

Equazioni di equilibrio e di congruenza, indefinite ed ai limiti, delle lastre semielastiche a doppia curvatura.

Memoria di OSVALDO ZANABONI (a Bologna).

Sunto. - *Mediante l'appropriata applicazione del principio dei lavori virtuali, usato successivamente nelle due forme variazionali correlative in cui esso può esprimersi, si ricavano le equazioni generali di equilibrio e di congruenza delle lastre curve.*

Nessuna ipotesi viene formulata circa la legge fisica che lega le tensioni alle deformazioni, e circa il modo di comportarsi della normale alla superficie media della lastra durante la deformazione.

La grande ampiezza che assume di conseguenza tutta la trattazione si ripercuote su alcuni risultati già noti, ad esempio sulle condizioni di equilibrio ai limiti per le lastre piane date dal KIRCHHOFF, le quali risultano valide anche senza le due ipotesi fondamentali su cui ne fu basata la deduzione.

Le questioni generali inerenti al modo con cui l'equilibrio e la congruenza, intesi secondo i concetti della Scienza delle costruzioni, si esplicano nelle lastre curve sottili, non hanno trovato frequenti svolgimenti, salvo che per il caso relativamente ristretto delle cupole di rotazione con forze simmetriche rispetto all'asse ⁽¹⁾.

Il caso generale è stato contemplato dal LOVE nel suo classico testo ⁽²⁾, ove, attraverso una faticosa trattazione geometrica, Egli perviene alle equazioni indefinite delle lastre curve esprimendole in una forma non facilmente accessibile.

Le equazioni ai limiti vi sono poi indicate, più che dedotte, colla sola giustificazione di una presumibile lecita trasposizione alle lastre curve della

⁽¹⁾ È praticamente impossibile elencare con esauriente ampiezza le opere e le monografie dedicate a quest'ultimo argomento.

Si vedano ad esempio:

TH. PÖSCHL, *Berechnung von Behältern*, (Springer-Berlino, 1926), cap. III.

W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, (Springer-Berlino, 1934), cap. VII.

O. ZANABONI, *Le equazioni di elasticità delle cupole di rotazione dedotte elementarmente*, (« Atti R. Acc. delle Scienze Torino », vol. 73, 1937-38, pag. 194).

⁽²⁾ A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, (Cambridge, 3^a ed., 1920), cap. XXIV.

nota interpretazione di KELVIN e TAIT delle condizioni ai limiti che il KIRCHHOFF assegnò per le lastre piane.

In ogni modo, dal KIRCHHOFF ai più recenti Autori, chiunque si è finora occupato dell'argomento ha sempre, con dichiarazione più o meno esplicita, basato le proprie deduzioni su tre ipotesi fondamentali: validità della legge di HOOKE, conservazione della normale rettilinea, trascurabilità del lavoro del taglio.

Orbene, insieme allo scopo di assegnare definitivamente e comprensibilmente le equazioni generali di equilibrio e di congruenza delle lastre a doppia curvatura, la nota attuale si propone di mostrare che le prime due ipotesi sono superflue, e che alla terza si debbono le divergenze tra alcune conclusioni e ciò che l'intuizione darebbe come prevedibile.

La rinuncia alle prime due ipotesi assicura ovviamente la validità dei nostri risultati anche per le lastre imperfettamente elastiche.

Tutto il seguente sviluppo si svolgerà come applicazione di alcuni concetti fondamentali introdotti in altra nota ⁽³⁾, dei quali diamo qui un cenno per la parte che ci interessa direttamente.

Si nota infatti che, secondo la Scienza delle costruzioni, l'equilibrio interno ed esterno di una lastra è inteso relativamente a ciascuno dei suoi tronchi infinitesimi che comprendono tutto lo spessore della lastra stessa.

Ed ogni tronco si ritiene equilibrato quando l'equilibrio sussiste tra le forze esterne che lo gravano direttamente ed il complesso delle sue azioni interne.

Se le prime si indicano con P_e , e se con A_i si indicano delle azioni interne capaci di equilibrare nel loro complesso le P_e ; se inoltre si chiamano con η_e , α_i degli spostamenti e delle deformazioni che nel loro insieme diano luogo ad un sistema geometricamente congruente applicabile alla lastra, l'equazione dei lavori virtuali estesa a tutta la sua superficie S si scrive:

$$(1) \quad \int_{(S)} \sum_i A_i \alpha_i dS - \sum_e P_e \eta_e = 0.$$

La prima somma comprende tutte le azioni interne agenti su ogni tronco elementare, e la seconda l'insieme di tutte le forze esterne.

È lecito assumere per η_e , α_i il complesso dei reali spostamenti, e per P_e , A_i una arbitraria ma equilibrata variazione del reale sistema statico che

⁽³⁾ O. ZANABONI, *Introduzione ad una Scienza delle costruzioni assoluta*, (« Ricerche di Ingegneria », Roma, 1943; n. 2).

grava la lastra: in tal caso la precedente equazione contiene in sè le relazioni di congruenza che si possono rendere esplicite trattandola coi metodi del calcolo delle variazioni.

Correlativamente, si può assumere per P_e, A_i il sistema statico effettivo in atto nella struttura, e per η_e, α_i una arbitraria ma congruente variazione dell'effettivo suo stato di deformazione.

Allora la (1) contiene in sè le equazioni di equilibrio che divengono esplicite se essa si tratta coi metodi del calcolo delle variazioni.

Attraverso queste nozioni, il nostro procedimento deduttivo, che nel suo complesso possiede caratteristiche di novità, si svolge nelle sue grandi linee come segue.

Dalla definizione di equilibrio interno ed esterno nel senso voluto dalla Scienza delle costruzioni, si scrivono direttamente le relative equazioni.

Appena in possesso delle relazioni di equilibrio, il principio dei lavori virtuali, usato nella prima forma variazionale ricordata, fornisce automaticamente le equazioni di congruenza.

Da queste, nella particolare ipotesi di trascurabilità del lavoro del taglio, e sotto le opportune cautele per non cadere in un circolo vizioso, lo stesso principio dei lavori virtuali, nella seconda forma variazionale, dà luogo alle nuove equazioni di equilibrio che si addicono a questo caso speciale.

Tutto ciò non richiede ammissioni preliminari sul comportamento fisico del materiale nè su quello della normale alla superficie media della lastra, e perciò resta assodato che i nostri risultati sono spinti fino all'estremo limite della generalizzazione, essendosi fatto uso, in ultima analisi, soltanto della definizione di Scienza delle costruzioni.

Identiche affermazioni stanno per le lastre piane, i cui risultati si ottengono semplicemente particularizzando i precedenti col porre uguali a zero le curvature.

1. Deduzioni geometriche, e considerazioni preliminari. — Stabilito un sistema cartesiano x, y, z , supponiamo che la superficie media S della lastra sia data in forma parametrica:

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v).$$

I parametri u, v costituiscono allora una coppia di coordinate curvilinee individuanti i punti di S .

Per ogni valore di v si determina una curva giacente sulla lastra: essa curva dipende da u , ed il suo elemento d'arco è espresso da:

$$(2) \quad ds_u = du \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = A du.$$

Similmente, per ogni valore di u si determina una curva dipendente da v il cui elemento d'arco è dato da:

$$(3) \quad ds_v = dv \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = Bdv.$$

I coseni direttori di ds_u sono notoriamente:

$$\alpha_x = \frac{\partial x}{\partial s_u} = \frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u}; \quad \alpha_y = \frac{\partial y}{\partial s_u} = \frac{1}{A} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \alpha_z = \frac{\partial z}{\partial s_u} = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial u}$$

mentre quelli di ds_v sono:

$$\beta_x = \frac{\partial x}{\partial s_v} = \frac{1}{B} \frac{\partial x}{\partial v}; \quad \beta_y = \frac{\partial y}{\partial s_v} = \frac{1}{B} \frac{\partial y}{\partial v}; \quad \beta_z = \frac{\partial z}{\partial s_v} = \frac{1}{B} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Le curve u e v si intersecano reciprocamente secondo angoli variabili da punto a punto: è sempre possibile, tuttavia, scegliere i parametri in modo che l'angolo di intersezione sia dovunque retto.

Noi ci poniamo per il seguito precisamente in quest'ultima ipotesi: che le coordinate curvilinee siano ortogonali.

Ciò comporta che sia verificata in ogni punto la nota condizione di perpendicolarità:

$$\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = \Sigma \alpha \beta = 0$$

dalla quale si deduce differenziando:

$$\Sigma \alpha d\beta = - \Sigma \beta d\alpha.$$

Consideriamo in un punto generico le tangenti alle curve u, v e la normale n interna alla superficie S : si ha una terna ortogonale che orientiamo in modo da presentare lo stesso senso giratorio della terna x, y, z .

I coseni direttori di n sono di conseguenza:

$$\gamma_x = \alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y; \quad \gamma_y = \alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z; \quad \gamma_z = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x.$$

Ed'essi verificano le ulteriori relazioni di ortogonalità:

$$\Sigma \alpha \gamma = 0; \quad \Sigma \beta \gamma = 0$$

dalle quali si ricava differenziando:

$$\Sigma \alpha d\gamma = - \Sigma \gamma d\alpha; \quad \Sigma \beta d\gamma = - \Sigma \gamma d\beta.$$

Applichiamoci ora a stabilire alcune relazioni utili per il seguito.

Sul piano tangente ad S , oltre alla coppia di tangenti ad s_u, s_v , giacciono anche le tangenti alle sezioni principali s_1, s_2 , e la prima coppia può riferirsi alla seconda per mezzo dell'angolo θ che s_u fa con s_1 .

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte e dalla figura, nella quale n si immagina diretta verso l'interno del foglio, si deduce:

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial s_u} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_u} + \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial s_u} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} \cos \theta - \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} \sin \theta \\ \frac{\partial \gamma}{\partial s_v} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_v} + \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial s_v} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} \sin \theta + \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} \cos \theta. \end{cases}$$

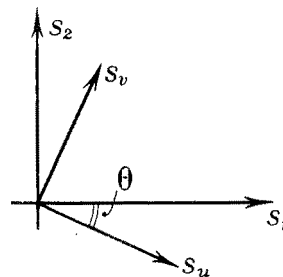


Fig. 1

Analogamente, chiamati ξ_1, ξ_2 i coseni direttori delle tangenti alle sezioni principali:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\partial(\)}{\partial s_u} = \frac{\partial(\)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_u} + \frac{\partial(\)}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial s_u} = \xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \\ \beta = \frac{\partial(\)}{\partial s_v} = \frac{\partial(\)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_v} + \frac{\partial(\)}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial s_v} = \xi_1 \sin \theta + \xi_2 \cos \theta. \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro si ha:

$$\Sigma \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial s_u} = \cos^2 \theta \cdot \Sigma \xi_1 \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} + \sin^2 \theta \cdot \Sigma \xi_2 \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} - \sin \theta \cos \theta \cdot \Sigma \left(\xi_1 \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} + \xi_2 \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} \right)$$

intendendosi le somme come estese ai coseni direttori costituenti le terne rispetto agli assi x, y, z .

Detti R_1, R_2 i raggi principali di curvatura, e ricordato che le sezioni principali essendo piane hanno curvatura di torsione nulla, le formole del FRÉNET danno

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s_1} = - \frac{\xi_1}{R_1}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} = - \frac{\xi_2}{R_2}.$$

Per la $\Sigma \xi^2 = 1$, e per l'ortogonalità tra le sezioni principali, che dà luogo alla $\Sigma \xi_1 \xi_2 = 0$, resta infine:

$$\Sigma \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial s_u} = - \frac{\cos^2 \theta}{R_1} - \frac{\sin^2 \theta}{R_2}.$$

Od anche, detto R_u il raggio di curvatura della sezione normale passante per la tangente ad s_u , ed invocata la formola di EULERO relativa alle curvature delle sezioni normali di una superficie, possiamo concludere:

$$(4) \quad \Sigma \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial s_u} = - \Sigma \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial s_u} = \frac{1}{R_u}.$$

Allo stesso modo si perviene alla formola corrispondente:

$$(5) \quad \Sigma \gamma \frac{\partial \beta}{\partial s_v} = - \Sigma \beta \frac{\partial \gamma}{\partial s_v} = \frac{1}{R_v}$$

essendosi chiamato R_v il raggio di curvatura della sezione normale passante per la tangente ad s_v .

E così pure, sempre moltiplicando membro a membro precedenti relazioni e procedendo colle stesse regole ora impiegate, si trova:

$$(6) \quad \Sigma \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial s_v} = - \Sigma \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial s_v} = \Sigma \gamma \frac{\partial \beta}{\partial s_u} = - \Sigma \beta \frac{\partial \gamma}{\partial s_u} = \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Per ultimo, derivando l'espressione di α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s_u} &= \cos \theta \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial s_u} - \text{sen } \theta \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial s_u} - (\xi_1 \text{sen } \theta + \xi_2 \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial s_u} = \\ &= \cos \theta \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial s_u} - \text{sen } \theta \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial s_u} - \beta \frac{\partial \theta}{\partial s_u}. \end{aligned}$$

Moltiplicando per β e sommando:

$$\begin{aligned} \Sigma \beta \frac{\partial \alpha}{\partial s_u} &= \text{sen } \theta \cos \theta \cdot \Sigma \left(\xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_u} - \xi_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial s_u} \right) + \cos^2 \theta \cdot \Sigma \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_u} - \\ &- \text{sen}^2 \theta \cdot \Sigma \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial s_u} - \frac{\partial \theta}{\partial s_u} \cdot \Sigma \beta^2. \end{aligned}$$

Dalla derivazione delle $\Sigma \xi^2 = 1$ si riconosce che i termini contenuti nella prima somma sono entrambi nulli.

Dalla relazione di ortogonalità $\Sigma \xi_1 \xi_2 = 0$ si deduce $\Sigma \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial s_u} = - \Sigma \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_u}$, mentre d'altro canto si ha $\Sigma \beta^2 = 1$.

Per tutto questo si ottiene:

$$\begin{aligned} \Sigma \beta \frac{\partial \alpha}{\partial s_u} &= - \frac{\partial \theta}{\partial s_u} + \Sigma \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_u} = - \frac{\partial \theta}{\partial s_u} + \cos \theta \cdot \Sigma \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} - \text{sen } \theta \cdot \Sigma \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_2} = \\ &= - \frac{\partial \theta}{\partial s_u} + \cos \theta \cdot \Sigma \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} + \text{sen } \theta \cdot \Sigma \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

In virtù delle formule del FRÉNET, $\frac{\partial \xi_1}{\partial s_1}$ e $\frac{\partial \xi_2}{\partial s_2}$ sono rispettivamente proporzionali ai coseni direttori della normale alle sezioni principali, la quale coincide colla normale alla superficie.

Essendo questa perpendicolare alle tangenti alle sezioni principali, le due somme sono nulle, e rimane in definitiva:

$$(7) \quad \Sigma \alpha \frac{\partial \beta}{\partial s_u} = - \Sigma \beta \frac{\partial \alpha}{\partial s_u} = \frac{\partial \theta}{\partial s_u} = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

In modo del tutto analogo si ottiene la relazione corrispondente:

$$(8) \quad \Sigma \alpha \frac{\partial \beta}{\partial s_v} = - \Sigma \beta \frac{\partial \alpha}{\partial s_v} = \frac{\partial \theta}{\partial s_v} = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Ciò premesso, esaminiamo la situazione statica della struttura, con riguardo ad un suo elemento superficiale di lati ds_u , ds_v , con area $ds_u \cdot ds_v = ABdudv$.

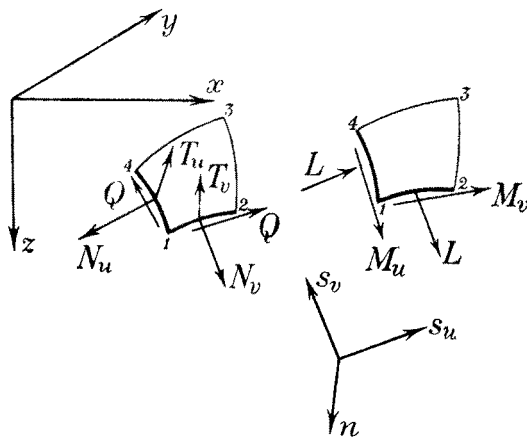


Fig. 2

Lungo i lati di esso agiscono le consuete azioni interne unitarie, a proposito delle quali valgono le seguenti osservazioni.

1) Tanto i due momenti torcenti nelle direzioni ortogonali quanto gli sforzi di scorrimento Q giacenti nel piano tangente alla lastra sono uguali tra di loro, a cagione dell'uguaglianza delle tensioni tangenziali che concorrono nello spigolo comune a due faccie consecutive del tronco corrispondente all'elemento superficiale ⁽⁴⁾.

I sensi delle azioni interne L , Q sono appunto stati posti nella fig. 2 in obbedienza al principio di reciprocità delle tensioni tangenziali.

2) I momenti flettenti situati nel piano tangente alla lastra sono nulli, dato che le tensioni normali si debbono considerare come uniformemente

⁽⁴⁾ L'affermazione non è rigorosamente esatta in conseguenza della forma trapezia delle faccie laterali del tronco elementare (originata dalla curvatura) e della disuniforme distribuzione delle tensioni tangenziali entro lo spessore della lastra.

Quanto viene assunto nel testo è tuttavia comunemente accettato, e conduce certamente ad errori trascurabili se lo spessore, come si deve ammettere per rimanere nell'ambito della Scienza delle costruzioni, è sufficientemente piccolo.

Per maggiori chiarimenti si veda:

W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, (Springer, Berlino), pag. 112 e seg.; pag. 147.

distribuite lungo le parallele ai lati dell'elemento, per l'infinitesimalità di questi.

Per ciò che si è ora osservato, le azioni interne su ds_u si riducono a: sforzo assiale N_v , taglio T_v , sforzo di scorrimento Q , momento flettente M_v , momento torcente L .

Sul lato ds_v si hanno corrispettivamente le azioni interne: N_u , T_u , Q , M_u , L .

In tutto, otto azioni interne che sono state indicate in figura coi sensi prescelti come positivi: le coppie sono state rappresentate mediante il loro asse-momento, in base al senso giratorio destrorso.

Per quanto non segnate in figura, si deve supporre che sull'elemento agiscano anche una coppia ed una forza esterne, di intensità superficiale rispettivamente C e p , delle quali considereremo le componenti secondo la terna x, y, z , oppure secondo la s_u, s_v, n .

I sensi positivi di tali componenti si ammettono coincidenti con quelli dei corrispondenti assi.

2. Equazioni indefinite di equilibrio. — Le azioni interne che si considerano sono unitarie: ne viene che le forze totali agenti sul lato 1, 2 sono: Qds_u, N_vds_u, T_vds_u .

Le rispettive componenti secondo x si ottengono moltiplicando per i coseni degli angoli di s_u, s_v, n con x , e perciò, tenuto conto degli orientamenti preventivamente stabiliti, sono: $Q\alpha_x Adu, -N_v\beta_x Adu, -T_v\gamma_x Adu$.

Le analoghe componenti sul lato 3, 4 sono queste stesse aumentate del proprio differenziale rispetto ad s_v (o meglio rispetto a v poichè questa è la variabile indipendente che qui interviene) e cambiate di segno.

Sommando le componenti secondo x dei lati 1, 2; 3, 4; si ottiene dunque:

$$- du \cdot dv \cdot \frac{\partial}{\partial v} [A(Q\alpha_x - N_v\beta_x - T_v\gamma_x)].$$

Le forze sul lato 1, 4 sono: $Qds_v, N_u ds_v, T_u ds_v$; le loro componenti secondo x sono: $Q\beta_x Bdv, -N_u\alpha_x Bdv, -T_u\gamma_x Bdv$.

Sommando colle componenti secondo x delle forze su 2, 3; si ottiene in modo simile al precedente:

$$- du \cdot dv \cdot \frac{\partial}{\partial u} [B(Q\beta_x - N_u\alpha_x - T_u\gamma_x)].$$

La componente della forza esterna secondo x è: $p_x ds_u ds_v = p_x ABdudv$; possiamo dunque scrivere la prima equazione di equilibrio alla traslazione;

e con essa, per analogia, anche le altre due che si otterrebbero proiettando su y o su z :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} [B(Q\beta_x - N_u\alpha_x - T_u\gamma_x)] + \frac{\partial}{\partial v} [A(Q\alpha_x - N_v\beta_x - T_v\gamma_x)] = ABp_x \\ \frac{\partial}{\partial u} [B(Q\beta_y - N_u\alpha_y - T_u\gamma_y)] + \frac{\partial}{\partial v} [A(Q\alpha_y - N_v\beta_y - T_v\gamma_y)] = ABp_y \\ \frac{\partial}{\partial u} [B(Q\beta_z - N_u\alpha_z - T_u\gamma_z)] + \frac{\partial}{\partial v} [A(Q\alpha_z - N_v\beta_z - T_v\gamma_z)] = ABp_z. \end{cases}$$

Per stabilire le equazioni di equilibrio alla rotazione, osserviamo che su 1, 2 agiscono le coppie $M_v ds_u$, $L ds_u$ che, proiettate su x , danno $M_v \alpha_x Adu$, $-L \beta_x Adu$; mentre su 3, 4 si hanno le stesse componenti aumentate del proprio differenziale secondo v , e cambiate di segno.

In totale:

$$- dudv \cdot \frac{\partial}{\partial v} [A(-L\beta_x + M_v\alpha_x)].$$

Per quanto riguarda i lati 1, 4; 2, 3: risulta con identico procedimento:

$$- dudv \cdot \frac{\partial}{\partial u} [B(L\alpha_x - M_u\beta_x)].$$

Per di più, preso come centro di riduzione delle forze il punto 3, il taglio T_v dà il momento $T_v ds_u ds_v$ diretto come s_u , mentre il taglio T_u dà il momento $T_u ds_v ds_u$ diretto al contrario di s_v .

Proiettando su x si ottengono le componenti di queste nuove coppie: $T_v \alpha_x ABdudv$ e $-T_u \beta_x ABdudv$.

Le forze N e Q danno rispetto a 3 dei momenti infinitesimi di ordine superiore, che si trascurano.

La coppia esterna si proietta su x con $C_x ds_u ds_v$, e quindi, sommando, abbiamo la prima equazione di equilibrio alla rotazione.

Permutando gli indici otteniamo anche le altre due:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} [B(L\alpha_x - M_u\beta_x)] - \frac{\partial}{\partial v} [A(L\beta_x - M_v\alpha_x)] + AB(T_u\beta_x - T_v\alpha_x) = ABC_x \\ \frac{\partial}{\partial u} [B(L\alpha_y - M_u\beta_y)] - \frac{\partial}{\partial v} [A(L\beta_y - M_v\alpha_y)] + AB(T_u\beta_y - T_v\alpha_y) = ABC_y \\ \frac{\partial}{\partial u} [B(L\alpha_z - M_u\beta_z)] - \frac{\partial}{\partial v} [A(L\beta_z - M_v\alpha_z)] + AB(T_u\beta_z - T_v\alpha_z) = ABC_z. \end{cases}$$

In tutto si sono trovate sei equazioni di equilibrio per otto componenti dell'azione interna: la lastra a doppia curvatura contiene quindi due indeterminazioni statiche interne.

Possono interessare le equazioni di equilibrio relative a componenti delle forze esterne diverse da quelle finora considerate: segnatamente quelle secondo la terna variabile costituita dalle tangenti ad s_u , s_v e dalla normale n ad S .

Chiamate p_u , p_v , p_n ; C_u , C_v , C_n , le nuove componenti esterne, stanno le ovvie relazioni:

$$\begin{cases} p_u = p_x \alpha_x + p_y \alpha_y + p_z \alpha_z \\ p_v = p_x \beta_x + p_y \beta_y + p_z \beta_z \\ p_n = p_x \gamma_x + p_y \gamma_y + p_z \gamma_z \end{cases} \quad \begin{cases} C_u = C_x \alpha_x + C_y \alpha_y + C_z \alpha_z \\ C_v = C_x \beta_x + C_y \beta_y + C_z \beta_z \\ C_n = C_x \gamma_x + C_y \gamma_y + C_z \gamma_z. \end{cases}$$

Sostituite in queste le (9), (10), dopo evidenti riduzioni basate sulle relazioni di ortogonalità, sulle espressioni di ds_u , ds_v , e sulla diretta applicazione delle (4), (5), (6), (7), (8), si ottengono le equazioni di equilibrio nella nuova forma:

$$(11) \quad \begin{cases} -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BN_u)}{\partial u} - \frac{\partial(AQ)}{\partial v} \right] + \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \frac{Q}{A} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \frac{N_v}{B} + \frac{T_u}{R_u} + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) T_v = p_u \\ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BQ)}{\partial u} - \frac{\partial(AN_v)}{\partial v} \right] + \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \frac{N_u}{A} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \frac{Q}{B} + \frac{T_v}{R_v} + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) T_u = p_v \\ -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BT_u)}{\partial u} + \frac{\partial(AT_v)}{\partial v} \right] - \frac{N_u}{R_u} + \frac{N_v}{R_v} + \text{sen } 2\theta \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Q = p_n; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BL)}{\partial u} + \frac{\partial(AM_v)}{\partial v} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \frac{M_u}{A} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \frac{L}{B} - T_v = C_u \\ -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_u)}{\partial u} + \frac{\partial(AL)}{\partial v} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \frac{L}{A} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \frac{M_v}{B} + T_u = C_v \\ \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (M_v - M_u) + \left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_v} \right) L = C_n. \end{cases}$$

Queste, a differenza delle precedenti, non dipendono dal sistema esterno di riferimento, essendo contenute in esse soltanto le caratteristiche geometriche intrinseche della superficie media della lastra e quelle delle coordinate curvilinee prescelte.

Immediata è di qui la deduzione delle equazioni per le lastre piane: basterà notare che u , v , n coincidono in tal caso con x , y , z ; che $A=B=1$; che i raggi di curvatura sono infiniti; e che θ è costantemente uguale a zero.

Per sostituzione nelle (11), (12) si hanno subito le note relazioni inerenti a questo notevole caso particolare:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial N_x}{\partial x} = p_x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial N_y}{\partial y} = p_y \\ -\frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} = p_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = C_x \\ -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} + T_x = C_y \\ C_z = 0. \end{cases}$$

Nel caso delle lastre piane risultano dunque separate, nelle prime due equazioni, le tre azioni interne giacenti nel piano della struttura, e nelle tre ultime equazioni le cinque azioni perpendicolari al piano stesso.

Di fronte alle prime la lastra piana è dunque una sola volta staticamente indeterminata; mentre lo è doppiamente di fronte alle altre.

3. Equazioni di equilibrio ai limiti. — Un elemento qualsiasi ds del contorno s della lastra a doppia curvatura, incontra generalmente l'arco coordinato s_u sotto un angolo ω : l'elemento superficiale al bordo è dunque di forma triangolare e giace nel piano tangente alla superficie nel punto considerato.

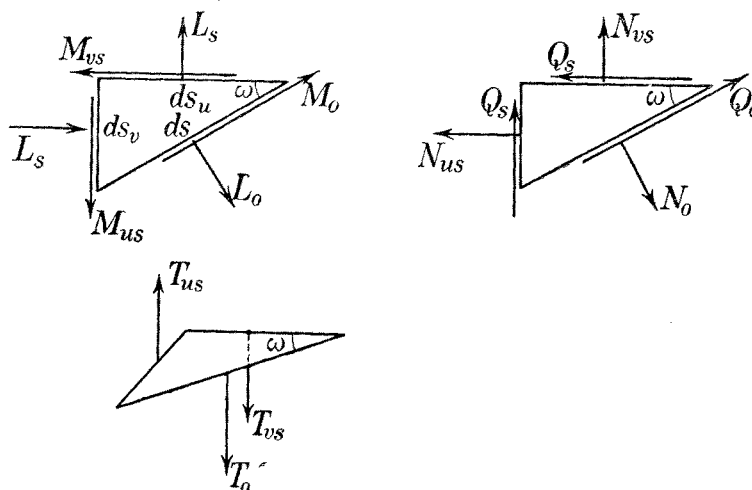


Fig. 3

Definito il contorno mediante le coordinate cartesiane x_s, y_s, z_s dei suoi punti, i coseni direttori di ds sono:

$$(13) \quad \begin{cases} \mu_x = \frac{dx_s}{ds} = \left[\frac{\partial x}{\partial s_u} \frac{ds_u}{ds} + \frac{\partial x}{\partial s_v} \frac{ds_v}{ds} \right]_s = \alpha_{xs} \cos \omega + \beta_{xs} \sin \omega \\ \mu_y = \frac{dy_s}{ds} = \alpha_{ys} \cos \omega + \beta_{ys} \sin \omega \\ \mu_z = \frac{dz_s}{ds} = \alpha_{zs} \cos \omega + \beta_{zs} \sin \omega. \end{cases}$$

La normale α interna al contorno, situata pure essa nel piano tangente alla lastra, possiede invece i coseni direttori:

$$(14) \quad \begin{cases} \nu_x = \frac{dx_s}{d\alpha} = \left[\frac{\partial x}{\partial s_u} \frac{ds_u}{d\alpha} + \frac{\partial x}{\partial s_v} \frac{ds_v}{d\alpha} \right]_s = -\alpha_{xs} \sin \omega + \beta_{xs} \cos \omega \\ \nu_y = \frac{dy_s}{d\alpha} = -\alpha_{ys} \sin \omega + \beta_{ys} \cos \omega \\ \nu_z = \frac{dz_s}{d\alpha} = -\alpha_{zs} \sin \omega + \beta_{zs} \cos \omega. \end{cases}$$

Sui cateti dell'elemento superficiale sono applicate le note azioni interne, cui diamo l'indice s per indicare che le consideriamo nel loro valore al contorno.

Sulla ipotenusa dell'elemento compaiono invece le forze e coppie N_0, T_0, Q_0, M_0, L_0 , che si debbono intendere provenienti dall'esterno qualora si immagini la lastra totalmente svincolata al bordo: i sensi positivi di queste ultime risultano dalla fig. 3.

L'equilibrio alla rotazione dell'elemento superficiale al contorno si esprime annullando le complessive proiezioni degli assi-momento secondo s e secondo a .

Dalla figura si deduce:

$$\begin{cases} M_0 ds + L_s ds_{us} \cdot \sin \omega + L_s ds_{vs} \cdot \cos \omega - M_{vs} ds_{us} \cdot \cos \omega - M_{us} ds_{vs} \cdot \sin \omega = 0 \\ L_0 ds - L_s ds_{us} \cdot \cos \omega + L_s ds_{vs} \cdot \sin \omega - M_{vs} ds_{us} \cdot \sin \omega + M_{us} ds_{vs} \cdot \cos \omega = 0. \end{cases}$$

Per mezzo delle ovvie relazioni:

$$(15) \quad \begin{cases} ds_{us} = ds \cdot \cos \omega \\ ds_{vs} = ds \cdot \sin \omega \end{cases}$$

si ottiene riducendo:

$$(16) \quad \begin{cases} M_0 = M_{vs} \cos^2 \omega + M_{us} \sin^2 \omega - 2L_s \sin \omega \cos \omega \\ L_0 = (M_{vs} - M_{us}) \sin \omega \cos \omega + L_s (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega). \end{cases}$$

Le equazioni di equilibrio alla traslazione relativamente ad s ed a , si ottengono con analogo procedimento, e risultano:

$$(17) \quad \begin{cases} N_0 = N_{us} \sin^2 \omega + N_{vs} \cos^2 \omega + 2Q_s \sin \omega \cos \omega \\ Q_0 = (N_{us} - N_{vs}) \sin \omega \cos \omega + Q_s (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega). \end{cases}$$

Resta infine da assicurare l'equilibrio alla traslazione secondo T_0 : colla scorta della figura si deduce subito:

$$T_0 ds - T_{us} ds_{vs} + T_{vs} ds_{us} = 0.$$

E quindi:

$$(18) \quad T_0 = T_{us} \sin \omega - T_{vs} \cos \omega.$$

4. Equazioni di congruenza. — Siano $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ le componenti secondo gli assi coordinati della effettiva rotazione in un punto generico della lastra; e $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ le rotazioni al bordo secondo M_0, L_0 .

Siano inoltre w_x, w_y, w_z gli spostamenti effettivi generici secondo x, y, z ; e w_{01}, w_{02}, w_{03} quelli al bordo secondo Q_0, N_0, T_0 .

Tutte le φ e le w si suppongono positive se dirette come le corrispondenti coppie e forze, i cui sensi positivi furono già assegnati nei paragrafi precedenti.

Siano infine $m_u, m_v; l; t_u, t_v; q; n_u, n_v$ le effettive deformazioni riferentesi ordinatamente ai due momenti flettenti, al momento torcente, ai due sforzi taglianti, allo sforzo di scorrimento, ai due sforzi assiali.

L'equazione dei lavori virtuali (1) nella prima forma variazionale, scritta cioè per la reale condizione di deformazione e per una arbitraria ma equilibrata variazione δ conferita al sistema statico complessivo in atto nella struttura, quale risulta dall'analisi compiuta nei precedenti paragrafi, si esprime con:

$$\begin{aligned} & \int\int_{(S)} (m_u \delta M_u + m_v \delta M_v + l \delta L + t_u \delta T_u + t_v \delta T_v + q \delta Q + n_u \delta N_u + n_v \delta N_v) A B d u d v \\ & - \int\int_{(S)} (w_x \delta p_x + w_y \delta p_y + w_z \delta p_z + \varphi_x \delta C_x + \varphi_y \delta C_y + \varphi_z \delta C_z) A B d u d v - \\ & - \int_{(s)} (\varphi_{01} \delta M_0 + \varphi_{02} \delta L_0 + w_{01} \delta Q_0 + w_{02} \delta N_0 + w_{03} \delta T_0) d s = 0. \end{aligned}$$

Questa, come si è ricordato nell'introduzione, comprende in sé tutte le relazioni di congruenza, le quali possono rendersi esplicite in seguito ad opportuno trattamento dell'equazione stessa.

A questo scopo facciamo notare che le variazioni che qui compaiono sono per ipotesi equilibrate, e valgono pertanto nei loro riguardi le equazioni (9), (10), che possono scriversi sinteticamente:

$$\begin{cases} A B \delta p = \frac{\partial(B \delta G)}{\partial u} + \frac{\partial(A \delta H)}{\partial v} \\ A B \delta C = \frac{\partial(B \delta K)}{\partial u} - \frac{\partial(A \delta I)}{\partial v} + A B (\beta \delta T_u - \alpha \delta T_v). \end{cases}$$

Con G, H, K, I si sono qui indicati i vari polinomi che compaiono nelle (9), (10) sotto i segni di derivazione come fattori di A e B .

Si è posto cioè:

$$(19) \quad \begin{cases} \delta G = \beta \delta Q - \alpha \delta N_u - \gamma \delta T_u \\ \delta H = \alpha \delta Q - \beta \delta N_v - \gamma \delta T_v \\ \delta K = \alpha \delta L - \beta \delta M_u \\ \delta I = \beta \delta L - \alpha \delta M_v. \end{cases}$$

Per mezzo delle ricordate relazioni di equilibrio, si possono eliminare dall'equazione dei lavori virtuali tutte le componenti esterne che agiscono sulla superficie della lastra.

Si ha, eseguendo:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} [m_u \delta M_u + m_v \delta M_v + l \delta L + (t_u - \Sigma \beta \varphi) \delta T_u + (t_v + \Sigma \alpha \varphi) \delta T_v + \\ & + q \delta Q + n_u \delta N_u + n_v \delta N_v] A B d u d v - \\ & - \iint_{(S)} \Sigma \left[w \frac{\partial (B \delta G)}{\partial u} + \varphi \frac{\partial (B \delta K)}{\partial u} + w \frac{\partial (A \delta H)}{\partial v} - \varphi \frac{\partial (A \delta I)}{\partial v} \right] d u d v - \\ & - \int_{(S)} (\varphi_{01} \delta M_0 + \varphi_{02} \delta L_0 + w_{01} \delta Q_0 + w_{02} \delta N_0 + w_{03} \delta T_0) d s = 0. \end{aligned}$$

Le somme si intendono estese alle rispettive tre componenti secondo gli assi coordinati.

Il secondo integrale è suscettibile di trasformazione: infatti esso è uguale a:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} \Sigma \left[\frac{\partial}{\partial u} (B w \delta G + B \varphi \delta K) + \frac{\partial}{\partial v} (A w \delta H - A \varphi \delta I) \right] d u d v - \\ & - \iint_{(S)} \Sigma \left(B \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \delta G + B \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \delta K + A \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \delta H - A \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \delta I \right) d u d v. \end{aligned}$$

A sua volta, il primo di questi recenti integrali può utilmente trasformarsi; e precisamente può tramutarsi in integrale al contorno per mezzo delle notissime formule di GREEN.

In base a queste, e tenute presenti le (2), (3), (15), si ricava successivamente che l'integrale nominato per ultimo è uguale a:

$$\begin{aligned} & \int_{(S)} [(w \delta G + \varphi \delta K) B d v - (w \delta H - \varphi \delta I) A d v]_s = \\ & = \int_{(S)} \Sigma [(w_s \delta G_s + \varphi_s \delta K_s) d s_v - (w_s \delta H_s - \varphi_s \delta I_s) d s_u]_s = \\ & = \int_{(S)} \Sigma [(w_s \delta G_s + \varphi_s \delta K_s) \text{sen } \omega - (w_s \delta H_s - \varphi_s \delta I_s) \text{cos } \omega] d s. \end{aligned}$$

Con tutto ciò, la nostra equazione dei lavori virtuali diviene:

$$\begin{aligned} & \iint_{(S)} [m_u \delta M_u + m_v \delta M_v + l \delta L + (t_u - \Sigma \beta \varphi) \delta T_u + (t_v + \Sigma \alpha \varphi) \delta T_v + \\ & + q \delta Q + n_u \delta N_u + n_v \delta N_v + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{A} \Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial u} \delta G + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \delta K \right) + \frac{1}{B} \Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial v} \delta H - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta I \right) \Big] AB du dv - \\
 & - \int_{(s)} [\varphi_{01} \delta M_0 + \varphi_{02} \delta L_0 + w_{01} \delta Q_0 + w_{02} \delta N_0 + w_{03} \delta T_0 + \\
 & + \text{sen } \omega \cdot \Sigma (w_s \delta G_s + \varphi_s \delta K_s) - \text{cos } \omega \cdot \Sigma (w_s \delta H_s - \varphi_s \delta I_s)] ds = 0.
 \end{aligned}$$

Resta ora semplicemente da sostituire a δG , δH , δK , δI le loro espressioni in base alle (19), e così pure da sostituire alle componenti al contorno le loro espressioni in base alle equazioni di equilibrio ai limiti.

Eseguite le facilissime riduzioni, si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & \int \int_{(s)} \left[\left(m_u - \frac{1}{A} \Sigma \beta \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \delta M_u + \left(m_v + \frac{1}{B} \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \delta M_v + \left(l + \frac{1}{A} \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{B} \Sigma \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \delta L + \right. \\
 & + \left(t_u - \Sigma \beta \varphi - \frac{1}{A} \Sigma \gamma \frac{\partial w}{\partial u} \right) \delta T_u + \left(t_v + \Sigma \alpha \varphi - \frac{1}{B} \Sigma \gamma \frac{\partial w}{\partial v} \right) \delta T_v + \\
 & + \left(q + \frac{1}{A} \Sigma \beta \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{B} \Sigma \alpha \frac{\partial w}{\partial v} \right) \delta Q + \left(n_u - \frac{1}{A} \Sigma \alpha \frac{\partial w}{\partial u} \right) \delta N_u + \\
 & \left. + \left(n_v - \frac{1}{B} \Sigma \beta \frac{\partial w}{\partial v} \right) \delta N_v \right] AB du dv - \\
 & - \int_{(s)} [(\varphi_{01} \text{sen } \omega - \varphi_{02} \text{cos } \omega - \Sigma \beta_s \varphi_s)(\text{sen } \omega \cdot \delta M_{us} - \text{cos } \omega \cdot \delta L_s) + \\
 & + (\varphi_{01} \text{cos } \omega + \varphi_{02} \text{sen } \omega - \Sigma \alpha_s \varphi_s)(\text{cos } \omega \cdot \delta M_{vs} - \text{sen } \omega \cdot \delta L_s) + \\
 & + (w_{01} \text{cos } \omega + w_{02} \text{sen } \omega - \Sigma \alpha_s w_s)(\text{sen } \omega \cdot \delta N_{us} + \text{cos } \omega \cdot \delta Q_s) - \\
 & - (w_{01} \text{sen } \omega - w_{02} \text{cos } \omega - \Sigma \beta_s w_s)(\text{cos } \omega \cdot \delta N_{vs} + \text{sen } \omega \cdot \delta Q_s) + \\
 & + (w_{03} - \Sigma \gamma_s w_s)(\text{sen } \omega \cdot \delta T_{us} - \text{cos } \omega \cdot \delta T_{vs})] ds = 0.
 \end{aligned}$$

Poichè a questo punto sono state usate tutte le relazioni di equilibrio, le δ che qui compaiono sono tra di loro ormai indipendenti, e perciò anche completamente arbitrarie.

Affinchè si realizzi l'indispensabile condizione della validità della precedente equazione qualunque siano le δ applicate, occorre, secondo gli elementi del calcolo delle variazioni, che si annullino contemporaneamente tutti i coefficienti delle variazioni stesse sotto entrambi gli integrali (5).

(5) E. PASCAL, *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite*, (Hoepli, Milano).

Dall'annullarsi dei coefficienti entro l'integrale di superficie si ricavano le equazioni indefinite di congruenza, le quali, una volta sviluppate le sommatorie, si riducono a :

$$(21) \quad \begin{cases} m_u = \frac{1}{A} \left(\beta_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} + \beta_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} + \beta_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial u} \right) \\ m_v = -\frac{1}{B} \left(\alpha_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} + \alpha_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} + \alpha_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial v} \right) \\ l = -\frac{1}{A} \left(\alpha_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial u} + \alpha_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial u} + \alpha_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial u} \right) + \frac{1}{B} \left(\beta_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial v} + \beta_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial v} + \beta_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial v} \right), \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} t_u = \beta_x \varphi_x + \beta_y \varphi_y + \beta_z \varphi_z + \frac{1}{A} \left(\gamma_x \frac{\partial w_x}{\partial u} + \gamma_y \frac{\partial w_y}{\partial u} + \gamma_z \frac{\partial w_z}{\partial u} \right) \\ t_v = -\alpha_x \varphi_x - \alpha_y \varphi_y - \alpha_z \varphi_z + \frac{1}{B} \left(\gamma_x \frac{\partial w_x}{\partial v} + \gamma_y \frac{\partial w_y}{\partial v} + \gamma_z \frac{\partial w_z}{\partial v} \right), \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} n_u = \frac{1}{A} \left(\alpha_x \frac{\partial w_x}{\partial u} + \alpha_y \frac{\partial w_y}{\partial u} + \alpha_z \frac{\partial w_z}{\partial u} \right) \\ n_v = \frac{1}{B} \left(\beta_x \frac{\partial w_x}{\partial v} + \beta_y \frac{\partial w_y}{\partial v} + \beta_z \frac{\partial w_z}{\partial v} \right) \\ q = -\frac{1}{A} \left(\beta_x \frac{\partial w_x}{\partial u} + \beta_y \frac{\partial w_y}{\partial u} + \beta_z \frac{\partial w_z}{\partial u} \right) - \frac{1}{B} \left(\alpha_x \frac{\partial w_x}{\partial v} + \alpha_y \frac{\partial w_y}{\partial v} + \alpha_z \frac{\partial w_z}{\partial v} \right). \end{cases}$$

Siamo così pervenuti ad otto equazioni che legano sei componenti di spostamento esterno: in esse sono dunque contenute implicitamente due relazioni, esclusivamente tra le deformazioni, le quali si otterrebbero in modo esplicito eliminando le φ e le w .

Se, come è lecito, le m , l , t , n , q si ammettono funzioni delle azioni interne, le due relazioni di cui si tratta sono quelle che consentono di risolvere la doppia indeterminazione statica insita nella struttura che stiamo studiando.

Infatti, unendovi le sei equazioni indefinite di equilibrio, si ottengono otto relazioni tra altrettante azioni interne.

Ancora nell'ipotesi di considerare le deformazioni come legate alle azioni interne, le (21), (22), (23) costituiscono le equazioni differenziali della superficie deformata.

E poichè le (22) legano gli spostamenti non soltanto alle rotazioni ma anche ai termini t , ne segue che le φ non possono coincidere colle rotazioni geometriche della superficie deformata se non nel caso in cui sia $t=0$; cioè se il lavoro del taglio viene trascurato.

Questo conferma una conclusione generale ricavata altrove⁽⁶⁾, secondo

(6) Vedi la nota citata in (3).

la quale i parametri di deformazione che compaiono nelle equazioni di congruenza non si riferiscono agli spostamenti della superficie media, ma a quelli delle sue normali supposte come conservantisi rettilinee.

Per analogia con quanto fu fatto per le equazioni di equilibrio, è interessante trasformare anche quelle di congruenza facendovi comparire le componenti di spostamento secondo la terna variabile costituita dalle tangenti ad s_u , s_v e dalla normale n ad S .

Per semplice composizione vettoriale si hanno le evidenti relazioni:

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi_x = \alpha_x \varphi_u + \beta_x \varphi_v + \gamma_x \varphi_n \\ \varphi_y = \alpha_y \varphi_u + \beta_y \varphi_v + \gamma_y \varphi_n \\ \varphi_z = \alpha_z \varphi_u + \beta_z \varphi_v + \gamma_z \varphi_n \end{cases} \quad (25) \quad \begin{cases} w_x = \alpha_x w_u + \beta_x w_v + \gamma_x w_n \\ w_y = \alpha_y w_u + \beta_y w_v + \gamma_y w_n \\ w_z = \alpha_z w_u + \beta_z w_v + \gamma_z w_n \end{cases}$$

Fatte le sostituzioni in (21), (22), (23), ed eseguite le riduzioni coll'aiuto delle (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), si trova in breve:

$$(26) \quad \begin{cases} m_u = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \varphi_u \right) - \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \varphi_n \\ m_v = -\frac{1}{B} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \varphi_v \right) + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \varphi_n \\ l = -\frac{1}{A} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \varphi_v \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot \varphi_u \right) + \left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_v} \right) \varphi_n \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} t_u = \varphi_v + \frac{1}{A} \frac{\partial w_u}{\partial u} + \frac{1}{R_u} w_u + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) w_v \\ t_v = -\varphi_u + \frac{1}{B} \frac{\partial w_u}{\partial v} + \frac{1}{R_v} w_v + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) w_u \end{cases}$$

$$(28) \quad \begin{cases} n_u = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial w_u}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot w_v \right) - \frac{1}{R_u} w_n \\ n_v = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial w_v}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot w_u \right) - \frac{1}{R_v} w_n \\ q = -\frac{1}{A} \left(\frac{\partial w_v}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot w_u \right) - \frac{1}{B} \left(\frac{\partial w_u}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot w_v \right) + \text{sen } 2\theta \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) w_n \end{cases}$$

In questa forma le equazioni di congruenza non dipendono dal sistema esterno di riferimento, contenendo esse ormai le sole caratteristiche geometriche intrinseche della lastra, e quelle delle coordinate curvilinee prescelte.

Per avere di qui le equazioni delle lastre piane, è sufficiente ricordare che in tal caso le u, v, n coincidono con x, y, z ; che $A = B = 1$; che i raggi di curvatura divengono infiniti; e che θ è identicamente nullo.

Praticate le sostituzioni, si ha all'istante:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_x = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ m_y = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ l = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ t_x = \varphi_y + \frac{\partial w_x}{\partial x} \\ t_y = -\varphi_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x = \frac{\partial w_x}{\partial x} \\ n_y = \frac{\partial w_y}{\partial y} \\ q = -\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Si verifica qui lo stesso caso delle corrispondenti equazioni di equilibrio: le componenti di spostamento giacenti nel piano della lastra sono cioè nettamente separate da quelle perpendicolari al piano stesso.

In questo caso particolare è anche molto facile eliminare le φ e le w : infatti dopo qualche derivazione si ottiene:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(l + \frac{\partial t_x}{\partial y} - \frac{\partial t_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial m_y}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(l - \frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} = 0. \end{array} \right.$$

Mediante queste è risolta l'iperstaticità interna contenuta nella lastra piana.

Esaurite con ciò le questioni relative alle equazioni indefinite, restano da esprimere le condizioni di congruenza ai limiti.

Queste si ricavano annullando i coefficienti delle variazioni arbitrarie entro l'integrale al contorno che appare nell'equazione dei lavori virtuali nella forma (20).

Possiamo dunque scrivere:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{01} \operatorname{sen} \omega - \varphi_{02} \operatorname{cos} \omega = \Sigma \beta_s \varphi_s \\ \varphi_{01} \operatorname{cos} \omega + \varphi_{02} \operatorname{sen} \omega = \Sigma \alpha_s \varphi_s \\ w_{01} \operatorname{cos} \omega + w_{02} \operatorname{sen} \omega = \Sigma \alpha_s w_s \\ w_{01} \operatorname{sen} \omega - w_{02} \operatorname{cos} \omega = \Sigma \beta_s w_s \\ w_{03} = \Sigma \gamma_s w_s. \end{array} \right.$$

Di qui si possono ricavare esplicitamente φ_{01} , φ_{02} , w_{01} , w_{02} , w_{03} .

Sviluppate infatti le sommatorie e ricordate le (13), (14) si ottiene:

$$\begin{cases} \varphi_{01} = \mu_x \varphi_{xx} + \mu_y \varphi_{yy} + \mu_z \varphi_{zz} \\ \varphi_{02} = -\nu_x \varphi_{xx} - \nu_y \varphi_{yy} - \nu_z \varphi_{zz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{01} = \mu_x w_{xx} + \mu_y w_{yy} + \mu_z w_{zz} \\ w_{02} = -\nu_x w_{xx} - \nu_y w_{yy} - \nu_z w_{zz} \\ w_{03} = \gamma_{xx} w_{xx} + \gamma_{yy} w_{yy} + \gamma_{zz} w_{zz} . \end{cases}$$

In questa forma le relazioni di congruenza ai limiti si interpretano assai facilmente: le w_{01} , w_{02} , w_{03} risultano uguali agli spostamenti totali al contorno proiettati rispettivamente sulla tangente a questo, sulla sua normale esterna, e sulla normale alla superficie media della lastra.

Le rotazioni φ_{01} , φ_{02} uguagliano le proiezioni della rotazione totale al contorno sulla sua tangente e sulla sua normale esterna.

Se nei secondi membri delle (30) introduciamo le (24), (25), che, essendo valide in ogni punto della lastra, valgono anche al bordo, ricaviamo le equazioni ai limiti espresse secondo la terna u , v , n :

$$(31) \quad \begin{cases} \varphi_{vs} = \varphi_{01} \operatorname{sen} \omega - \varphi_{02} \operatorname{cos} \omega \\ \varphi_{us} = \varphi_{01} \operatorname{cos} \omega + \varphi_{02} \operatorname{sen} \omega \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} w_{us} = w_{01} \operatorname{cos} \omega + w_{02} \operatorname{sen} \omega \\ w_{vs} = w_{01} \operatorname{sen} \omega - w_{02} \operatorname{cos} \omega \\ w_{ns} = w_{03} . \end{cases}$$

Queste ripetono manifestamente l'interpretazione che si è data poc' anzi.

5. Equazioni di congruenza nell'ipotesi della trascurabilità del lavoro del taglio. — In omaggio alla consuetudine, assai diffusa, di condurre gli svolgimenti di carattere energetico ammettendo la trascurabilità del lavoro del taglio, è opportuno esaminare quale influenza nei risultati finali è dovuta a questa particolare ipotesi.

Per questo scopo possiamo procedere con metodo sintetico, esaminando in blocco quali cambiamenti verrebbero introdotti nelle deduzioni del paragrafo precedente qualora si togliessero dall'equazione dei lavori virtuali i termini $t\delta T$.

Riconsiderando le successive trasformazioni praticate sugli integrali che in questa compaiono, si constata che nessuna di esse investe, neppure in modo indiretto, i termini in questione.

La presenza di questi non influisce per nulla sulle combinazioni che sorgono tra le varie deformazioni e tra le componenti di spostamento esterno,

e perciò le relazioni di compatibilità, per il caso in cui si intenda di non considerare il lavoro del taglio, si hanno ponendo semplicemente $t=0$ in tutte le equazioni finali del precedente paragrafo.

La sostituzione colpisce semplicemente le (22) e le loro equivalenti (27), le quali, non contenendo altre deformazioni, si trasformano in relazioni di carattere puramente geometrico tra gli spostamenti e le rotazioni.

Queste relazioni non esisterebbero se si tenesse conto del lavoro del taglio, e perciò la sua trascuranza si traduce in una specie di maggiore vincolamento interno che toglie la primitiva indipendenza tra alcune componenti di movimento della struttura.

La posizione $t=0$ non innova evidentemente nulla nelle condizioni di compatibilità al contorno le quali rimangono dunque invariate nella forma e nella sostanza.

Una di queste può tuttavia esprimersi in maniera utile per il seguito.

Nella prima delle (27) poniamo $t_u=0$ per aderire alle attuali ipotesi; dopodichè notiamo che essa è valida per le direzioni ortogonali s_u, s_v che però, in fondo, sono state scelte a piacimento sulla lastra.

Nulla vieta allora di scrivere la stessa relazione per i punti del bordo, facendo coincidere s_u coll'arco s del contorno, ed s_v colla sua normale interna a .

Di conseguenza, in base ai simboli ed alle convenzioni sui segni che furono via via introdotti, vediamo che ds_u si identifica con ds ; φ_v con $-\varphi_{02}$; w_u con w_{01} ; w_v con $-w_{02}$; w_n con w_{03} .

Chiamato R' il raggio di curvatura della sezione normale passante per la tangente ad s (che viene a sostituirsi ad R_u) e detti infine R_{1s}, R_{2s}, θ_s i valori assunti da R_1, R_2, θ in corrispondenza al contorno; fatte le sostituzioni entro la (27) si perviene alla relazione geometrica:

$$(33) \quad \varphi_{02} = \frac{w_{01}}{R'} - \frac{\text{sen } 2\theta_s}{2} \left(\frac{1}{R_{1s}} - \frac{1}{R_{2s}} \right) w_{02} + \frac{dw_{03}}{ds}$$

valevole al bordo, esclusivamente nell'ipotesi di trascurare il lavoro del taglio.

6. Equazioni di equilibrio nell'ipotesi della trascurabilità del lavoro del taglio. — A questo punto, ormai in possesso di tutte le relazioni di congruenza, risulta ben ovvio che se usassimo il principio dei lavori virtuali nella forma variazionale complementare, applicandolo cioè al sistema statico effettivamente in azione sulla struttura e ad una variazione arbitraria, purchè compatibile, dello stato di deformazione di essa, troveremmo di nuovo tutte le equazioni di equilibrio da cui siamo partiti.

Questa conclusione non è più autorizzata a priori se ci proponiamo di condurre tale ricerca trascurando il lavoro del taglio, giacchè questa circostanza implica, come abbiamo visto da poco, una limitazione nelle primitive libertà di movimento della struttura e ad una più stretta concezione della congruenza, diversa da quella propria alle effettive possibilità geometriche del corpo.

Procediamo dunque ad una nuova apposita indagine, basata su questa particolare ipotesi.

L'equazione dei lavori virtuali per le reali forze interne ed esterne, e per una variazione congruente dello stato di deformazione della lastra, trova nel caso attuale una più comoda applicazione se riferita alle componenti secondo la terna u, v, n .

Omesso il lavoro del taglio, essa si scrive:

$$\begin{aligned} & \int\int_{(S)} (M_u \delta m_u + M_v \delta m_v + L \delta l + Q \delta q + N_u \delta n_u + N_v \delta n_v) ABdudv - \\ & - \int\int_{(S)} (p_u \delta w_u + p_v \delta w_v + p_n \delta w_n + C_u \delta \varphi_u + C_v \delta \varphi_v + C_n \delta \varphi_n) ABdudv - \\ & - \int_{(s)} (M_0 \delta \varphi_{01} + L_0 \delta \varphi_{02} + Q_0 \delta w_{01} + N_0 \delta w_{02} + T_0 \delta w_{03}) ds = 0. \end{aligned}$$

Le variazioni che qui compaiono, dovendo essere congruenti, sono legate in primo luogo dalle (26), (27), (28).

Sostituiamo a δm_u ecc. le espressioni fornite dalle (26), (28); e facciamo uso della identità $BM_u \frac{\partial \delta \varphi_v}{\partial u} = \frac{\partial (BM_u \delta \varphi_v)}{\partial u} - \frac{\partial (BM_u)}{\partial u} \delta \varphi_v$; e delle analoghe relative agli altri termini simili.

L'equazione diviene:

$$\begin{aligned} & \int\int_{(S)} \left\{ \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial (BL)}{\partial u} + \frac{1}{AB} \frac{\partial (AM_v)}{\partial v} - \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial u} M_u - \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial v} L - C_u \right] \delta \varphi_u + \left[-\frac{1}{AB} \frac{\partial (BM_u)}{\partial u} - \right. \right. \\ & - \frac{1}{AB} \frac{\partial (AL)}{\partial v} - \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial u} L - \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial v} M_v - C_v \left. \right] \delta \varphi_v + \left[\frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (M_v - M_u) + \right. \\ & + \left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_v} \right) L - C_n \left. \right] \delta \varphi_n + \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial (AQ)}{\partial v} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (BN_u)}{\partial u} + \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial u} Q - \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial v} N_v - p_u \right] \delta w_u + \\ & + \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial (BQ)}{\partial u} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (AN_v)}{\partial v} + \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial u} N_u - \frac{1}{B} \frac{\partial \theta}{\partial v} Q - p_v \right] \delta w_v + \left[\text{sen } 2\theta \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Q - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_u} N_u - \frac{1}{R_v} N_v - p_n \right] \delta w_n \left. \right\} ABdudv + \int\int_{(S)} \left[\frac{\partial}{\partial u} (BM_u \delta \varphi_v - BL \delta \varphi_u - \right. \end{aligned}$$

$$- BQ\delta w_v + BN_u\delta w_u) + \frac{\partial}{\partial v} (AL\delta\varphi_v - AM_v\delta\varphi_u + AN_v\delta w_v - AQ\delta w_u) \Big] dudv -$$

$$- \int_{(S)} (M_0\delta\varphi_{01} + L_0\delta\varphi_{02} + Q_0\delta w_{01} + N_0\delta w_{02} + T_0\delta w_{03}) ds = 0.$$

Il termine in $\delta\varphi_n$ non è suscettibile di ulteriori trasformazioni e, conservandolo, lo troveremo inalterato al termine di tutti i passaggi, allorchè si tratterà di annullare i singoli coefficienti delle variazioni arbitrarie.

Possiamo quindi considerarlo nullo fin d'ora ed evitare di trascriverlo per il seguito, coll'intesa che alle equazioni finali aggiungeremo quella che si ottiene ponendo uguale a zero l'attuale coefficiente di $\delta\varphi_n$.

Prima di procedere oltre, torna opportuno notare che i coefficienti delle rimanenti variazioni coincidono rispettivamente coi primi membri delle equazioni di equilibrio (11), (12) private dei termini in T_u , T_v , e compresi i termini noti.

Indicheremo per il seguito queste espressioni con X_u , X_v , X_n per il gruppo di equazioni (11), ed Y_u , Y_v per le prime due equazioni (12).

Con queste notazioni, e coll'applicazione al secondo integrale delle formule di GREEN allo stesso modo del par. 4°, la precedente equazione dei lavori virtuali diviene:

$$\int\int_{(S)} (X_u\delta w_u + X_v\delta w_v + X_n\delta w_n + Y_u\delta\varphi_u + Y_v\delta\varphi_v) ABdudv +$$

$$+ \int_{(S)} [(M_{vs} \cos \omega - L_s \sin \omega)\delta\varphi_{us} + (M_{us} \sin \omega - L_s \cos \omega)\delta\varphi_{os} +$$

$$+ (N_{us} \sin \omega + Q_s \cos \omega)\delta w_{us} - (N_{vs} \cos \omega + Q_s \sin \omega)\delta w_{vs} -$$

$$- M_0\delta\varphi_{01} - L_0\delta\varphi_{02} - Q_0\delta w_{01} - N_0\delta w_{02} - T_0\delta w_{03}] ds = 0.$$

Sostituiamo ora a $\delta\varphi_u$, $\delta\varphi_v$ le loro espressioni ricavate dalle (27) nelle quali si faccia, conformemente alla nostra ipotesi, $\delta t_u = \delta t_v = 0$.

Usata nuovamente l'identità: $AY_u \frac{\partial \delta w_n}{\partial v} = \frac{\partial (AY_u \delta w_n)}{\partial v} - \frac{\partial (AY_u)}{\partial v} \delta w_n$, e le analoghe, l'integrale di superficie si trasforma in:

$$\int\int_{(S)} \left[X_u - \frac{Y_v}{R_u} + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Y_u \right] \delta w_u + \left[X_v + \frac{Y_u}{R_v} - \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Y_v \right] \delta w_v +$$

$$+ \left[X_n + \frac{1}{AB} \frac{\partial (BY_v)}{\partial u} - \frac{1}{AB} \frac{\partial (AY_u)}{\partial v} \right] \delta w_n \Big\} ABdudv +$$

$$+ \int\int_{(S)} \left[\frac{\partial (AY_u \delta w_n)}{\partial v} - \frac{\partial (BY_v \delta w_n)}{\partial u} \right] dudv.$$

Il primo di questi integrali non è ulteriormente trasformabile, e siccome le variazioni in esso contenute sono ormai del tutto indipendenti, possiamo senz'altro annullarne i coefficienti al fine di soddisfare identicamente all'equazione dei lavori virtuali.

Otteniamo in tal modo le equazioni indefinite di equilibrio, le quali, premessa quella già ricordata proveniente dall'aver annullato il coefficiente di $\delta\varphi_n$, risultano:

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (M_v - M_u) + \left(\frac{1}{R_u} - \frac{1}{R_v} \right) L - C_n = 0 \\ X_u - \frac{Y_v}{R_u} + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Y_u = 0 \\ X_v + \frac{Y_u}{R_v} - \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Y_v = 0 \\ X_n + \frac{1}{AB} \frac{\partial(BY_v)}{\partial u} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(AY_u)}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Siccome le X ed Y sono date per definizione dalle (11), (12) private dei termini in T_u , T_v , ne viene che le ultime tre equazioni di equilibrio coincidono col risultato della sostituzione entro le (11) delle espressioni degli sforzi taglienti ricavate dalle (12).

Possiamo dunque affermare che, trascurando il lavoro del taglio, le equazioni indefinite di equilibrio si riducono a quattro e si ottengono eliminando gli sforzi di taglio tra le sei equazioni complete (11), (12).

In seguito all'ultima trasformazione è anche risultato un secondo integrale di superficie che si può cambiare in integrale al contorno mediante la solita applicazione delle formule di GREEN.

Aggiungendovi anche gli altri termini al bordo, si ottiene in complesso:

$$\int_{(s)} [(M_{vs} \cos \omega - L_s \text{sen } \omega) \delta\varphi_{us} + (M_{us} \text{sen } \omega - L_s \cos \omega) \delta\varphi_{vs} + (N_{us} \text{sen } \omega + Q_s \cos \omega) \delta w_{us} - \\ - (N_{vs} \cos \omega + Q_s \text{sen } \omega) \delta w_{vs} - (Y_{us} \cos \omega + Y_{vs} \text{sen } \omega) \delta w_{ns} - \\ - M_0 \delta\varphi_{01} - L_0 \delta\varphi_{02} - Q_0 \delta w_{01} - N_0 \delta w_{02} - T_0 \delta w_{02}] ds.$$

Qui è necessario ricordare che, anche trascurando il lavoro del taglio, fu trovato al paragrafo precedente che la congruenza al contorno esige l'uguaglianza vettoriale tra le rotazioni, o gli spostamenti esterni, e quelli interni che su di esso hanno luogo.

Valgono quindi per intero le (31), (32), che sostituiamo nel precedente integrale.

Fatte le posizioni:

$$(35) \quad \begin{cases} M_c = M_{vs} \cos^2 \omega + M_{us} \sin^2 \omega - 2L_s \sin \omega \cos \omega \\ L_c = (M_{vs} - M_{us}) \sin \omega \cos \omega + L_s (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \\ Q_c = (N_{us} - N_{vs}) \sin \omega \cos \omega + Q_s (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \\ N_c = N_{us} \sin^2 \omega + N_{vs} \cos^2 \omega + 2Q_s \sin \omega \cos \omega \\ T_c = -Y_{us} \cos \omega - Y_{vs} \sin \omega \end{cases}$$

risulta di conseguenza:

$$\int_{(s)} [(M_c - M_0) \delta \varphi_{01} + (L_c - L_0) \delta \varphi_{02} + (Q_c - Q_0) \delta w_{01} + (N_c - N_0) \delta w_{02} + (T_c - T_0) \delta w_{03}] ds.$$

Le cinque variazioni qui contenute non sono tra di loro indipendenti giacchè, come vedemmo nel precedente paragrafo, se si trascura il lavoro del taglio vale la relazione (33), che si scrive nel nostro caso:

$$\delta \varphi_{02} = \frac{\delta w_{01}}{R'} - \frac{\sin 2\theta_s}{2} \left(\frac{1}{R_{1s}} - \frac{1}{R_{2s}} \right) \delta w_{02} + \frac{d\delta w_{03}}{ds}.$$

Introdotta questa nell'integrale ultimo, abbiamo:

$$\int_{(s)} \left\{ (M_c - M_0) \delta \varphi_{01} + \left(Q_c - Q_0 + \frac{L_c - L_0}{R'} \right) \delta w_{01} + \right. \\ \left. + \left[N_c - N_0 - \frac{\sin 2\theta_s}{2} \left(\frac{1}{R_{1s}} - \frac{1}{R_{2s}} \right) (L_c - L_0) \right] \delta w_{02} + (T_c - T_0) \delta w_{03} + (L_c - L_0) \frac{d\delta w_{03}}{ds} \right\} ds.$$

L'ultimo termine si può integrare per parti, e fornisce:

$$\left[(L_c - L_0) \delta w_{03} \right]_0^l - \int_{(s)} \frac{d(L_c - L_0)}{ds} \delta w_{03} \cdot ds.$$

La prima quantità è identicamente nulla perchè l'origine ed il termine del contorno coincidono, e la funzione $(L_c - L_0) \delta w$ assume in questi due punti identico valore.

La seconda quantità si congloba colle altre rimaste entro l'integrale di partenza, nel quale le variazioni sono ormai veramente indipendenti ed arbitrarie.

Ancora una volta occorre che si annullino contemporaneamente i loro coefficienti, e da ciò risultano le condizioni di equilibrio ai limiti valevoli per le lastre curve nell'ipotesi di trascurabilità del lavoro del taglio.

Esse sono dunque :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_0 = M_c \\ Q_0 + \frac{L_0}{R'} = Q_c + \frac{L_c}{R'} \\ N_0 - \frac{\text{sen } 2\theta_s}{2} \left(\frac{1}{R_{1s}} - \frac{1}{R_{2s}} \right) L_0 = N_c - \frac{\text{sen } 2\theta_s}{2} \left(\frac{1}{R_{1s}} - \frac{1}{R_{2s}} \right) L_c \\ T_0 - \frac{dL_0}{ds} = T_c - \frac{dL_c}{ds} \end{array} \right.$$

e legano le componenti interne, espresse secondo le (35), a quelle esterne.

Nel caso particolare della lastra piana tutti i raggi di curvatura divengono infiniti, e si trova :

$$M_0 = M_c; \quad Q_0 = Q_c; \quad N_0 = N_c; \quad T_0 - \frac{dL_0}{ds} = T_c - \frac{dL_c}{ds}$$

in coincidenza perfetta coi ben noti risultati del KIRCHHOFF.