Sur les fonctions absolument continues et les conjuguées d'une fonction sommable.

Memoria di MARC ZAMANSKY (a Paris).

Résumé. - *Dans deux mémoires* (1) *nous avons étudié la saturation des procédés de sommation des séries de* FOURIER *de fonctions continues et donné une réponse assez générale à cette question. Nous avons montré qu'il était intéressant de connaître avec précision l'approximation d'une fonction continue* f *par des sommes trigonométriques provenant d'un procédé régulier, lorsque la meilleure approximation de* f *était* $\mathrm{E_n(f)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$ *ou* $\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$. *Dans ce qui suit nous montrons que les fonctions absolument continues, c'est à dire les intégrales de* LEBESGUE, *possèdent, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle, les propriétés que nous avons signalées pour les fonctions dont la meilleure approximation trigonométrique est* $\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$. *Nous en avons déduit la condition pour que relativement à un ensemble* $\mathcal{E}$ *dont le complémentaire est de mesure nulle et en tout point de* $\mathcal{E}$, *la fonction conjuguée d'une fonction sommable soit une dérivée.*

Rappelons quelques notations. Soit $\varphi(x)$ une fonction sommable de période 2π, que nous pouvons supposer à valeur moyenne nulle.

Soient :

$$\varphi \backsim \sum_1^\infty A_k(x), \qquad A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

$$f(x) = -\sum_1^\infty \frac{A_k^{\cdot}(x)}{k}, \qquad A_k^{\cdot}(x) = b_k \cos kx - a_k \sin kx.$$

La fonction conjuguée

$$\varphi^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(x+2t) - \varphi(x-2t)] \operatorname{cotg} t dt$$

existe presque partout.

Soit $y = y\ (x,\ n)$ une fonction de la variable x et de l'entier n. Si $a \leq x \leq b$ et $y = O(1)$ ou $o(1)$ pour tout x appartenant à un ensemble $\mathcal{E}$ dont le complémentaire est de mesure nulle sur $(a,\ b)$. quelque soit n, nous écrirons $y = O'(1)$ ou $y = o'(1)$.

---

(1) I. *Classes de saturation ...*, « Annales Scientifiques de l'École Norm. Supér. », (2), 66, Paris 1949, 1r fascicule, p. 19-93; II. *Classes de saturation ...*, « Annales Scientifiques de l'École Norm. Supér. », 67, Paris 1950, 2e fascicule, p. 161-198.

$S_n(F, x)$ ou $S_n(x)$ désignera la somme de FOURIER de rang n de la série de FOURIER de F; $\sigma_n(F, x)$ ou $\sigma_n(x) = \frac{S_0 + \dots + S_{n-1}}{n}$, la somme de FÉJER ou moyenne $(C, 1)$ est un polynome trigonométrique de rang $n - 1$.

Les polynomes d'approximation fournis par un procédé (g) seront:

$$\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) A_k(x)$$

où $g(u)$ est une fonction définie pour $0 \leq u \leq 1$, nulle ailleurs.

Enfin on sait que:

$$\sigma_n^{\cdot}(x) - \varphi(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2t)}{\sin^2 t} \sin^2 ntdt = o'(1) \tag{1}$$

où

$$\Delta_2 = \varphi(x - 2t) - 2\varphi(x) + \varphi(x + 2t)$$

et que si on pose

$$\varphi_n^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta_1(\varphi,\ x,\ 2t) \operatorname{cotg} tdt$$

avec $\alpha = C^{te}$ et $\Delta_1 = \varphi(x + 2t) - \varphi(x - 2t)$

$$\varphi_n^{\cdot}(x) - \sigma_n^{\cdot}(x) = o'(1). \tag{2}$$

A. Approximation des fonctions absolument continues.

THÉORÈME 1. - *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction sommable, de période* 2π, *à valeur moyenne nulle,* $f(x)$ *une intégrale de* $\varphi(x)$; *on a:*

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(f,\ x,\ t)}{t^2} dt + o'\left(\frac{1}{n}\right) \cdot (\alpha = C^{te}).$$

En effet

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_2(2t)}{\sin^2 t} \sin^2 ntdt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(2t)}{\sin^2 t} dt - \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(2t)}{\sin^2 t} \cos 2ntdt.$$

$f(x)$ est dérivable presque partout. Donc $\Delta_2(t) = o'(t)$. Le premier terme est donc $o'\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'autre part:

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(2t)}{\sin^2 t} \cos 2nt dt = \left[\frac{1}{2n} \frac{\Delta_2(2t)}{\sin^2 t} \sin 2nt\right]_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x+2t) - \varphi(x-2t)}{\sin^2 t} \sin 2nt dt +$$

$$+ \frac{1}{n} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(2t) \cos t \sin 2nt}{\sin^3 t} dt.$$

Dans le second membre de cette dernière égalité, le premier terme est $o'(1)$. Le second est à un facteur constant près, $\varphi_n(x) - \sigma_n'(x) = o'(1)$. Enfin si $p > 1$, $a \leq +\infty$ et si $\varepsilon(t) \to 0$ avec t:

$$\frac{1}{n^{p-1}} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{a} \frac{\varepsilon(t)}{t^p} dt = o(1).$$

Donc en tout point où $f'(x)$ existe, c'est à dire presque partout,

$$\frac{1}{n} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(2t) \cos t \sin 2nt}{\sin^3 t} dt = \frac{O(1)}{n} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{o(1)}{t^2} dt = o(1).$$

Donc:

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2n\pi} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(f, x, 2t)}{\sin^2 t} dt.$$

Soit u_n l'ensemble constitué par les deux segments: $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\alpha}{n}\right)$ et $\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2n\pi} \int_{u_n} \frac{f(x-2t) - f(x)}{\sin^2 t} dt = \frac{1}{2n\pi} \int_{u_n} [f(x+2t) - f(x)] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+k\pi)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{u_n+k\pi} \frac{f(x+2t) - f(x)}{t^2} dt$$

$u\ + k\pi$ désignant l'ensemble déduit de u_n par la translation d'amplitude $k\pi$.

Or

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{u_n+k\pi} \frac{f(x+2t) - f(x)}{t^2} dt - \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(f, x, 2t)}{t^2} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \int_{k\pi-\frac{\alpha}{n}}^{k\pi+\frac{\alpha}{n}} \frac{f(x+2t) - f(x)}{t^2} dt$$

(le signe Σ' indique qu'on excepte de la sommation $k = 0$).

La dernière somme écrite est en valeur absolue moindre que

$$8 \max |f| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2 - \frac{\alpha^2}{n^2}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Cela achève de démontrer le théorème 1.

THÉORÈME 2. - $f^{\cdot}(x)$ *étant la fonction conjuguée de* $f(x)$ *périodique, absolûment continue,*

$$f^{\cdot}(x) - \sigma_n^{\cdot}(x) = \frac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit

$$f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin^2 t} \sin 2nt dt = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Intégrons par parties la dernière intégrale. Il vient:

$$(3) \quad \left[-\frac{1}{2n}\frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin^2 t}\cos 2nt\right]_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t)}{\sin^2 t}\cos 2nt dt -$$

$$-\frac{1}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin^3 t}\cos t \cos 2nt dt.$$

Or quand $t \to 0$, on a presque partout:

$$\frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t} = 4\varphi(x) + o'(1).$$

Donc

$$\left[-\frac{1}{2n}\frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin^2 t}\cos 2nt\right]_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n}\frac{f\left(x + \frac{2\alpha}{n}\right) - f\left(x - \frac{2\alpha}{n}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{n}}\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{2\alpha \cos 2\alpha}{n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{n}}[\varphi(x) + o'(1)].$$

D' ailleurs:

$$(4)\qquad \sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2t)}{\sin^2 t}\sin^2 ntdt+\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2t)}{\sin^2 t}dt-$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2t)}{\sin^2 t}\cos 2ntdt=o'(1).$$

Or:

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2t)}{\sin^2 t}\sin^2 ntdt=\frac{O(1)}{n}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\mid\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2)\mid n^2dt=o'(1)$$

d'après un résultat classique de LEBESGUE.

Et:

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2(\varphi, x, 2t)}{\sin^2 t}dt=\left[\frac{\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{2}-2t\varphi(x)}{\sin^2 t}\right]_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}-2\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left[\frac{f(x+2t)-f(x+2t)}{2t}-2\varphi(x)\right]t}{\sin^3 t}\cos tdt$$

$$=\qquad o'(n)\qquad+\qquad o'(n).$$

Donc d'après (4):

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2(\varphi,\ x,\ 2t)}{\sin^2 t}\cos 2ntdt=o'(1).$$

Donc le 2^e terme dans (3) est:

$$o'(1)+\frac{2\varphi(x)}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nt}{\sin^2 t}dt.$$

Le 3^e terme s'écrit:

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)-4t\varphi(x)}{\sin^3 t}\cos t\cos 2ntdt+\frac{4\varphi(x)}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos t\cos 2nt}{\sin^3 t}dt=$$

$$=o'(1)+\frac{4\varphi(x)}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos t\cos 2nt}{\sin^3 t}dt.$$

On a donc:

$$f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\alpha\cos 2\alpha}{\pi n^3\sin^2\frac{\alpha}{n}}[\varphi(x)+o'(1)]+\frac{\varphi(x)}{\pi n^2}\left[\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nt}{\sin^2 t}dt-\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\cos t\cos 2nt}{\sin^3 t}dt\right]+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nt}{\sin^2 t}dt-\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\cos t\cos 2nt}{\sin^3 t}dt=O(1)$$

et

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}[4\varphi+o'(1)]\frac{t}{\sin^2 t}\sin 2nt dt=$$

$$=\frac{2\varphi(x)}{n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\frac{t\sin 2nt}{\sin^2 t}dt+o'\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2\varphi(x)}{n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement:

$$f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{\varphi(x)}{n\pi}\left[2\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt-\frac{1}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nt}{\sin^2 t}dt+\frac{\alpha\cos 2\alpha}{n^2\sin^2\frac{\alpha}{n}}\right]+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si on prend $\alpha=\frac{\pi}{4}$, un calcul élémentaire montre que le coefficient de $\frac{\varphi(x)}{n}$ est $1+o'(1)$.

D'où:

$$f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{\varphi(x)}{n}+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

THÉORÈME 3. - *Soit* f(x) *absolûment continue, de période* 2π, (g) *un procédé de sommation définie par une fonction sommatoire* g(u) *à dérivée troisième bornée telle que* $g(0)=1$, $g(1)=0$ *et* $T_n(g, f, x)$ *le polynome d'approximation de rang* n; *alors*

$$T_n(g,f,x)-f(x)=-\frac{g'(0)}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(f,x,t)}{t^2}dt+o'\left(\frac{1}{n}\right)=-g'(0)[\sigma_n(f,x)-f(x)]+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a en effet d'après (II, p. 174, (8)):

$$\int_0^1 g(u)\cos utdu = \frac{g'(1)\cos t}{t^2} - \frac{g'(0)}{t^2} - \frac{g''(1)\sin t}{t^3} + \frac{1}{t^3}\int_0^1 g'''(u)\sin utdu \tag{5}$$

et

$$T_n(g,\ f,\ x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Delta_2(f,\ x,\ t)\left[-\frac{g'(0)}{nt^2} + \frac{g'(1)\cos nt}{nt^2} - \frac{g''(1)\sin nt}{n^2t^3} + \frac{1}{n^2t^3}\int_0^1 g'''(u)\sin nutdu\right]dt.$$

On a encore $\displaystyle\int_0^{\frac{\alpha}{n}} = o'\left(\frac{1}{n}\right)$.

Et comme $\Delta_2(t) = o'(t)$

$$\frac{1}{n^2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^3}\sin ntdt = o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a vu au théorème 2 que

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\cos ntdt = o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

D' où résulte le théorème 3.

THÉORÈME 4. - *Si* f˙(x) *est la fonction conjuguée de* f(x) *intégrale de* φ(x) *sommable et* (g) *le procédé de sommation considéré au théorème 3, on a:*

$$T_n(g,\ \dot f,\ x) - \dot f(x) = -\,g'(o)\frac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a (de SZ. NAGY, « Hungarica Acta mathematica », vol. 1, n. 3, 1948):

$$T_n(g,\ \dot f,\ x) = \frac{n}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t) - f(x-t)]\left[\int_0^1 g(u)\sin nutdu\right]dt$$

et

$$\int_0^1 g(u)\sin utdu = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}g'(1)\sin t + \frac{g''(0) - g''(1)\cos t}{t^3} + \frac{1}{t^3}\int_0^1 g'''(u)\cos utdu. \tag{6}$$

Ecrivons :

$$T_n(g, f^{\cdot}, x) = \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}} 2t(\varphi + o'(1))\left|\int_0^1\right|dt + \frac{n}{\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}$$

$$= \frac{2n\varphi}{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\left[t\int_0^1 g(u)\sin nutdu\right]dt + o'\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n}{\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\Delta_1(t)\left[\frac{1}{nt} + \frac{1}{nt}\int_0^1 g'(u)\cos nutdu\right]dt$$

$$= \frac{2n\varphi}{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 g'(u)\cos nutdu\right]dt + o'\left(\frac{1}{n}\right) + f^{\cdot}(x) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\Delta_1(t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\int_0^1 g'(u)\cos nutdu\right]dt.$$

En écrivant $\Delta_1(t) = 2\varphi t + o'(t)$ et en utilisant (5) il vient :

$$T_n(g, f^{\cdot}, x) - f^{\cdot}(x) = \frac{\varphi(x)}{n}\left[-g'(1) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\left[\int_0^1 g'(u)\cos ut\,du + \frac{g'(1)\sin t}{t}\right]dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{1}{t}\left[\int_0^1 g''\sin utdu\right]dt\right] + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\varphi(x)}{n}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1 g'(u)\cos utdu\right]dt + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= g'(0)\frac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

THÉORÈME 5. - *Si* f(x) *est absolûment continue:*

$$\sigma_n''(f, x) = o'(n), \qquad \sigma_n^{\cdot\prime\prime}(f, x) = o'(n).$$

Considérons en effet le procédé défini par $1 - u^2$. On a d'après (II, p. 170, (6) et (7)).

$$T_n(1 - u^2, f, x) - f(x) = \sigma_n - f - \frac{\sigma_n^{\cdot\prime}}{n}.$$

Donc d'après le théorème 3 où $g'(0) = 0$

(7) $$T_n(1 - u^2, f, x) - f(x) = o'\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sigma_n^{\cdot\prime} = n(\sigma_n - f) + o'(1)$$

avec le procédé $1 - u^3$, on a:

$$T_n(1-u^3,\ f,\ x) - f = \sigma_n - f - \frac{\sigma_n^{\cdot\prime}}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} = o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

D' où de (7), $\sigma_n'' = o'(n)$.

Mutatis mutandis, le théorème 4 donne $\sigma_n^{\cdot\prime\prime} = o'(n)$.

Les principaux résultats obtenus dans (II) pour les fonctions continues dont la meilleure approximation trigonométrique est $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou condition équivalente, telles que $\Delta_2(f,\ x,\ t) = o(t)$ uniformément en x, restent valables. Ceux que nous venons de prouver nous suffiront pour l'objet de ce travail.

On remarquera aussi que si $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $T_n{}'g,\ \varphi,\ x) - \varphi(x) = o'(1)$ lorsque φ est sommable. La démonstration classique pour σ_n suffit en utilisant (5): on pose $\Phi(t) = \int_0^t \Delta_2(\varphi,\ x,\ t)dt = o'(t)$ (LEBESGUE). Il en est de même pour $\varphi^{\cdot}(x)$.

B. **Applications.**

1°. Soit $\varphi(x)$ sommable de période 2π, à valeur moyenne nulle, $f(x)$ une intégrale de φ. Si α est une constante, des identités:

$$A_k\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) = \cos\frac{k\alpha}{n} A_k + \sin\frac{k\alpha}{n} A^{\cdot}_k$$
$$T_n(g_1 + g_2) = T_n(g_1) + T_n(g_2)$$
$$T_n(\alpha g) = \alpha T_n(g)$$

on déduit sans difficulté pour $\varphi\ (x)$:

$$\begin{cases} S_n\left(\varphi,\ x + \frac{\alpha}{n}\right) - \varphi(x) = \cos\alpha[S_n(\varphi,\ x) - \varphi(x)] + \sin\alpha[S_n^{\cdot}(\varphi,\ x) - \varphi^{\cdot}(x)] + o'(1) & (8) \\ S_n^{\cdot}\left(\varphi,\ x + \frac{\alpha}{n}\right) - \varphi^{\cdot}(x) = \cos\alpha[S_n^{\cdot}(\varphi,\ x) - \varphi^{\cdot}(x)] + \sin\alpha[\varphi(x) - S_n(\varphi,\ x)] + o'(1). & (9) \end{cases}$$

Pour $f(x)$ en utilisant les procédés définis par $\dfrac{\cos\alpha u - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$ et $\dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha u}{\sin\alpha}$ et en appliquant les théorèmes 3 et 4, il vient:

$$S_n\left(f,\ x + \frac{\alpha}{n}\right) = T_n(f,\ \cos\alpha u - \cos\alpha,\ x) + \cos\alpha S_n(f,\ x) -$$
$$- T_n^{\cdot}(f,\ \sin\alpha - \sin\alpha u,\ x) + \sin\alpha S_n^{\cdot}(f,\ x)$$

$$T_n(f,\ \cos\alpha u - \cos\alpha,\ x) - (1 - \cos\alpha)f(x) = o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$T_n^{\cdot}(f,\ \sin\alpha - \sin\alpha u,\ x) - \sin\alpha f^{\cdot}(x) = -\alpha\frac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où

$$S_n\left(f,\ x+\frac{\alpha}{n}\right)-f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)=\cos\alpha[S_n(f,\ x)-f(x)]+\sin\alpha[S_n^{\cdot}(f,\ x)-f^{\cdot}(x)]+$$
$$+f(x)-f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)+\alpha\frac{\varphi(x)}{n}+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or $f(x)-f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)=-\alpha\frac{\varphi(x)}{n}+o'\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc

$$(10)\quad S_n\left(f,\ x+\frac{\alpha}{n}\right)-f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)=\cos\alpha[S_n(f,x)-f(x)]+\sin\alpha[S_n(f,x)-f^{\cdot}(x)]+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

De même

$$(11)\quad S_n^{\cdot}\left(f,\ x+\frac{\alpha}{n}\right)-f^{\cdot}(x)=\cos\alpha[S_n^{\cdot}(f,\ x)-f^{\cdot}(x)]-\sin\alpha[S_n(f,\ x)-f(x)]+$$
$$+\frac{\alpha}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(f,\ x,\ t)}{t^2}\,dt+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans (8), (9), (10), (11) nous choisirons $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Mais

$$\sigma_n\left(f,\ x+\frac{\pi}{2n}\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)=T_n\left[(1-u)\cos\frac{\pi u}{2},\ f,\ x\right]-f(x)+f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-$$
$$-T_n^{\cdot}\left(1-\sin\frac{\pi u}{2},\ f\right)+f^{\cdot}(x)+T_n^{\cdot}\left(1-u\sin\frac{\pi u}{2}\right)-f^{\cdot}(x)$$
$$=+\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(f,x,t)}{t^2}\,dt-\frac{\pi}{2n}\varphi(x)+o'\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\pi}{2n}\varphi(x)+o'\left(\frac{1}{n}\right)+o'\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$(12)\qquad =\sigma_n(x)-f(x)+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or $\sigma_n\equiv S_n+\frac{S_n^{\cdot\prime}}{n}$. Donc (12) donne:

$$S_n\left(f,\ x+\frac{\pi}{2n}\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)+\frac{S_n^{\cdot\prime}\left(f,\ x+\frac{\pi}{2n}\right)}{n}=\sigma_n(f,\ x)-f(x)+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais $S_n^{\cdot\prime}(f)=S_n^{\cdot}(\varphi)$; donc d'après (10) où $\alpha=\frac{\pi}{2}$:

$$S_n^{\cdot}(f,\ x)-f^{\cdot}(x)+\frac{S_n^{\cdot}\left(\varphi,\ x+\frac{\pi}{2n}\right)}{n}=\sigma_n(f,\ x)-f(x)+o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Avec (9) il vient:

$$S_n'(f,\ x) - f^{\cdot}(x) + \frac{1}{n}[\varphi(x) - S_n(\varphi,\ x)] + \frac{\varphi^{\cdot}(x)}{n} = \sigma_n(x) - f(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais

$$\sigma_n(x) - f^{\cdot}(x) = S_n^{\cdot}(x) - f^{\cdot}(x) - \frac{S_n(\varphi,\ x)}{n} = -\frac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{(théorème 2).}$$

D'où:

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{\varphi^{\cdot}(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc:

THÉORÈME 6.

$$\varphi^{\cdot}(x) = \lim_{n\,\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(x+2t) - \varphi(x-2t)] \operatorname{cotg} t\,dt = \lim_{n\,\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt$$

presque partout.

2°. Nous allons maintenant prouver que dans (11) on peut remplacer au premier membre $f^{\cdot}(x)$ par $f^{\cdot}\left(x + \frac{\pi}{2n}\right)$ quand on prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Soit ε_n une suite de nombres > 0 tels que $\frac{A}{n} < \varepsilon_n < \frac{B}{n}$ où A et B sont des constantes positives finies et telles que $A > \pi$.

Soit

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2(f,\ x,\ 2t)}{\sin t} \sin nt\,dt, \qquad u_{2n+1} = S_n(f,\ x) - f(x)$$

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_2(f,\ x,\ 2t)}{\sin t} \sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x)}{\sin t} \sin nt\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x-2t) - f(x)}{\sin t} \sin nt\,dt.$$

En un point où $f' = \varphi$, $\Delta_2(f,\ x,\ 2t) = o(t)$. Donc le premier terme de u_n est $o\left(\frac{1}{n}\right)$ presque partout.

Considérons :

$$\delta_n = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin t}\sin ntdt - \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)}\sin ntdt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{4n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{[f(x+2t)-f(x)]\cos\left(t-\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)}\sin ntdt,$$

où on écrit $\cos\left(t-\frac{\pi}{4n}\right) = \cos t\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{\pi}{4n}\sin t$. On a alors :

$$\delta_n = -\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{[f(x+2t)-f(t)]\cos t}{\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)}\sin ntdt - \frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{4n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)}\sin ntdt.$$

Comme $\varepsilon_n > \frac{\pi}{n}$ et f continue, le dernier terme écrit est $O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On a donc

$$\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin^2 t}\cos t\sin ntdt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f-f]\cos t\left[\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)}\right]\sin ntdt.$$

Le dernier terme écrit vaut

$$-\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{4n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x)\,\frac{\cos t\left[\cos t\cos\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{4n}\sin t\right]}{\sin^2 t\sin\left(t-\frac{\pi}{4n}\right)}\sin ntdt$$

et fractionné en deux parties donne $O\left(\frac{1}{n^3}\right)\int\frac{dt}{t} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et :

$$-\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{4n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x)]\,\frac{\cos^2 t\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin^2 t\sin\left(t-\frac{\pi}{4n}\right)}\sin ntdt.$$

On remplace $\cos\frac{\pi}{2n}$ par 1 (l'erreur commise est $o\left(\frac{1}{n}\right)$ encore) et en un point x ou $f' = \varphi$, l'égalité $f(x+2t) - f(x) = 2t\varphi(x) + t\varepsilon(t)$ donne :

$$-\frac{4}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{4n}\varphi(x)\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos^2 t\sin nt}{\sin^2 t\sin\left(t-\frac{\pi}{4n}\right)}dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\varepsilon(t)\cos^2 t}{\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{4n}\right)}\right|dt \qquad (\lim_{t=0}\varepsilon(t)=0).$$

Dans cette expression le dernier terme est $o\left(\frac{1}{n}\right)$ et le coefficient de $\varphi(x)$ une constante λ'_n **indépendante de f.**

On obtient donc

$$(13) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin t}\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)}\sin t\, ntdt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin^2 t}\cos t\sin ntdt + \lambda'_n\varphi(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans l'intégrale du 1er terme au 2e membre de (13) posons $t = \frac{\pi}{2n} + u$. Elle s'écrit

$$\int_{\varepsilon_n-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{n}+2n\right)-f(x)}{\sin u}\cos nudu.$$

Mais

$$\int_{\varepsilon_n-\frac{\pi}{2n}}^{\varepsilon_n} = \int_{\varepsilon_n-\frac{\pi}{2n}}^{\varepsilon_n}\frac{\left(\frac{\pi}{n}+2u\right)(\varphi(x)+\varepsilon(u))}{\sin u}\cos nudu = \lambda''_n\varphi(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right),$$

λ''_n étant encore une constante **indépendante de f.**

Enfin

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} = O(1)\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos nu|}{u}du = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où

$$(A)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin t}\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{n}+2t\right)-f(x)}{\sin t}\cos ntdt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin^2 t}\cos t\sin ntdt + \lambda_n\varphi(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

λ_n ne dépendant pas de f.

Si on considère de même

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x-2t)-f(x)}{\sin t}\sin ntdt - \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x-2t)-f(x)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}\sin ntdt$$

on obtient par un calcul analogue:

$$(B)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x-2t)-f(x)}{\sin t}\sin ntdt = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{n}-2t\right)-f(x)}{\sin t}\cos ntdt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{[f(x-2t)-f(x)]}{\sin^2 t}\cos t\sin ntdt + \mu_n\varphi(x) + o'\left(\frac{1}{u}\right)$$

μ_n comme λ_n ne dépendant pas de f.

λ_n désignant alors génériquement une constante dépendant de n seulement et non de f, en obtient en ajoutant membre à membre (A) et (B):

$$(C)\qquad u_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{n}+2t\right)-f\left(x+\frac{\pi}{n}-2t\right)}{\sin t}\cos ntdt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{\sin^2 t}[\sin(n+1)t+\sin(n-1)t].$$

Donc en remarquant que:

$$f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{\sin^2 t}\sin 2ntdt = \lambda_n\varphi(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

et que d'après le théorème 2, $f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = \dfrac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ on a:

$$(D)\quad S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2n+1}+2t\right) - f\left(x+\frac{\pi}{2n+1}-2t\right)}{\sin t}\cos(2n+1)t\,dt + \lambda_n\varphi(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

presque partout (en tout point x où $f' = \varphi$).

Soit

$$f_{\varepsilon_n}^{\cdot} = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t}\cos t\,dt.$$

Avec les même méthode on a encore:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t}\left[\cos t - \cos(2n+1)t\,dt\right] = \lambda_n\varphi + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$S_n(x) - f(x) = f_{\varepsilon_n}^{\cdot}\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) - S_n^{\cdot}\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + \lambda_n\varphi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans $S_n^{\cdot}\left(x + \dfrac{\pi}{2n+1}\right)$ on peut remplacer $\dfrac{\pi}{2n+1}$ par $\dfrac{\pi}{2n} + h_n$ où $h_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet $S_n(x)$ converge uniformément vers f; donc $\sigma_n = S_n + \dfrac{S_n^{\cdot\prime}}{n}$ aussi, donc $S_n^{\cdot\prime} = o(n)$ uniformément en x, et par suite $S_n^{\cdot}\left(x + \dfrac{\pi}{2n} + h_n\right) - S_n^{\cdot}\left(x + \dfrac{\pi}{2n}\right) = h_n \cdot o(n) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Nous montrerons enfin que

$$\xi_n = f_{\varepsilon_n}^{\cdot}\left(x + \frac{\pi}{2n} + h_n\right) - f_{\varepsilon_n}^{\cdot}\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{si} \quad h_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

en tout point x où $\varphi = f'$.

Si on désigne par F une intégrale de f et si on pose $\Phi_n(t) = = F\left(x + \frac{\pi}{2n} + 2t\right) + F\left(x + \frac{\pi}{2n} - 2t\right)$ on a:

$$\xi_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\Phi\left(t + \frac{h}{2}\right) - \Phi(t)}{2\sin t}\right]_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi\left(t + \frac{h_n}{2}\right) - \Phi(t)}{\sin^2 t}\, dt = \frac{h_n}{2}\,\frac{\Phi'\left(2\varepsilon_n + \frac{\theta h_n}{2}\right)}{\sin \varepsilon_n} +$$

$$+ \frac{h_n}{4\pi} O(1) \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha_n(t)}{\sin^2 t}\, dt$$

où $\alpha_n(t) = \Phi'\left(\varepsilon_n + \frac{\theta h_n}{2}\right) \to 0$ avec t et $\frac{1}{n}$ $(0 < \theta < 1)$ parce que:

$$\Phi'(t) = 2\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n} + 2t\right) - f\left(x + \frac{\pi}{2n} - 2t\right)\right].$$

D'où $\xi_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc

$$S_n(x) - f(x) = f^{\cdot}_{\varepsilon_n}\left(x + \frac{\pi}{2n} + h_n\right) - S^{\cdot}_n\left(x + \frac{\pi}{2n} + h_n\right) + \lambda_n \varphi(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $h_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et x un point où $f' = \varphi$.

Soit alors E l'ensemble de point x (dont le complémemtaire est du mesure 0) et où $\lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x + 2t) - f(x - 2t)] \operatorname{cotgt} dt$ existe et est désignée par

$f^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}$.

$x + \frac{\pi}{2n} + h_n$ appartenant à E, on peut trouver $\alpha(n, x) < \varepsilon_n$ tel que par exemple

$$\left|\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_n} - \frac{1}{\pi}\int_{\alpha(n,x)}^{\varepsilon_n}\right| < \frac{1}{n^2} \quad \text{pour} \quad x + \frac{\pi}{2n} + h_n.$$

Mais

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha(n,x)}^{\varepsilon_n} = \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n+2\varepsilon'_n\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n+2\varepsilon'_n\right)}{\sin\varepsilon'_n}\int_0^{\varepsilon_n}\cos t dt \quad \text{où } \alpha(n,x)<\varepsilon'_n<\varepsilon_n$$

$$=\left[\frac{4\varepsilon'_n\varphi}{\sin\varepsilon'_n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int_0^{\varepsilon_n}\cos t dt = 4\varphi\int_0^{\varepsilon_n}\cos t dt + o\left(\frac{1}{n}\right) = \lambda_n\varphi + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En définitive

$$(14)\qquad S_n(x)-f(x) = f^{\cdot}\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n\right) - S_n^{\cdot}\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n\right) + \lambda_n\varphi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

λ_n étant indépendant de f, peut être déterminé par le choix d'une fonction particulière f. Prenons par exemple une fonction f à dérivée seconde bornée. Alors uniformément en x

$$S_n - f = o\left(\frac{1}{n}\right),\quad S_n^{\cdot} - f^{\cdot} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en conclut que $\lambda_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cette démonstration suppose en réalité que

$$n\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n+2t\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n-2t\right)}{\sin t}\cos t dt$$

tend vers zéro pour $n\infty$. Il est préférable pour obtenir un résultat plus précis de ne pas faire encore d'hypothèse.

Remarquons d'abord qu'on peut remplacer $\{\varepsilon_n\}$ par toute suite $\{\varepsilon'_n\}$ telle que $\alpha\varepsilon_n<\varepsilon'_n<\beta\varepsilon_n$ où α et β sont >0 finis. En effet:

$$\int_{\varepsilon'_n}^{\varepsilon_n}\frac{f\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n+2t\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2n}+h_n-2t\right)}{\sin t}\cos t dt =$$

$$=\int_{\varepsilon'_n}^{\varepsilon_n}\frac{\left(\frac{\pi}{2n}+h_n+2t\right)(\varphi(x)+o(1))-\left(\frac{\pi}{2n}+h_n-2t\right)(\varphi(x)+o(1))}{\sin t}\cos t dt =$$

$$=\mu_n\varphi + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\log\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right| = \mu_n\varphi + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où μ_n dépend de n seulement.

On a donc

$$S_n(x) - f(x) = \Lambda_n\varphi(x) + f^{\cdot}(x+\varepsilon_n) - S_n^{\cdot}(x+\varepsilon_n) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f(x+\varepsilon_n+2t)-f(x+\varepsilon_n-2t)}{\sin t}\cos dt + o'$$

où x est un point de l'ensemble E de mesure 2π où simultanément: $\varphi(x) = f'$,

$\varphi^{\cdot}(x) = \lim\limits_{\varepsilon=0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}[\varphi(x+2t)-\varphi(x-2t)]\operatorname{cotg} t dt$, existe, $f^{\cdot}(x)$ existe, $x+\varepsilon_n$ appartenant aussi à E.

Dans la dernière intégrale on peut remplacer $\frac{\cos t}{\sin t}$ par $\frac{1}{t}$ et ne commettre que l'erreur $o\left(\frac{1}{n}\right)$ car f est continue. On a, d'autre part, en supposant par exemple que $f(x)$ est une fonction admettant une dérivée seconde continue, $S_n(x) - f(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $S_n^{\cdot} - f^{\cdot} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ uniformément en x et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f(x+\varepsilon_n+2t)-f(x+\varepsilon_n-2t)}{t} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}[4\varphi(x)+o(1)]dt = \frac{4}{\pi}\varepsilon_n\varphi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $\Lambda_n = \frac{4\varepsilon_n}{\pi}$.

En définitive:

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{S}_n(x) - f(x) = f^{\cdot}(x+\varepsilon_n) - S_n^{\cdot}(x+\varepsilon_n) +$$
$$+\frac{4}{n}\varepsilon_n\left[\varphi(x) - \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f(x+\varepsilon_n+2t)-f(x+\varepsilon_n-2t)}{4t}dt\right] + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or nous avons vu que:

$$S_n(x) - f(x) = f^{\cdot}(x) - S_n^{\cdot}(x+\varepsilon_n) + \varepsilon_n\varphi^{\cdot}(x) + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que:

$$\frac{f^{\cdot}(x+\varepsilon_n)-f^{\cdot}(x)}{\varepsilon_n} - \varphi^{\cdot}(x) + \frac{4}{\pi}\left[\varphi(x) - \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f(x+\varepsilon_n+2t)-f(x+\varepsilon_n-2t)}{4t}dt\right] = o'(1).$$

Le résultat est tout à fait analogue quand on remplace ε_n par $-\varepsilon_n$ dans f et $f^{\cdot}$. Cette dernière égalité reste inchangée.

La façon dont on a choisi les ε_n, permet dans cette dernière égalité de remplacer ε_n par h tendant vers zéro, $x+h$ appartenant à E.

D'où :

$$16)\quad \frac{f^{\cdot}(x+h)-f^{\cdot}(x)}{h}-\varphi^{\cdot}(x)+\frac{4}{\pi}\left[\varphi(x)-\frac{1}{2h}\int_0^{2h}\frac{f(x+h+t)-f(x+h-t)}{2t}dt\right]=o'(1).$$

Soit alors $\mathcal{E}$ un ensemble de points x de $(0,2\pi)$ des mesure positive $\mathcal{E}'=\mathcal{E}\cap E$ a même mesure que $\mathcal{E}$. L'égalité (16) donne alors la condition nécesssaire et suffisante pour que presque partout sur $\mathcal{E}$ et relativement à $\mathcal{E}$, $\varphi^{\cdot}$ soit la dérivée de $f^{\cdot}$ (2).

THÉORÈME 7. - *Soit* f(x) *une intégrale de* $\varphi(x)$ *sommable à valeur moyenne nulle,* $\mathrm{f}^{\cdot}(\mathrm{x})$ *et* $\varphi^{\cdot}(\mathrm{x})$ *les conjuguées de* f *et* φ. E *l'ensemble de mesure* 2π *où simultanément* $\varphi=\mathrm{f}'$, $\varphi^{\cdot}$ *et* $\mathrm{f}^{\cdot}$ *existent. Si* $\mathcal{E}$ *est un ensemble de mesurep ositive, la condition nécessaire et suffisante pour qu'en tout point de* $\mathcal{E}'=\mathcal{E}\cap\mathrm{E}$, $\mathrm{f}^{\cdot}$ *admette* $\varphi^{\cdot}$ *comme dérivée relativement à* $\mathcal{E}'$ *est que*

$$\varphi(x)=\lim_{h=0}\frac{1}{2h}\int_0^{2h}\frac{f(x+h+t)-f(x+h-t)}{2t}dt$$

$\mathrm{x}+\mathrm{h}$ *appartenant à* $\mathcal{E}'$.

Voici quelques conséquences de la formule (15).

On peut d'abord en déduire un résultat dû à TITCHMARSH (3):

$\varphi^{\cdot}(\mathrm{x})$ *est presque partout la dérivée approximative de* $\mathrm{f}^{\cdot}(\mathrm{x})$.

On dit que $F(x)$ admet au point x une dérivée approximative λ s'il existe un ensemble $E(F,x)$, ayant d'épaisseur 1 au point x et tel que $\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lambda$ quand $x+h\to x$ sur $E(F,x)$ (4).

---

(2) M. A. ZYGMUND nous a fait remarquer que le dernier résultat publié aux « Comptes Rendus de l'Academie des Sciences », (t. 230, p. 2256-2258, séance du 26 juin 1950) est incorrect. Car il entraînerait que dans tout intervalle (a,b) on pourrait en trouver un autre (a',b') dans lequel $f^{\cdot}$ serait bornée après qu'on eût éventuellement changé les valeurs de $f^{\cdot}$ sur un ensemble de mesure nulle. Or on peut construire une fonction $f^{\cdot}$, conjuguée d'une fonction f absolûment continue, qui ne soit pas bornée dans aucun intervalle, quelle que soit le manière de la modifier sur un ensemble de mesure nulle. M. ZYGMUND nous a donné l'exemple suivant:

$$\varphi_1(x)=-\sum_2^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n},\quad f_1^{\cdot}(x)=\sum_2^{\infty}\frac{\cos nx}{n\log n},\quad f^{\cdot}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos n(x-\alpha_k)\right)$$

les points α_k étant denses dans $(0,2\pi)$ et $\Sigma\alpha_k=O(1)$. $f^{\cdot}(x)$ est la conjuguée de f, elle-même primitive de $\varphi=\Sigma\alpha_k\varphi_1(x-\alpha_k)$. Les sommes partielles d'ordre n de la série de FOURIER de $f^{\cdot}(x)$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers un α_k. Quelle que soit la façon dont on change les valeurs de $f^{\cdot}$ sur un ensemble de mesure nulle, $f^{\cdot}$ n'est pas bornée parce que dans le cas contraire les moyennes $(C,1)$ le seraient aussi ce qui est impossible puisque les sommes de FOURIER de $f^{\cdot}$ tendent vers $+\infty$.

(3) TITCHMARSH, *On conjugate functions*, « Proceedings of the London Mathematical Society », vol. 29, 1929, p. 49-80.

(4) Voir DENJOY, *Calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, IIe partie, p. 166, (Gauthier-Villars, Paris, 1941).

Lorsque x et $x+h$ appartiennent à E et lorsque $t \to 0$,

$$u(x+h,\ t) = \frac{f(x+h+t) - f(x+h-t)}{2t} - \varphi(x+h)$$

tend vers zéro quand $t \to 0$. D'après le théorème d'EGOROFF, sur un ensemble $E_1 \subset E$ et dont la mesure diffère de moins de $\alpha > 0$ donné, de celle de E, u converge uniformément vers zéro et E_1 étant de mesure positive a presque partout l'épaisseur 1. Ecrivons alors (15) sous la forme:

$$\text{(16')} \qquad \frac{f^{\cdot}(x+h) - f^{\cdot}(x)}{h} - \varphi^{\cdot}(x) = \frac{4}{\pi}[\varphi(x+h) - \varphi(x)] +$$

$$+ \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2h}\int_0^{2h}\left[\frac{f(x+h+t) - f(x+h-t)}{2t} - \varphi(x+h)\right]dt\right\} + o'(1).$$

En remarquant que $\varphi(x)$ est presque partout approximativement continue (c'est à dire $\varphi(x+h) \to \varphi(x)$ quand $x+h \to x$ sans quitter un ensemble d'épaisseur 1 au point x) en obtient le théorème de TITCHMARSH.

Un autre résultat montre que le théorème 7 est lié au problème de la convergence d'une série de FOURIER sur un ensemble de mesure positive. D'après un théorème de KUTTNER (voir HARDY et ROGOSINKI, *Fourier Series*, « Cambridge Tract », 1950, p. 82), si sur un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure positive $S_n(\varphi,\ x) - \varphi(x) = o(1)$, presque partout sur $\mathcal{E}$ on a aussi $S_n^{\cdot}(\varphi,\ x) - \varphi^{\cdot}(x) = o'(1)$.

Or on a vu que:

$$f^{\cdot}(x) - \sigma_n(f,\ x) = \frac{\varphi(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou

$$f^{\cdot}(x) - S_n(f,\ x) = \frac{\varphi(x) - S_n(\varphi,\ x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

et que:

$$\sigma_n(f,\ x) - f(x) = \frac{\varphi^{\cdot}(x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou

$$S_n(f,\ x) - f(x) = \frac{\varphi^{\cdot}(x) - S_n^{\cdot}(\varphi,\ x)}{n} + o'\left(\frac{1}{n}\right).$$

Supposons que sur $\mathcal{E}$ de mesure positive, $S_n(\varphi,\ x) - \varphi(x) = o(1)$, alors sur $\mathcal{E}$

$S_n^{\cdot}(\varphi,\ x) - \varphi^{\cdot}(x) = o'(1)$ donc $S_n^{\cdot}(f,\ x) - f^{\cdot}(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $S_n(f,\ x) - f(x) = o'\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\alpha > 0$ étant aussi petit qu'on veut, dans $\mathcal{E} \cap E$ existe un ensemble $\mathcal{E}_1$ qu'on peut supposer parfait et dont la mesure est $> \text{mes}\,\mathcal{E} - \alpha$ et tel que sur $\mathcal{E}_1$

$$n[S_n^{\cdot}(f,\ x) - f^{\cdot}(x)] \quad \text{et} \quad n[S_n(f,\ x) - f(x)]$$

tendent vers zéro uniformément en x. Soit $\varepsilon > 0$, il lui correspond un entier $N(\mathcal{E}_1, \varepsilon)$ indépendant de $x \varepsilon \mathcal{E}_1$ tel que si $n > N$

$$n \mid S_n^{\cdot}(f, x) - f^{\cdot}(x) \mid < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n \mid S_n(f, x) - f(x) \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\{ \varepsilon_p \}$ une suite tendant vers zéro pour $p \infty$ telle que $x + \varepsilon_p \varepsilon \mathcal{E}_1$.

On peut lui associer toujours deux nombres positifs A et B et un entier n_p tel que $\frac{A}{n_p} \leq \varepsilon_p < \frac{B}{n_p}$ (par exemple on détermine la suite n_p telle que $\frac{1}{n_p} \leq \varepsilon_p < \frac{1}{n_p + 1} < \frac{2}{n_p}$). On a alors dès que p est assez grand:

$$n_p \mid S_n^{\cdot}(f, x + \varepsilon_p) - f^{\cdot}(x + \varepsilon_p) \mid < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n_p \mid S_{n_p}(f, x) - f(x) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc d'après (15):

$$\varphi(x) = \lim_{p \infty} \frac{1}{2\varepsilon_p} \int_0^{2\varepsilon_p} \frac{f(x + \varepsilon_p + t) - f(x + \varepsilon_p - t)}{2t} dt.$$

La suite ε_p étant quelconque, on énoncera le résultat suivant:

THÉORÈME 8. - *Une condition nécessaire pour que la série de Fourier de* $\varphi(x)$ *converge presque partout vers* $\varphi(x)$ *sur un ensemble* $\mathcal{E}$ *de mesure positive est que*

$$\varphi(x) = \lim_{h=0} \frac{1}{2h} \int_0^{2h} \frac{f(x + h + t) - f(x + h - t)}{2t} dt$$

x *et* $x + h$ *appartenant à un ensemble de même mesure que* $\mathcal{E}$.

Cette condition nécessaire n'est certainement pas très bonne puisqu'elle est satisfait e lorsque' on suppose $\varphi(x)$ continue.