui est l'ensemble des n -uplets de X^n dont une composante se répète au moins d fois. L'espace

$$F^d(X, n) := X^n - D_{d+1}(X, n)$$

quant à lui est l'ensemble des n -uplets de X^n dont aucune composante ne se répète plus de d fois. En particulier, $F^1(X, n)$ est l'espace classique $F(X, n)$ des configurations des n -points deux à deux distincts [5]. On appellera $D_d(X, n)$ la d -ième diagonale épaisse dans X^n . Notons que les espaces $F^d(X, n)$ apparaissent pour une première fois dans [4] en relation avec une généralisation du Théorème de Borsuk-Ulam. Ils apparaissent également lorsque $X = \mathbb{R}^n$ dans le cadre de la théorie des arrangements d'hyperplans et de sous-espaces affines [2].

La première partie de ce travail concerne les espaces $D_d(X, n)$. Lorsque $n < 2d$, et qu'alors chaque élément (x_1, \dots, x_n) dans $D_d(X, n)$ admettra une seule coordonnée qui se répétera au moins d fois, on montre que ces espaces se scindent stablement dès la première suspension.

Théorème 1.1 *Si X est un espace connexe qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et si $n < 2d$ alors*

$$\Sigma D_d(X, n) \simeq \bigvee_{m=1}^{n-d} \left(\bigvee \Sigma X^{\wedge m} \right) \vee \bigvee \Sigma X^{\wedge n-d+1}$$

où $X^{\wedge m}$ est le smash produit de m copies de X et ΣX est la suspension réduite de X . En particulier, si b_i est le i -ième nombre de Betti sur un corps fixé, alors sous l'hypothèse $n < 2d$

$$b_i(D_d(X, n)) = \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} b_i(X^{n-d-k+1})$$

La même formule est valable pour la caractéristique d'Euler χ où il suffit de remplacer b_i par χ .

Notons que le calcul ci-haut des nombres de Betti retrouve dans un cas particulier les résultats de Brown et White [3] pour l'espace $D_2(X, 3)$.

Il est à noter que les résultats du Théorème 1.1 ne sont plus valables pour $2d \leq n$ comme on le verra dans la Sect. 3 avec l'exemple de $D_d(S^1, n)$ et dans la Sect. 4 avec le calcul de l'homologie de $D_2(S^m, 4)$ pour tout m (Théorème 4.1). Un fait nouveau est l'apparition de la torsion dans cette homologie alors même que $H_*(S^m)$ est sans torsion. L'étude des espaces, $D_d(X, n)$ pour $2d \leq n$ ainsi que les espaces non ordonnés correspondants, fera l'objet d'un travail ultérieur [8].

La deuxième partie de ce travail concerne les espaces $F^d(X, n)$. On étudiera particulièrement le cas $d = n - 1$ qui correspond au complémentaire de la diagonale dans X^n . Nous résumons les résultats des Sect. 6 et 7 dans le théorème suivant:

Theorem 1.2 (a) Soit X un complexe simplicial fini, T une triangulation de X , et χ la caractéristique d’Euler. Alors

$$\chi(F^{n-1}(X, n)) = \chi^n(X) - \sum_{i=0}^{dim(X)} (-1)^i \sum_{\sigma \in T, dim\sigma=i}^{dim(X)} (\chi_\sigma(X))^n$$

où pour $\sigma \in T$, $\chi_\sigma(X) = \sum_{i=dim\sigma}^{dim(X)} (-1)^i \Delta^i(\sigma)$ et $\Delta^i(\sigma)$ est le nombre des simplexes dans T de dimension i et ayant σ pour face.

(b) Soit M une variété orientée, fermée et \mathbb{F} un corps. Nous avons un isomorphisme d’algèbres

$$H^*(F^{n-1}(M, n); \mathbb{F}) \cong \frac{H^*(M^n; \mathbb{F})}{(\Delta)}$$

où (Δ) désigne l’idéal engendré par une classe “diagonale” explicite $\Delta \in H^{(n-1)d}(M^n; \mathbb{F})$.

La partie (a) du théorème est obtenue en construisant un rétracte simplicial de l’espace $F^{n-1}(X, n)$ et qui est l’analogue de la “discrétisation” utilisée dans la littérature pour le cas de l’espace de configuration $F(X, 2)$. D’ailleurs dans ce cas, le Théorème 1.2 (a) retrouve quelques calculs de Farber et Barnett dans [1]. De plus, le théorème donne pour une variété M compacte à bord de dimension m la formule

$$\chi(F^{n-1}(M, n)) = \chi^n(M) - (-1)^{mn} \chi(M) + (-1)^{mn} \chi(\partial M)$$

Ceci retrouve lorsque M est fermée un calcul donné dans [7] de $\chi(F^d(X, n))$ pour tout d . La partie (b), quant à elle, est une généralisation d’un théorème analogue qui apparaît dans [5] dans le cas $n = 2$.

REMERCIEMENTS. Je remercie mon directeur de thèse Sadok Kallel qui a encadré ce travail, ainsi que le referee pour ses suggestions et pour avoir corrigé la Proposition 5.4.

2 Scindement stable des espaces $D_d(X, n)$ pour $n < 2d$

Dans ce qui suit, on va montrer que si X est un espace connexe ayant le type d’homotopie d’un CW-complexe et si $n < 2d$, alors on a un scindement stable de $D_d(X, n)$ qui s’obtient dès la première suspension. On commencera par traiter le cas “plus simple” d’un groupe topologique, on prolongera ensuite le résultat obtenu pour les espaces connexes et ayant le type d’homotopie qu’un CW-complexe.

NOTATION: Pour alléger l’écriture, on écrira $X \simeq_s Y$ au lieu de $\Sigma X \simeq \Sigma Y$ et $\bigvee_{k=d}^n X_k$ pour le wedge $X_d \vee X_{d+1} \vee \dots \vee X_n$.

2.1 Cas d'un groupe topologique G

On va établir le Théorème 1.1 dans le cas d'un groupe topologique. Pour la démonstration, on introduit, pour un espace topologique pointé $(X, *)$, le "fat wedge"

$$W_d(X, n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_{i_1} = \dots = x_{i_d} = * \text{ pour le choix d'une suite } i_1 < \dots < i_d\}$$

Si X est connexe par arcs, cet espace ne dépend pas du point base, de plus on a

Lemme 2.1 *Si G est un groupe topologique connexe par arcs, et si $n < 2d$, alors les deux espaces $G \times W_d(G, n)$ et $D_d(G, n)$ sont homéomorphes.*

Preuve Puisque G est connexe par arcs, on peut supposer que le point base est l'élément neutre e de G . L'application qui à $(g, (g_1, \dots, g_n))$ associe (gg_1, \dots, gg_n) constitue un homéomorphisme de $G \times W_d(G, n)$ sur $D_d(G, n)$ lorsque $n < 2d$.

En plus de ce lemme, on aura besoin des résultats suivants qu'on peut retrouver dans [6].

- (i) Si X est un CW-complexe connexe et A un sous-complexe de X , et s'il existe une rétraction de X sur A , alors on a le scindement $\Sigma X \simeq \Sigma(X/A) \vee \Sigma A$.
- (ii) $\Sigma X^n \simeq \bigvee_{k=1}^n \bigvee \binom{n}{k} \Sigma X^{\wedge k}$, où $X^{\wedge k}$ est le smash produit de X avec lui-même k fois.
- (iii) Soit X et Y deux espaces pointés, désignons par $X \rtimes Y := \frac{X \times Y}{* \times Y}$ (le semi-smash de X et Y), alors $\Sigma(X \rtimes Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma(X \wedge Y)$.
- (iv) Soit X et Y deux espaces pointés et A un sous-espace de X contenant le point base, on a $\frac{X \times Y}{A \times Y} \simeq \frac{X/A \times Y}{* \times Y} = (X/A) \rtimes Y$. □

Proposition 2.2 *G un groupe topologique, alors*

$$\Sigma D_d(G, n) \simeq \bigvee_{m=1}^{n-d} \left(\bigvee \binom{n+1}{m} \Sigma G^{\wedge m} \right) \vee \bigvee \binom{n}{d} \Sigma G^{\wedge n-d+1}$$

Preuve On va commencer par montrer que

$$W_d(X, n) \simeq_s \bigvee_{m=1}^{n-d} \left(\bigvee \binom{n}{m} X^{\wedge m} \right) \tag{1}$$

qui est valable pour tous n et d et X connexe par arcs. Ce scindement ne devrait pas être nouveau mais nous en donnons une démonstration qui va reposer essentiellement sur des notations qui serviront aussi dans la suite. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_m([n])$ des parties de $\{1, \dots, n\}$ à m éléments qu'on écrira sous forme de mots et qu'on rangera dans une liste suivant l'ordre lexicographique ; e.g.

$$\mathcal{P}_3([5]) = [123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345]$$

Soit $\alpha \in \mathcal{P}_m([n])$, et posons

$$W_\alpha = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_i = * \text{ si } i \in \alpha\}$$

Aux éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ de $\mathcal{P}_d([n])$ ($q = \binom{n}{d}$) rangés par l'ordre lexicographique correspondent donc les espaces

$$W_{\alpha_r} = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_i = * \text{ si } i \in \alpha_r\}$$

Nous avons ainsi $W_{\alpha_r} \cong X^{n-d}$, $W_d(X, n) = \bigcup_{r=1}^q W_{\alpha_r}$ et, pour tout $\alpha \in \mathcal{P}_d([n])$, une rétraction

$$\tau_\alpha : W_d(X, n) \longrightarrow W_\alpha \tag{2}$$

qui consiste à envoyer un n -uplet (x_1, \dots, x_n) sur le uplet (y_1, \dots, y_n) où $y_i = x_i$ si $i \notin \alpha$ et $y_i = *$ si $i \in \alpha$. La propriété (i) ci-haut permet d'écrire

$$W_d(X, n) \simeq_s W_{\alpha_1} \vee \frac{W_d(X, n)}{W_{\alpha_1}}$$

Ensuite, la rétraction τ_{α_2} induit une rétraction

$$\frac{W_d(X, n)}{W_{\alpha_1}} \longrightarrow \frac{W_{\alpha_2}}{W_{\alpha_2} \cap W_{\alpha_1}}$$

et cela donne

$$W_d(X, n) \simeq_s W_{\alpha_1} \vee \frac{W_{\alpha_2}}{W_{\alpha_2} \cap W_{\alpha_1}} \vee \frac{W_d(X, n)}{W_{\alpha_1} \cup W_{\alpha_2}}$$

En itérant, on obtient

$$W_d(X, n) \simeq_s \bigvee_{r=1}^{\binom{n}{d}} \frac{W_{\alpha_r}}{W_{\alpha_r} \cap (\bigcup_{i < r} W_{\alpha_i})} \tag{3}$$

L'ordre lexicographique permet d'écrire

$$W_{\alpha_r} \cap (\bigcup_{i < r} W_{\alpha_i}) = \bigcup_{x \notin \alpha_r, x < \max(\alpha_r)} W_{\alpha_r \cup \{x\}}$$

En éliminant les $*$ superflus et en explicitant ces intersections, on voit que les différents espaces quotients $\frac{W_{\alpha_r}}{W_{\alpha_r} \cap (\bigcup_{i < r} W_{\alpha_i})}$ sont homéomorphes à des espaces de la forme $\frac{X^{n-d}}{Z_p}$ où $Z_p = \bigcup_{s=0}^{p-1} X^s \times * \times X^{n-d-1-s}$; l'indice p varie de 0 à $n - d$ et l'égalité (3)

implique que pour p fixé, chaque espace Z_p apparaît exactement $\binom{d+p-1}{p}$ fois. Notons que $\frac{X^{n-d}}{Z_0} \cong X^{n-d}$, $\frac{X^{n-d}}{Z_{n-d}} = X^{\wedge(n-d)}$ et qu'en général

$$\frac{X^{n-d}}{Z_p} \cong X^{\wedge p} \times X^{n-d-p}$$

Par exemple, pour $n = 7$ et $d = 4$, les trois premiers espaces W_i sont

$$W_1 = * \times * \times * \times * \times * \times X \times X \times X, \quad W_2 = * \times * \times * \times * \times X \times * \times X \times X, \\ W_3 = * \times * \times * \times * \times X \times X \times * \times X$$

et on a alors

$$\frac{W_3}{W_3 \cap (W_1 \cup W_2)} = \frac{X \times X \times X}{* \times X \times X \cup X \times * \times X} = \frac{(X \times X) \times X}{(* \times X \cup X \times *) \times X} = X^{\wedge 2} \times X$$

Le premier passage consiste à éliminer les $*$ superflus et à expliciter l'intersection dans le dénominateur. Le dernier passage utilise la propriété (iv).

La propriété (iii) permet d'écrire

$$W_d(X, n) \simeq_s X^{n-d} \vee \bigvee_{p=1}^{n-d} \binom{d+p-1}{p} \left(X^{\wedge p} \vee (X^{\wedge p} \wedge X^{n-d-p}) \right)$$

et en tenant compte des propriétés (ii) et (iii), on obtient

$$W_d(X, n) \simeq_s \bigvee_{p=0}^{n-d} \binom{d+p-1}{p} \bigvee_{k=0}^{n-d-p} \binom{n-d-p}{k} X^{\wedge p+k} \\ \simeq_s \bigvee_{p=0}^{n-d} \bigvee_{k=0}^{n-d-p} \binom{d+p-1}{p} \binom{n-d-p}{k} X^{\wedge p+k} \\ \simeq_s \bigvee_{m=0}^{n-d} \bigvee_{p=0}^m \binom{d+p-1}{p} \binom{n-d-p}{m-p} X^{\wedge m}$$

En utilisant l'identité combinatoire

$$\sum_{p=0}^m \binom{d+p-1}{p} \binom{n-d-p}{m-p} = \sum_{p=0}^{n-d} \binom{d+p-1}{p} \binom{n-d-p}{m-p} = \binom{n}{m}$$

on obtient le scindement (1). La proposition résulte maintenant de l'homéomorphisme $D_d(G, n) \cong G \times W_d(G, n)$ qui donne après une seule suspension que

$$D_d(G, n) \simeq_s G \vee W_d(G, n) \vee (G \wedge W_d(G, n))$$

□

2.2 Cas d'un CW-complexe connexe

Dans cette section, on étend le splitting précédent pour le cas d'un groupe à tout espace ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe X . Comme $D_d(X, n)$ ne dépend pas du type d'homotopie de X , on supposera donc partout que X est un CW-complexe pointé et connexe. Avec les mêmes notations qu'auparavant, pour $\alpha \in \mathcal{P}_m([n])$ l'ensemble des parties de m éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, on posera

$$X_\alpha = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_i = x_j \text{ si } i, j \in \alpha\} \tag{4}$$

et si $A \subset \mathcal{P}_m([n])$, on posera $X_A := \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$. On peut alors écrire

$$D_d(X, n) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_d([n])} X_\alpha = X_{\mathcal{P}_d([n])}$$

Sous l'hypothèse $n < 2d$ nous avons des rétractions de X_A sur $X_A \cap X_\beta$ pour $A \subset \mathcal{P}_d([n])$ et $\beta \in \mathcal{P}_d([n])$. En effet, un uplet (x_1, \dots, x_n) dans X_A contient un unique élément x qui se répète au moins d fois, et la rétraction est celle qui change en x tous les x_i tels que $i \in \beta$. Ceci nous permet donc d'écrire comme pour (3)

$$D_d(X, n) \simeq_s \bigvee_{r=1}^{\binom{n}{d}} \frac{X_{\alpha_r}}{X_{\alpha_r} \cap (\bigcup_{i < r} X_{\alpha_i})} \tag{5}$$

où les $\binom{n}{d}$ éléments α_r de $\mathcal{P}_d([n])$ sont ordonnés par l'ordre lexicographique.

On va montrer, dans ce qui suit, que ce scindement stable est un scindement en terme de smash produits de X . Pour cela, on aura besoin de deux lemmes intermédiaires.

Soit m un entier, $X_i = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m ; x_i = x_1\}$ et $D = \{X_i, 2 \leq i \leq m\}$. Alors on a

Lemme 2.3 *Si $A_1, \dots, A_p \in D$ alors*

$$\bigcup_{i=1}^p A_i \vee \frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^p A_i} \simeq_s X^m$$

Preuve On a des rétractions r_k de $\bigcup_{i=1}^p A_i$ sur $A_k = X_j$ qui consistent à remplacer la j -ième coordonnée d'un point $x = (x_1, \dots, x_m)$ par x_1 et comme $r(A_i) = A_i \cap A_k$, on peut alors écrire

$$\bigcup_{i=1}^p A_i \simeq_s A_1 \vee \frac{A_2}{A_1 \cap A_2} \vee \dots \vee \frac{A_p}{(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p}$$

et il en résulte que l'on a aussi

$$\bigcup_{i=1}^p A_i \simeq_s \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i \right) \vee \frac{A_p}{(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p}$$

Puisque $\frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^p A_i} \cong \frac{\frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i}}{\frac{A_p}{(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p}}$ et que $\frac{A_p}{(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p}$ est un rétracte de $\frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i}$ alors

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) \vee \frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^p A_i} &\simeq_s \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i \right) \vee \frac{A_p}{(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p} \vee \frac{\frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i}}{\frac{A_p}{(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i) \cap A_p}} \\ &\simeq_s \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i \right) \vee \frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^{p-1} A_i} \end{aligned}$$

et il suffit d'itérer ce processus pour obtenir le résultat. □

Lemme 2.4 Pour tous entiers $1 \leq p \leq m$

$$X^m \vee \frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^p A_i} \simeq_s X^m \vee \{X^{\wedge p} \vee (X^{\wedge p} \wedge X^{m-p})\}$$

Preuve On va démontrer ce lemme par récurrence sur p pour tout entier m . Pour $p = 1$: Puisque $X^m \simeq_s X^{m-1} \vee X \vee (X \wedge X^{m-1})$ et que l'espace A_1 , qui est homéomorphe à X^{m-1} , est un rétracte de X^m , alors

$$X^m \vee \frac{X^m}{A_1} \simeq_s X^m \vee X \vee (X \wedge X^{m-1})$$

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre p pour tout entier m . D'une part, puisque

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \simeq_s A_1 \vee \frac{A_2}{A_1 \cap A_2} \vee \dots \vee \frac{A_{p+1}}{\bigcup_{i=1}^p A_i \cap A_{p+1}}$$

et que chacun des A_i est homéomorphe à X^{m-1} , alors l'hypothèse de récurrence appliquée à chacun des termes du second membre donne

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \simeq_s \bigvee_{k=1}^p \{X^{\wedge k} \vee (X^{\wedge k} \wedge X^{m-1-k})\} \vee X^{m-1}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned} X^m &\simeq_s X^{m-1} \vee \{X \vee (X \wedge X^{m-1})\} \\ &\simeq_s X^{m-1} \vee X \vee (X \wedge (X \vee X^{m-2} \vee (X \wedge X^{m-2}))) \\ &\simeq_s \{X \vee (X \wedge X^{m-2})\} \vee X^{m-1} \vee \{X^{\wedge 2} \vee (X^{\wedge 2} \wedge X^{m-2})\} \end{aligned}$$

En développant de même les derniers termes $X^{\wedge k} \wedge X^{m-k}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} X^m &\simeq_s \bigvee_{k=1}^p \{X^{\wedge k} \vee (X^{\wedge k} \wedge X^{m-1-k})\} \vee X^{m-1} \vee \{X^{\wedge p+1} \vee (X^{\wedge p+1} \wedge X^{m-(p+1)})\} \\ &\simeq_s \left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \right) \vee \{X^{\wedge p+1} \vee (X^{\wedge p+1} \wedge X^{m-(p+1)})\} \end{aligned}$$

Maintenant, le lemme précédent implique que

$$X^m \vee \frac{X^m}{\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right)} \simeq_s X^m \vee X^{\wedge p+1} \vee \{(X^{\wedge p+1} \wedge X^{m-(p+1)})\}$$

□

Théorème 2.5 *Soit X un CW-complexe connexe et $n < 2d$. Alors*

$$D_d(X, n) \simeq_s \bigvee_{m=1}^{n-d} \left(\bigvee X^{\wedge m} \right) \vee \bigvee X^{\wedge n-d+1}$$

Preuve On rappelle que

$$D_d(X, n) \simeq_s X^{n-d+1} \vee \bigvee_{r=2}^d \frac{X_{\alpha_r}}{X_{\alpha_r} \cap \left(\bigcup_{i < r} X_{\alpha_i}\right)}$$

L'ordre lexicographique donne l'égalité

$$X_{\alpha_r} \cap \left(\bigcup_{i < r} X_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{x \notin \alpha_r, x < \max(\alpha_r)} X_{\alpha_r} \cup \{x\}$$

ce qui implique que les différents espaces quotients $\frac{X_{\alpha_r}}{X_{\alpha_r} \cap \left(\bigcup_{i < r} X_{\alpha_i}\right)}$ sont homéomorphes à des espaces de la forme $\frac{X^m}{\bigcup_{i=1}^p A_i}$, où $m = n - d + 1$ et $A_i \in D$ (notation du Lemme

2.3). Le lemme précédent appliqué aux espaces $X_{\alpha_r}/X_{\alpha_r} \cap (\bigcup_{i < r} X_{\alpha_i})$ implique que l'on a un scindement stable de la forme

$$D_d(X, n) \simeq_s \bigvee_{i=1}^{n-d+1} \bigvee^{a_i} X^{\wedge i}$$

Puisque les coefficients a_i ne dépendent pas de l'espace X , alors ils coïncident avec les coefficients calculés dans le cas d'un groupe topologique. \square

Corollaire 2.6 *Dans le cas $n < 2d$ on a*

$$b_i(D_d(X, n)) = \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} b_i(X^{n-d-k+1})$$

Preuve Le Théorème 2.5 donne que

$$b_i(D_d(X, n)) = \sum_{m=1}^{n-d} \binom{n+1}{m} b_i(X^{\wedge m}) + \binom{n}{d} b_i(X^{\wedge n-d+1})$$

et le corollaire est une conséquence de l'identité

$$\binom{n+1}{m} = \sum_{k=0}^{n-d-m+1} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} \binom{n-d-k+1}{m}$$

qui implique que

$$\begin{aligned} b_i(D_d(X, n)) &= \sum_{m=1}^{n-d+1} \sum_{k=0}^{n-d-m+1} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} \binom{n-d-k+1}{m} b_i(X^{\wedge m}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} \sum_{m=1}^{n-d-k+1} \binom{n-d-k+1}{r} b_i(X^{\wedge m}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} b_i(X^{n-d-k+1}) \end{aligned}$$

\square

Conséquences

1. La formule du Corollaire 2.6 a été initialement découverte indépendamment du Théorème 2.5 à partir de calculs à l'aide de la suite de Mayer-Viétoris et une formule de crible [9].

2. Pour le cas de $d = n - 1$, on trouve

$$b_i(D_{n-1}(X, n)) = nb_i(X^2) - (n - 1)b_i(X) ; n \geq 3$$

qui est lui-même une généralisation d'un calcul de Brown et White [2] pour les $b_i(D_2(X, 3))$.

3. Pour X connexe par arcs, l'espace $D_d(X, n)$ l'est aussi et on obtient l'identité combinatoire

$$\sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n}{d-k} \binom{d+k-1}{k} = 1 = b_0(D_d(X, n))$$

4. La caractéristique d'Euler des espaces $D_d(X, n)$, pour $n < 2d$ est donnée par

$$\chi(D_d(X, n)) = \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n}{d+k} \binom{d+k-1}{k} \chi(X)^{n-d-k+1}$$

5. Le résultat du corollaire précédent s'écrit aussi

$$b_i(D_d(X, n)) = \frac{n!}{(d-1)!(n-d)!} \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n-d}{k} \frac{1}{d+k} b_i(X^{n-d-k+1})$$

Considérons le polynôme $P_{n,d}$ défini par

$$\begin{aligned} P_{n,d}(x) &= \frac{n!}{(d-1)!(n-d)!} \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \binom{n-d}{k} \frac{x^{n-d-k+1}}{d+k} \\ &= \frac{n!}{(d-1)!(n-d)!} \int_0^{1/x} u^{d-1} (1-u)^{n-d} du x^{n+1} \end{aligned}$$

Si $P_X(t)$ désigne le polynôme de Poincaré de l'espace X , alors celui de l'espace $D_d(X, n)$ est donné par

$$P_{D_d(X,n)}(t) = P_{n,d}(P_X(t))$$

3 Un Complexe pour $D_d(S^1, n)$

On va montrer dans ce paragraphe que les résultats précédents peuvent tomber en défaut si la condition $n < 2d$ n'est pas remplie. La Proposition 2.2 donne pour le groupe $G = S^1, n \geq 5$ et $d = n - 2$

$$\Sigma D_{n-2}(S^1, n) \simeq \bigvee^{n+1} S^2 \vee \bigvee^{\binom{n+1}{2}} S^3 \vee \bigvee^{\binom{n}{2}} S^4$$

Il en résulte que

$$\tilde{H}_*(D_{n-2}(S^1, n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} & * = 3 \\ \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{2}} & * = 2 \\ \mathbb{Z}^{n+1} & * = 1 \end{cases} \tag{6}$$

On va expliciter une structure de CW-complexe pour $D_d(S^1, n)$ qui permettra de calculer l’homologie de $D_2(S^1, 4)$ laquelle prouvera que les résultats précédents ne sont plus vrais pour $2d = n$.

Le cube $I^n = [0, 1]^n$ admet une décomposition simpliciale indexée par le groupe symétrique \mathfrak{S}_n : à chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ correspond le simplexe

$$\sigma_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = \{0 \leq t_{\sigma(1)} \leq \dots \leq t_{\sigma(n)} \leq 1\}$$

ainsi que tous ces sous-simplexes. Ici $t_{\sigma(i)}$ appartient à la $\sigma(i)$ -ème copie de I dans I^n . Par exemple à la permutation identité 123 correspond la 3-cellule de $I^3 = [0, 1]^3$:

$$\sigma_{1,2,3} = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq 1\}$$

Le bord de cette cellule est formé des quatre 2-cellules

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3}^0 &= \{0 = t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq 1\}, \quad \sigma_{12,3} = \{0 \leq t_1 = t_2 \leq t_3 \leq 1\} \\ \sigma_{1,23} &= \{0 \leq t_1 \leq t_2 = t_3 \leq 1\}, \quad \sigma_{2,3}^1 = \{0 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_1 = 1\} \end{aligned}$$

Cela donne un complexe et en identifiant 0 et 1, on obtient une structure de Δ -complexe sur $(S^1)^n$ (terminologie adoptée par [6]) et donc la structure d’un CW-complexe. L’avantage de cette structure est qu’elle se restreint à $D_d(S^1, n)$ qui devient un sous-complexe de $(S^1)^n$. Les cellules de $D_d(S^1, n)$ sont les simplexes de la forme

$$\{0 \leq t_{\sigma(1)} \leq \dots \leq t_{\sigma(n)} \leq 1\}$$

avec $t_{\sigma(i_1)} = t_{\sigma(i_2)} = \dots = t_{\sigma(i_d)}$ pour un certain choix de $\{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, n\}$, sans oublier les identifications provenant de $0 \sim 1$. L’opérateur de bord dans ce sous-complexe est bien sûr l’opérateur de bord du complexe I^n avec les identifications $\sigma_{\bullet}^0 = \sigma_{\bullet}^1 =: \sigma_{\bullet}$. Par exemple

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_{1,2,3}) &= \sigma_{2,3}^0 - \sigma_{12,3} + \sigma_{1,23} - \sigma_{1,2}^1 \\ &= \sigma_{2,3} - \sigma_{12,3} + \sigma_{1,23} - \sigma_{1,2} \end{aligned}$$

On renvoie vers [9] pour quelques calculs explicites dans ce complexe. En particulier on obtient

Proposition 3.1 *L'homologie de $D_2(S^1, 4)$ est donnée par*

$$\tilde{H}_*(D_2(S^1, 4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}^8 & * = 3 \\ \mathbb{Z}^{11} & * = 2 \\ \mathbb{Z}^4 & * = 1 \end{cases}$$

Preuve Dans le cas de $D_2(S^1, 4)$, la décomposition cellulaire décrite plus haut possède une 0-cellule, 15 une-cellules, 50 deux-cellules, 36 trois-cellules et aucune 4-cellule. Le calcul homologique est obtenu grâce à Maple et nous omettons le détail. \square

Dans la section suivante, nous étendons le calcul précédent à toutes les sphères.

4 Homologie de l'espace $D_2(S^m, 4)$

Le Théorème 2.5 implique que lorsque $n < 2d$, l'espace $D_d(X, n)$ a de la torsion dans son homologie si et seulement si $H_*(X)$ admet de la torsion. Dans cette section, on montre que cette propriété n'est plus vraie lorsque $n = 2d$ en calculant l'homologie de l'espace $D_2(S^m, 4)$ qui, quand m est pair, fait apparaître de la torsion. En effet, on a

Théorème 4.1 *Les groupes d'homologie non nuls de l'espace $D_2(S^m, 4)$, à coefficients entiers, sont donnés par:*

$$\tilde{H}_*(D_2(S^m, 4)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^6 & * = 3m \\ \mathbb{Z}^2 & * = 2m + 1 \\ \mathbb{Z}^9 & * = 2m \\ \mathbb{Z}^2 & * = m + 1 \\ \mathbb{Z}^4 & * = m \end{cases}, \quad m \text{ impair}, m > 1$$

$$\tilde{H}_*(D_2(S^m, 4)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^6 & * = 3m \\ \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & * = 2m \\ \mathbb{Z}^2 & * = m + 1 \\ \mathbb{Z}^4 & * = m \end{cases}, \quad m \text{ pair}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur la décomposition de $D_2(S^m, 4)$ en tant que pushout des deux espaces

$$A = \{(x, x, y, z), (x, y, x, z), (x, y, z, x) ; x, y, z \in S^m\}$$

$$B = \{(x, y, z, z), (x, y, z, y), (x, y, y, z) ; x, y, z \in S^m\}$$

dont l'intersection est

$$A \cap B = \{(x, y, x, x), (x, x, y, x), (x, x, x, y), (x, x, y, y), (x, y, x, y), (x, y, y, x), x, y \in S^m\}$$

La suite exacte de Mayer-Viétoris associée à cette réunion va permettre de calculer l’homologie de l’espace $D_2(S^m, 4)$: En effet, en utilisant aussi des suites exactes courtes de Mayer-Viétoris, on montre que l’homologie de $A \cap B$ est concentrée en degrés m et $2m$ et celles de A et B en degrés $m, 2m$ et $3m$, et cela implique que la suite exacte de Mayer-Viétoris de la paire (A, B) se scinde en suites exactes courtes de la forme

$$0 \longrightarrow H_{3m}(A) \oplus H_{3m}(B) \longrightarrow H_{3m}(A \cup B) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

$$0 \longrightarrow H_{*+1}(A \cup B) \longrightarrow H_*(A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_*(A) \oplus H_*(B) \longrightarrow H_*(A \cup B) \longrightarrow 0 \tag{8}$$

pour $* = m$ et $2m$. Les groupes $H_*(A \cap B), H_*(A)$ et $H_*(B)$ étant des \mathbb{Z} -modules libres (comme on le verra plus bas), la preuve du Théorème 4.1 se ramènera alors à déterminer des bases respectives, à écrire des matrices des applications i_m et i_{2m} et à déterminer les noyaux et conoyaux.

Notations

- Soit S la classe fondamentale dans $H_m(S^m)$ et x_0 un point fixé dans S^m . A toute partie $\alpha \subset \{1, 2, 3, 4\}$ correspond l’application

$$f_\alpha : S^m \longrightarrow (S^m)^4 ; x \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

avec $x_i = x$ si $i \in \alpha$ et x_0 sinon. On posera alors $\Delta_\alpha = f_{\alpha*}(S)$.

- Si l’image de f_α est contenue dans $X \subset (S^m)^4$ alors on notera $[\Delta_\alpha]_X$ l’image de $f_{\alpha*}(S)$ dans $H_n(X)$ et on omettra cette notation dès qu’il n’y a pas de risque de confusion.

Lemme 4.2 *Des bases des \mathbb{Z} -modules $H_m(A), H_m(B)$ et $H_m(A \cap B)$ sont respectivement*

- (a) *les classes $[\Delta_{12}]_A, [\Delta_2]_A, [\Delta_3]_A, [\Delta_4]_A$.*
- (b) *les classes $[\Delta_1]_B, [\Delta_2]_B, [\Delta_3]_B, [\Delta_4]_B, [\Delta_{23}]_B$.*
- (c) *les classes $[\Delta_{123}]_{A \cap B}, [\Delta_2]_{A \cap B}, [\Delta_3]_{A \cap B}, [\Delta_4]_{A \cap B}, [\Delta_{12}]_{A \cap B}, [\Delta_{13}]_{A \cap B}$ et $[\Delta_{14}]_{A \cap B}$.*

Preuve (a) Soit $A_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (S^m)^4 ; x_i = x_1\}$ de sorte que $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Chacun de ces espaces est une copie de $(S^m)^3$. Nous avons une rétraction de A_2 sur $A_2 \cap A_3$ qui envoie $(x, x, y, z) \mapsto (x, x, x, z)$, et une autre similaire de $A_2 \cup A_3$ sur $A_4 \cap (A_2 \cup A_3)$ lesquelles donnent les suites exactes courtes de Mayer-Viétoris

$$0 \longrightarrow H_m((A_2 \cup A_3) \cap A_4) \longrightarrow H_m(A_2 \cup A_3) \oplus H_m(A_4) \longrightarrow H_m(A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_m(A_2 \cap A_3) \longrightarrow H_m(A_2) \oplus H_m(A_3) \xrightarrow{j_n} H_m(A_2 \cup A_3) \longrightarrow 0$$

Le noyau de l’application j_n de la deuxième suite exacte est donné par

$$\ker(j_n) = \mathbb{Z}([\Delta_{123}]_{A_2}, -[\Delta_{123}]_{A_3}) \oplus \mathbb{Z}([\Delta_4]_{A_2}, -[\Delta_4]_{A_3})$$

et les égalités

$$[\Delta_{123}]_{A_2} = [\Delta_{12}]_{A_2} + [\Delta_3]_{A_2}, \quad [\Delta_{123}]_{A_3} = [\Delta_{13}]_{A_3} + [\Delta_2]_{A_3}$$

impliquent que $H_m(A_2 \cup A_3) = \mathbb{Z}[\Delta_{12}]_{A_2 \cup A_3} \oplus \mathbb{Z}[\Delta_2]_{A_2 \cup A_3} \oplus \mathbb{Z}[\Delta_3]_{A_2 \cup A_3} \oplus \mathbb{Z}[\Delta_4]_{A_2 \cup A_3}$. L'assertion (a) résulte maintenant de la première suite exacte et des égalités

$$\begin{aligned} [\Delta_{124}]_A &= [\Delta_{12}]_A + [\Delta_4]_A = [\Delta_{14}]_A + [\Delta_2]_A, \\ [\Delta_{134}]_A &= [\Delta_{13}]_A + [\Delta_4]_A = [\Delta_{14}]_A + [\Delta_3]_A \end{aligned}$$

Les assertions (b) et (c) reposent sur des arguments similaires. □

En suivant les étapes de la preuve du lemme précédent, on montre que

Lemme 4.3 *Des bases des \mathbb{Z} -modules $H_{2m}(A)$, $H_{2m}(B)$, $H_{2m}(A \cap B)$ sont respectivement*

- (a) $\Delta_2 \times \Delta_3, \Delta_2 \times \Delta_4, \Delta_3 \times \Delta_4, \Delta_{12} \times \Delta_3, \Delta_{12} \times \Delta_4$ et $\Delta_{13} \times \Delta_2$.
- (b) $\Delta_1 \times \Delta_{23}, \Delta_1 \times \Delta_4, \Delta_{23} \times \Delta_4, \Delta_1 \times \Delta_3, \Delta_{24} \times \Delta_3, \Delta_1 \times \Delta_2$ et $\Delta_2 \times \Delta_{34}$.
- (c) $\Delta_{123} \times \Delta_4, \Delta_{124} \times \Delta_3, \Delta_{134} \times \Delta_2, \Delta_{12} \times \Delta_{34}, \Delta_{13} \times \Delta_{24}, \Delta_{14} \times \Delta_{23}$.

Preuve du Théorème 4.1 La matrice de l'homomorphisme $i_m : H_m(A \cap B) \longrightarrow H_m(A) \oplus H_m(B)$ dans les bases de $H_m(A \cap B)$, $H_m(A)$ et $H_m(B)$ (Lemme 4.2) est donnée par

Δ_{123}	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_{12}	Δ_{13}	Δ_{14}	
1	0	0	0	1	1	1	Δ_{12}
0	1	0	0	0	-1	-1	Δ_2
1	0	1	0	0	1	0	Δ_3
0	0	0	1	0	0	1	Δ_4
-1	0	0	0	-1	-1	-1	Δ_1
0	-1	0	0	-1	0	0	Δ_2
0	0	-1	0	0	-1	0	Δ_3
0	0	0	-1	0	0	-1	Δ_4
-1	0	0	0	0	0	0	Δ_{23}

et la matrice de l'application $i_{2m} : H_{2m}(A \cap B) \longrightarrow H_{2m}(A) \oplus H_{2m}(B)$ dans les bases de $H_{2m}(A)$, $H_{2m}(B)$ et $H_{2m}(A \cap B)$ (Lemme 4.3) est donnée par

On va se contenter de justifier l'écriture de $[\Delta_{14}]_{A \cap B} \times [\Delta_{23}]_{A \cap B}$ dans $H_{2m}(A)$. On a

$\Delta_{123} \times \Delta_4$	$\Delta_{124} \times \Delta_3$	$\Delta_{134} \times \Delta_2$	$\Delta_{12} \times \Delta_{34}$	$\Delta_{13} \times \Delta_{24}$	$\Delta_{14} \times \Delta_{23}$	
0	0	0	0	0	$-(1 + (-1)^m)$	$\Delta_2 \times \Delta_3$
0	0	$(-1)^m$	0	-1	$(-1)^m$	$\Delta_2 \times \Delta_4$
1	$(-1)^m$	0	0	1	$(-1)^m$	$\Delta_3 \times \Delta_4$
0	1	0	1	0	1	$\Delta_{12} \times \Delta_3$
1	0	0	1	1	0	$\Delta_{12} \times \Delta_4$
0	0	1	0	1	1	$\Delta_{13} \times \Delta_2$
0	0	0	0	0	0	$\Delta_1 \times \Delta_{23}$
-1	0	0	-1	-1	0	$\Delta_1 \times \Delta_4$
-1	0	0	0	0	$-(-1)^m$	$\Delta_{23} \times \Delta_4$
0	-1	0	-1	0	-1	$\Delta_1 \times \Delta_3$
0	-1	0	0	$-(-1)^m$	0	$\Delta_{24} \times \Delta_3$
0	0	-1	0	-1	-1	$\Delta_1 \times \Delta_2$
0	0	$-(-1)^m$	-1	0	0	$\Delta_2 \times \Delta_{34}$

$$[\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A = a.[\Delta_2]_A \times [\Delta_3]_A + b.[\Delta_2]_A \times [\Delta_4]_A + c.[\Delta_3]_A \times [\Delta_4]_A + d.[\Delta_{12}]_A \times [\Delta_3]_A + e.[\Delta_{12}]_A \times [\Delta_4]_A + f.[\Delta_{13}]_A \times [\Delta_2]_A$$

et pour déterminer les différents coefficients, on peut utiliser les projections $p_i : (S^m)^4 \rightarrow S^m$ sur le i -ème facteur. Elles donnent les égalités

- $0 = (p_1 \times p_4)_*([\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A) = e.S \times S,$
- $(-1)^m.S \times S = (p_2 \times p_4)_*([\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A) = b.S \times S + e.S \times S,$
- $(-1)^m.S \times S = (p_3 \times p_4)_*([\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A) = c.S \times S,$
- $S \times S = (p_1 \times p_3)_*([\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A) = d.S \times S,$
- $S \times S = (p_1 \times p_2)_*([\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A) = f.S \times S,$
- $0 = (p_2 \times p_3)_*([\Delta_{14}]_A \times [\Delta_{23}]_A) = a.S \times S + d.S \times S + (-1)^m f.S \times S$

qui donnent que $e = 0, b = (-1)^m, c = (-1)^m, d = 1, f = 1$ et $a = -(1 + (-1)^m)$. Pour obtenir le théorème, il ne reste qu'à écrire les matrices des homomorphismes i_m et i_{2m} sous forme échelonnée et à déterminer les conoyaux. □

Lorsque $m = 1$, le calcul avec la suite de Mayer-Vietoris comme ci-haut retrouve l'expression de $\tilde{H}_*(D_2(S^1, 4))$ dans la Proposition 3.1. Comme le montre cette section, l'homologie de $D_d(X, n)$ dans le cas général dépend d'autre chose que de l'homologie de X . Cet aspect sera développé dans [8].

5 Les Espaces $F^d(X, n)$

On rappelle que, pour un espace topologique $X, F^d(X, n) = X^n - D_{d+1}(X, n) :$

$$F^d(X, n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \text{ tel qu'au plus } d \text{ composantes sont égales}\}$$

Exemple 5.1 Si X est l'espace euclidien \mathbb{R}^m , alors $F^{n-1}(\mathbb{R}^m, n)$ est le complémentaire dans \mathbb{R}^{mn} d'un espace de dimension m et donc $F^{n-1}(\mathbb{R}^m, n) \simeq S^{m(n-1)-1}$. Plus généralement, $F^d(\mathbb{R}^m, n)$ est un complémentaire d'un arrangement de sous-espaces et son homologie se calcule grâce à une formule de décomposition due à Goresky-MacPherson [2].

Un autre exemple est donné par la proposition suivante

Proposition 5.2 *Il existe une équivalence d'homotopie*

$$F^2(S^m, 3) \simeq F(\mathbb{R}^{m+1}, 3)$$

Preuve On rappelle le résultat de Fadell et Neuwirth qui dit que lorsque M est une variété sans bord, alors les différentes projections $F(M, n) \rightarrow M$ possèdent la structure d'un fibré. Leur résultat se prolonge aux espaces $F^d(M, n)$: les différentes projections $F^d(M, n) \rightarrow M$ sont des fibrés. Soit Q_2 un ensemble à deux points dans \mathbb{R}^{m+1} ; on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{m+1} - Q_2 & \longrightarrow & S^m \times S^m - pt \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(\mathbb{R}^{m+1}, 3) & \xrightarrow{f} & F^2(S^m, 3) \\
 \downarrow p_{12} & & \downarrow p_1 \\
 F(\mathbb{R}^{m+1}, 2) & \xrightarrow{g} & S^m
 \end{array}$$

où les espaces du haut sont les fibres respectives des applications p_{12} et p_1 définies par $p_{12}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ et $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$. Les flèches f et g sont définies par :

$$g(a, b) = \frac{a - b}{\|a - b\|}, \quad f(a, b, c) = (g(a, b), g(b, c), g(c, a))$$

Notons que la flèche f est bien définie, c'est-à-dire qu'elle arrive bien dans $F^2(S^m, 3)$, puisqu'on ne peut pas avoir $g(a, b) = g(b, c) = g(c, a)$ (une telle égalité impliquerait que les points a, b et c sont alignés et cela impliquerait à son tour que les vecteurs $a - b, b - c, c - a$ ne peuvent pas avoir le même sens, ce qui est une contradiction). Finalement, puisque l'application g est une équivalence d'homotopie, et que l'application entre les fibres (celle du haut) est également une équivalence entre deux wedges de sphères, alors la flèche du milieu f est aussi une équivalence d'homotopie. □

5.1 Le cas d'une variété

Soit M une variété fermée et orientée et de dimension m . Grâce à la dualité de Lefschetz-Poincaré, on peut lier l'espace $F^d(M, n)$ à son complémentaire $D_{d+1}(M, n)$ dans M^n . En effet, la paire $(M^n, D_{d+1}(M, n))$ est une m -variété homologique relative et orientable [11]. La dualité de Lefschetz donne donc

$$H^k(M^n, D_{d+1}(M, n)) = H_{mn-k}(M^n - D_{d+1}(M^n)) = H_{mn-k}(F^d(M, n))$$

et par conséquent

$$b_{mn-k}(F^d(M, n)) = b_k(M^n, D_{d+1}(M, n)) \tag{9}$$

On va donc, dans ce qui suit, expliciter une façon de calculer les nombres de Betti $b_k(X^n, D_d(X, n))$, pour X un espace simplicial fini et sur un corps quelconque, en se basant sur des arguments de suites exactes comme dans [3]. On appliquera ensuite le résultat trouvé aux sphères. Pour ce faire, on adoptera quelques notations supplémentaires : Soit $\alpha \in \mathcal{P}_d([n])$ et X_α comme défini dans (4); on désignera par h^α l'homéomorphisme naturel de X_α sur X^{n-d+1} , i_α l'inclusion de X_α dans X^n et $f^\alpha = i_\alpha \circ (h^\alpha)^{-1} : X^{n-d+1} \rightarrow X^n$. Posons finalement

$$\sigma_* = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_d} f_*^\alpha : \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_d} H_*(X^{n-d+1}) \rightarrow H_*(X^n)$$

Lemme 5.3 *Soit X un espace simplicial fini, et $R(\sigma_*)$ le rang de l'application σ_* . Si $n < 2d$, on a*

$$b_*(X^n, D_d(X, n)) = b_*(X^n) - R(\sigma_*) + b_{*-1}(D_d(X, n)) - R(\sigma_{*-1})$$

Preuve Soit α un élément de l'ensemble totalement ordonné $\mathcal{P}_d([n])$, on posera

$$X_{\leq \alpha} = \bigcup_{\beta \leq \alpha} X_\beta$$

et on désignera par $\alpha+$ le successeur de α quand il existe.

On rappelle que, lorsque $n < 2d$, on a des rétractions de $X_{\leq \alpha}$ sur $X_{\leq \alpha} \cap X_{\alpha+}$, et qui impliquent qu'on a des suites exactes de Mayer-Viétoris courtes

$$0 \rightarrow H_*(X_{\leq \alpha} \cap X_{\alpha+}) \xrightarrow{i_*^\alpha} H_*(X_{\leq \alpha}) \oplus H_*(X_{\alpha+}) \xrightarrow{j_*^\alpha} H_*(X_{\leq \alpha+}) \rightarrow 0$$

Les homomorphismes j_*^α permettent de définir des homomorphismes J_*^α surjectifs comme les j_α^*

$$J_*^\alpha : H_*(X_{\leq \alpha}) \oplus H_*(X_{\alpha+}) \oplus_{\beta > \alpha+} H_*(X_\beta) \rightarrow H_*(X_{\leq \alpha+}) \oplus_{\beta > \alpha+} H_*(X_\beta)$$

qui à (u, v, w) associe $(j_*^\alpha(u, v), w)$. Considérons le diagramme

$$\begin{CD} \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}_d} H_*(X_\alpha) @>H>> H_*(X^{n-d+1})^{\oplus m} \\ @VJVV @VV\sigma_*V \\ H_*(F_d(X, n)) @>i_*>> H_*(X^n) \end{CD}$$

où $m = \binom{n}{d}$, $J = J_*^{\alpha_{m-1}} \circ \dots \circ J_*^{\alpha_1}$ et $H = h_*^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus h_*^{\alpha_m}$. C'est un diagramme commutatif dans lequel l'application J est surjective (car les J_*^α le sont) et H est un isomorphisme de sorte que $Im(i_*) = Im(\sigma_*)$. La suite exacte de la paire $(X^n, D_d(X, n))$ fournit la suite exacte courte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \frac{H_*(X^n)}{Im(i_*)} \xrightarrow{j_*} H_*(X^n, D_d(X, n)) \xrightarrow{\partial_*} Im(\partial_*) \longrightarrow 0$$

qui implique que $\dim H_*(X^n, D_d(X, n)) = \dim H_*(X^n) - \dim Im(i_*) + \dim Im(\partial_*)$. D'autre part

$$\begin{aligned} \dim Im(\partial_*) &= \dim ker(i_{*-1}) = \dim H_{*-1}(D_d(X, n)) - \dim Im(i_{*-1}) \\ &= b_{*-1}(D_d(X, n)) - R(\sigma_{*-1}) \end{aligned}$$

et le lemme en résulte. □

Proposition 5.4 *Le polynôme de Poincaré de l'espace $F^2(S^m, 4)$ et à coefficients dans un corps \mathbb{F} est*

- Si $m > 1$: $P_{F^2(S^m, 4)}(t) = \begin{cases} 1 + 4t^m + t^{2m-1} + 3t^{2m} + t^{3m-1}, & \text{si } m \text{ impair ou } \text{car}(\mathbb{F}) = 2 \\ 1 + 4t^m + 2t^{2m} + t^{3m-1}, & \text{si } m \text{ pair et } \text{car}(\mathbb{F}) \neq 2 \end{cases}$
- Si $m = 1$: $P_{F^2(S^m, 4)}(t) = 1 + 5t + 4t^2$

Preuve Posons $X = S^m$; notons $H_*(X) = \mathbb{F}1 \oplus \mathbb{F}\alpha$, $\Delta : X \rightarrow X^3$ l'application diagonale et $\tau_{ij} : X^4 \rightarrow X^4$ l'application qui permute les i -ième et j -ième coordonnées. Aux éléments ordonnés 123, 124, 134, 234 de l'ensemble $\mathcal{P}_3([4])$ correspondent les plongements $X^2 \rightarrow X^4$ donnés respectivement par:

$$f^{123} = \Delta \times I, \quad f^{124} = \tau_{34} \circ f^{123}, \quad f^{134} = \tau_{24} \circ f^{123}, \quad f^{234} = I \times \Delta$$

où I désigne l'identité. L'application $\sigma_* : H_*(X^2)^{\oplus 4} \rightarrow H_*(X^4)$ est nulle si $* \neq 0, m, 2m$, et en tenant compte des relations

$$\Delta_*(1) = 1 \otimes 1 \otimes 1, \quad \Delta_*(\alpha) = 1 \otimes 1 \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha \otimes 1 + \alpha \otimes 1 \otimes 1$$

il vient que

- $R(\sigma_0) = 1$ car $\sigma_0(1 \otimes 1 \otimes 1, 0, 0, 0) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$.
- $R(\sigma_m) = 4$ puisque

$$\sigma_m(1 \otimes \alpha, 0, 0, 0) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \alpha, \quad \sigma_m(0, 1 \otimes \alpha, 0, 0) = 1 \otimes 1 \otimes \alpha \otimes 1$$

$$\sigma_m(0, 0, 1 \otimes \alpha, 0) = 1 \otimes \alpha \otimes 1 \otimes 1, \quad \sigma_m(0, 0, 0, \alpha \otimes 1) = \alpha \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$$

– De plus, on a

$$\begin{aligned}
 f_*^{123}(\alpha \otimes \alpha) &= 1 \otimes 1 \otimes \alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha \otimes 1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1 \otimes 1 \otimes \alpha \\
 f_*^{124}(\alpha \otimes \alpha) &= (-1)^m 1 \otimes 1 \otimes \alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes 1 + \alpha \otimes 1 \otimes \alpha \otimes 1 \\
 f_*^{134}(\alpha \otimes \alpha) &= (-1)^m 1 \otimes \alpha \otimes 1 \otimes \alpha + (-1)^m 1 \otimes \alpha \otimes \alpha \otimes 1 + \alpha \otimes \alpha \otimes 1 \otimes 1 \\
 f_*^{234}(\alpha \otimes \alpha) &= \alpha \otimes 1 \otimes 1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1 \otimes \alpha \otimes 1 + \alpha \otimes \alpha \otimes 1 \otimes 1
 \end{aligned}$$

si bien que la matrice de σ_{2m} dans les bases naturelles de $H_{2m}(X^2)^{\oplus 4}$ et $H_{2m}(X^4)$ est

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & (-1)^m & 0 \\
 1 & 0 & (-1)^m & 0 \\
 1 & (-1)^m & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

et alors, le rang de σ_{2m} vaut 3 si m est impair ou si la caractéristique de \mathbb{F} est égale à 2 et il vaut 4 sinon. Maintenant, puisque les $b_*(D_3(X, 4))$ non nuls sont $b_0(D_3(X, 4)) = 1$, $b_m(D_3(X, 4)) = 5$ et $b_{2m}(D_3(X, 4)) = 4$, alors le polynôme de Poincaré associé aux $b_*(X^4, D_3(X, 4))$ est finalement

– Si $m > 1$:

$$\begin{cases}
 P(t) = t^{m+1} + 3t^{2m} + t^{2m+1} + 4t^{3m} + t^{4m}, & \text{si } m \text{ impair ou } \text{car}(\mathbb{F}) = 2 \\
 P(t) = t^{m+1} + 2t^{2m} + 4t^{3m} + t^{4m}, & \text{si } m \text{ pair et } \text{car}(\mathbb{F}) \neq 2
 \end{cases}$$

– Si $m = 1$: $P(t) = 4t^2 + 5t^3 + t^4$. Il ne reste plus qu’à utiliser l’égalité (9) pour conclure. □

Corollaire 5.5 *Lorsque m est pair, l’espace $F^2(S^m, 4)$ admet de la 2-torsion dans son homologie.*

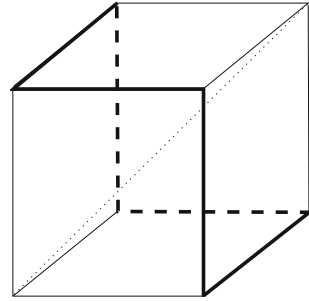
6 Discrétisation et Caractéristique d’Euler de $F^{n-1}(X, n)$

Dans cette section, X est un espace topologique muni d’une triangulation finie T . On sait que l’espace $F(X, 2)$ se rétracte par déformation sur l’ensemble

$$D(X, 2) = \{\sigma \times \mu \ ; \ \sigma, \mu \in T, \ \sigma \cap \mu = \emptyset\}$$

Cela a permis à Farber et Barnett [1] de calculer la caractéristique de $F(X, 2)$ lorsque X est un graphe. Cette construction se généralise à l’espace $F^{n-1}(X, n)$; elle va donc permettre de calculer la caractéristique d’Euler de cet espace.

Fig. 1 Le discrétisé $D^2(I, 3)$ en gras



Proposition 6.1 *L'espace $F^{n-1}(X, n)$ se rétracte par déformation sur*

$$D^{n-1}(X, n) = \{\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n ; \sigma_1, \dots, \sigma_n \in T, \sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_n = \emptyset\}$$

la sous-espace de X^n formé de toutes les cellules $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ comme ci-dessus.

Preuve Soit a un sommet de T , et notons par $A_a = \text{Star}(a)$ la réunion de tous les simplexes contenant a et par A^a la réunion de tous les autres simplexes. On peut donc écrire $X = A_a \cup A^a$ et $X^n = B_a \cup B^a$, avec $B_a = A_a^n$ et $B^a = (A^a \times \dots \times A^a) \cup (A^a \times \dots \times A^a \times A_a) \cup \dots \cup (A^a \times A_a \times \dots \times A_a)$. A chaque sommet a on associe une application $p_a : X^n - \Delta \rightarrow X^n - \Delta$ définie par :

- p_a est égale à l'identité sur B^a ,
- Pour tout $M \in B_a - \Delta$, le point $p_a(M)$ est construit comme suit : Désignons par $A = (a, \dots, a)$, et si $M \in B_a - \{A\}$, alors $p_a(M)$ est défini par

$$[AM] \cap B_a = [Ap_a(M)]$$

L'application p_a est bien définie et continue, et la composée des différentes applications $p_a, a \in T$, permet de donner une rétraction par déformation de l'espace $F^{n-1}(X, n)$ sur l'espace $D^{n-1}(X, n)$. □

Exemple 6.2 Considérons l'exemple de l'espace $F^2(\mathbb{R}, 3)$; il a le type d'homotopie du cercle S^1 puisqu'il se rétracte par déformation sur $F^2(I, 3)$ et le complexe $D^2(I, 3)$ dans I^3 est le cercle simplicial en gras qui apparaît dans la Fig. 1.

Comme conséquence de l'existence de $D^{n-1}(X, n)$ on peut déduire la caractéristique d'Euler du complémentaire de la diagonale.

Théorème 6.3 *La caractéristique d'Euler de $F^{n-1}(X, n)$ est donnée par*

$$\chi(F^{n-1}(X, n)) = \chi^n(X) - \sum_{i=0}^{dim(X)} (-1)^i \sum_{\sigma \in T, dim \sigma = i}^{dim(X)} (\chi_\sigma(X))^n$$

où pour $\sigma \in T, \chi_\sigma(X) = \sum_{i=dim \sigma}^{dim(X)} (-1)^i \Delta^i(\sigma)$ et $\Delta^i(\sigma)$ est le nombre des simplexes dans T de dimension i et ayant σ pour face.

Preuve Soit \mathbb{F} un corps et considérons l’anneau des polynômes $\mathbb{F}[s]$ où s désigne l’ensemble des sommets de la triangulation T . On associe à chaque simplexe $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ de T le monôme $\sigma = a_0 \dots a_n$ de $\mathbb{F}[s]$ et à la triangulation T on fera correspondre le polynôme

$$\phi_T = \sum_{\sigma \in T} (-1)^{\dim(\sigma)} \sigma$$

Notons que $\phi_T(1, 1, \dots, 1) = \chi(M)$. Le polynôme $\phi_{D^{n-1}(X,n)}$ associé à la discrétisation $D^{n-1}(X, n)$ de $F^{n-1}(X, n)$ sera donc égal à $(\phi_T)^n$ auquel il faudra enlever tous les monômes contenant une puissance n . Pour écrire ce polynôme, on associe à chaque $\sigma \in T$ le polynôme

$$\phi_\sigma = \sum_{\sigma' \supset \sigma} (-1)^{\dim \sigma'} \sigma'$$

La formule du crible permet alors d’obtenir

$$\phi_{D^{n-1}(X,n)} = (\phi_T)^n - \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i \sum_{\sigma \in T, \dim \sigma = i} (\phi_\sigma)^n$$

Finalement, on obtient le théorème en attribuant à chaque sommet la valeur 1. □

Corollaire 6.4 *Si M est une variété compacte à bord et de dimension m alors on a*

$$\chi(F^{n-1}(M, n)) = \chi^n(M) - (-1)^{mn} \chi(M) + (-1)^{mn} \chi(\partial M)$$

En particulier si M est orientée, de dimension paire ou fermée, alors

$$\chi(F^{n-1}(M, n)) = \chi^n(M) - \chi(M)$$

Preuve Soit $\sigma \in T$, et notons par $A_\sigma = \text{Star}(\sigma)$ la réunion de tous les simplexes ayant σ pour face. L’espace A_σ est alors homéomorphe à une boule fermée de dimension m , et il est formé par des simplexes contenant σ et d’autres ne contenant pas σ . La réunion de ces derniers forme par définition le $\text{Link}(\sigma)$. $\text{Link}(\sigma)$ est homéomorphe à une sphère lorsque $\sigma \not\subset \partial M$, et est égale à une partie contractible C_σ lorsque $\sigma \subset \partial M$. Dans le premier cas, $\chi_\sigma(M) = (-1)^m$ parce que

$$1 = \chi(A_\sigma) = \chi_\sigma(M) + \chi(\text{Link}(\sigma)) = \chi_\sigma(M) + (1 + (-1)^{m-1})$$

Dans le second cas, $\chi_\sigma(M) = 0$ parce que

$$1 = \chi(A_\sigma) = \chi_\sigma(M) + \chi(C_\sigma) = \chi_\sigma(M) + 1$$

Le corollaire est maintenant une conséquence de ces égalités

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_{\dim \sigma=i}^m (\chi_\sigma)^n(M) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_{\dim \sigma=i}^m (-1)^{mn} - \sum_{i=0}^m (-1)^i \sum_{\sigma \subset \partial M, \dim \sigma=i}^m (-1)^{mn} \\ &= (-1)^{mn} \chi(M) - (-1)^{mn} \chi(\partial M) \end{aligned}$$

Le reste du corollaire résulte de la dualité de Poincaré. □

Pour les graphes complets K_p et pour les graphes bipartis complets $K_{p,q}$, on trouve

Corollaire 6.5 (i) $\chi(F^{n-1}(K_p, n)) = \left\lceil \frac{p(3-p)}{2} \right\rceil^n + (-1)^n \left[\frac{p(p-1)}{2} - (2-p)^{n+1} \right]$
(ii) $\chi(F^{n-1}(K_{p,q}, n)) = (p+q-pq)^n - [p(1-q)^n + q(1-p)^n + (-1)^{n+1}pq]$

On retrouve ainsi les résultats de Farber et Barnett [1] pour $n = 2$.

7 L’anneau $H^*(F^{n-1}(M, n), \mathbb{F})$ lorsque M est une variété fermée et orientée.

Dans cette dernière section, on détermine l’anneau de cohomologie de $F^{n-1}(M, n)$ à coefficients dans un corps \mathbb{F} lorsque M est une variété différentielle de dimension d fermée et orientée, la structure additive étant donnée par la proposition suivante

Proposition 7.1 *Si M est une variété fermée, orientée et simplement connexe, alors on a un isomorphisme d’espaces vectoriels*

$$H_*\left(F^{n-1}(M, n)\right) \cong H_*(M) \otimes H_*(M^{n-1} - pt)$$

Preuve On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M^{n-1} - pt & \xrightarrow{i} & M^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^{n-1}(M, n) & \longrightarrow & M^n \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ M & \xrightarrow{=} & M \end{array}$$

Dans ce diagramme, les deux applications p_i sont des applications de fibrés, les flèches horizontales sont des inclusions et l’application $i_* : H_*(M^{n-1} - pt) \hookrightarrow H_*(M^{n-1})$ est injective puisque M^{n-1} est orientée. Comme le fibré à droite est trivial, la comparaison des deux suites spectrales de Serre associées aux deux fibrés donne le résultat. □

La structure de cohomologie de l’espace $F(M, 2)$ a été déterminée par F. Cohen et L. Taylor [5], qui ont démontré que si $(b_i)_i$ est une base de $H^*(M)$ et si $(b_i^\#)$ est sa base

Poincaré-duale définie par la relation $\langle b_i \smile b_i^\sharp, \mu \rangle = \delta_{ij}$ (μ est la classe fondamentale de M), alors la classe $\Delta = \sum_i (-1)^{|b_i|} b_i \times b_i^\sharp$ dans $H^d(M^2; \mathbb{F})$ engendre la seule relation dans la cohomologie de $F(M, 2)$.

Dans ce paragraphe, on établit un résultat analogue pour les espaces $F^{n-1}(M, n) = M^n - \text{diag}(M^n)$, en ce sens qu’il existe une classe de la forme

$$\Delta = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (-1)^{e(i_1, \dots, i_{n-1})} (b_{i_1}^\sharp \smile \dots \smile b_{i_{n-1}}^\sharp) \times b_{i_1} \times \dots \times b_{i_{n-1}} \in H^{(n-1)d}(M^n; \mathbb{F})$$

et qui engendre la seule relation dans la cohomologie de $F^{n-1}(M, n)$. Plus précisément, on a

Théorème 7.2 *Soit M une variété différentielle fermée de dimension d . On supposera M orientée si le corps des coefficients est autre que \mathbb{Z}_2 . L’anneau $H^*(F^{n-1}(M, n), \mathbb{F})$ est donné par*

$$H^*(F^{n-1}(M, n), \mathbb{F}) = \frac{H^*(M^n)}{(\Delta)}$$

où (Δ) désigne l’idéal engendré par la classe $\Delta \in H^{(n-1)d}(M^n; \mathbb{F})$.

On résume les idées et les étapes de la démonstration dans ce qui suit et on économisera le détail chaque fois qu’on peut faire référence à ([10], chapitre 11).

Soit ν le fibré normal à la diagonale Δ de M^n , d’espace total

$$E(\nu) = \bigcup_{x \in M} \{(u_1, \dots, u_n) ; u_1, \dots, u_n \in T_x M, u_1 + \dots + u_n = 0\}$$

Le fibré ν est donc isomorphe à la somme de Whitney $TM^{\oplus(n-1)}$ (eg. [7]). Par construction, on a l’isomorphisme d’espaces vectoriels

$$H^*(E(\nu), E(\nu) - 0) \simeq H^*(M^n, M^n - \Delta)$$

qui envoie la classe de Thom u du fibré ν , générateur du $H^*(M)$ -module $H^*(E(\nu), E(\nu) - 0)$, sur une classe $u' \in H^{(n-1)d}(M^n, M^n - \Delta)$.

La restriction de la classe u' à $H^{(n-1)d}(M^n)$ définit la classe qu’on a noté précédemment par Δ . On montre (voir [10] pour le détail, lemmes 11.8 et 11.9) que la classe Δ vérifie les propriétés suivantes :

– Si $a \in H^*(M)$, on a l’égalité

$$(a \times 1 \times \dots \times 1) \smile \Delta = (1 \times a \times \dots \times 1) \smile \Delta = \dots = (1 \times 1 \times \dots \times a) \smile \Delta$$

– Soit μ la classe fondamentale de la variété M . Alors

$$\Delta / \mu^{\times(n-1)} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}d} .1 \in H^0(M)$$

où $/\mu^{\times(n-1)}$ désigne le “slant” produit par la classe $\mu^{\times(n-1)} \in H_{(n-1)d}(M^{n-1})$.

Proposition 7.3 Soit M une variété fermée de dimension d et \mathbb{F} un corps (= \mathbb{Z}_2 si la variété n est pas orientée). Si b_i est une base de $H^*(M; \mathbb{F})$ et b_i^\sharp est sa Poincaré-duale alors

$$\Delta = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (-1)^{e(i_1, \dots, i_{n-1})} (b_{i_1}^\sharp \smile \dots \smile b_{i_{n-1}}^\sharp) \times b_{i_1} \times \dots \times b_{i_{n-1}}$$

avec

$$e(i_1, \dots, i_{n-1}) = (n-1)d + d[(n-1)|b_{i_1}| + (n-2)|b_{i_2}| + \dots + |b_{i_{n-1}}|] + |b_{i_2}||b_{i_1}| + |b_{i_3}|(|b_{i_1}| + |b_{i_2}|) + \dots + |b_{i_{n-1}}|(|b_{i_1}| + \dots + |b_{i_{n-2}}|)$$

Preuve La classe $\Delta \in H^{(n-1)d}(M^n)$ s'écrit $\Delta = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \times b_{k_1} \times \dots \times b_{k_{n-1}}$, et pour obtenir $c_{k_1, \dots, k_{n-1}}$, on calculera de deux manières différentes le cup produit $(1 \times b_{i_1}^\sharp \times \dots \times b_{i_{n-1}}^\sharp) \smile \Delta / \mu^{\times(n-1)}$. □

Preuve du théorème 7.2 Considérons la suite exacte de la paire $(M^n, M^n - \Delta)$

$$\dots \longrightarrow H^*(M^n, M^n - \Delta) \xrightarrow{j^*} H^*(M^n) \xrightarrow{i^*} H^*(M^n - \Delta) \longrightarrow \dots$$

On va montrer que j^* est injective et que son image est l'idéal (Δ) . Il en résultera que i^* est surjective, et on aura donc

$$H^*(M^n - \Delta) \simeq \frac{H^*(M^n)}{\ker(i^*)} = \frac{H^*(M^n)}{(\Delta)}$$

L'inclusion $(\Delta) \subset \text{Im}(j^*)$ résulte du fait que $j^*((a \times 1 \times \dots \times 1) \smile u') = (a \times 1 \times \dots \times 1) \smile \Delta$ et que $(\Delta) = \{(a \times 1 \times \dots \times 1) \smile \Delta ; a \in H^*(M)\}$.

Finalement, l'idéal (Δ) , étant isomorphe à $H^*(M)$, est donc isomorphe à $H^*(M^n, M^n - \Delta)$ ce qui implique que l'application j^* est un isomorphisme. □

Corollaire 7.4 L'algèbre $H^*(F^2(S^m, 3))$ est donnée par

$$H^*(F^2(S^m, 3)) \cong \mathbb{F}[a, b, c]/(abc = a^2 = b^2 = c^2 = 0, ab + bc + ca = 0)$$

où $|a| = |b| = |c| = m$.

Preuve $H^*(S^m) = \Lambda(b_m)$ est une algèbre extérieure engendrée par une classe de degré m , la classe "diagonale" est dans ce cas

$$\Delta = 1 \times b_m \times b_m + (-1)^m b_m \times 1 \times b_m + (-1)^m b_m \times b_m \times 1$$

et l'idéal (Δ) est l'espace vectoriel sur \mathbb{F} engendré par les classes $(\Delta, b_m \times b_m \times b_m)$. □

Remarque 7.5 La cohomologie de $F^2(S^m, 3)$ est donc celle de $F(\mathbb{R}^{m+1}, 3)$ comme le confirme la Proposition 5.2 et l'équivalence $F^2(S^m, 3) \simeq F(\mathbb{R}^{m+1}, 3)$. Cette équivalence n'est plus vraie pour $n > 3$; c'est-à-dire que les espaces $F^{n-1}(S^m, n)$ et $F(\mathbb{R}^{m+1}, n)$ n'ont plus le même type d'homotopie à partir de $n = 4$. En effet, le polynôme de Poincaré de l'espace $F^{n-1}(S^m, n)$ est donné par

$$P_{F^{n-1}(S^m, n)} = (1 + x^m) \left[(1 + x^m)^{n-1} - x^{m(n-1)} \right]$$

d'après la Proposition 7.1. Par contre, celui de $F(\mathbb{R}^{m+1}, n)$ est $\prod_{i=1}^{n-1} (1 + ix^m)$ et les deux polynômes ne coïncident pas pour $n \geq 4$.

References

1. Barnett, K, Farber, M.: Topology of configuration space of two particles on a graph. *Algebraic Geom. Topol.* **9**, 593–624 (2009)
2. Bjorner, A., Welker, V.: The homology of “k-equal” manifolds and related partition lattices. *Adv. Math.* **110**, 277–313 (1995)
3. Brown, R.F., White, J.H.: Homology and Morse theory of third configuration spaces. *Indiana Univ. Math. J.* **30**(4), 501–512 (1981)
4. Cohen, Fred, Lusk, Ewing L.: Configuration-like spaces and the Borsuk-Ulam theorem. *Proc. Am. Math. Soc.* **56**, 313–317 (1976)
5. Cohen, F., Taylor, L.: Computation of Gelfand-Fuks cohomology, the cohomology of function spaces and the cohomology of configuration spaces. *Lect. Notes Math.* **657**, 106–143 (1978)
6. Hatcher, A.: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge (2002)
7. Kallel, S., Taamallah, W.: The geometry and fundamental group of permutation products and fat diagonals. *Can. J. Math.* **65**(3), 575–599 (2013)
8. Kallel, S., Labassi, F.: work in progress
9. Labassi, F.: Thèse. Tunis El Manar University, Tunisia, Géométrie et topologie des arrangements diagonaux (2013)
10. Milnor, J.W.: *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton (1974)
11. Munkres, J.R.: *Elements of algebraic topology*. Addison Wesley, Reading (1984)