Sur une propriété des nombres naturels.

par WACLAW SIERPINSKI (à Varsovie).

À Mauro Picone pour son 70me anniversaire.

Résumé. - *L'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre naturel n soit un « nombre pratique », c'est-à-dire pour que tout nombre naturel $\leq n$ soit une somme de diviseurs naturels distincts du nombre n.*

1. D'après M. A. K. SRINIVASAN on appelle un nombre naturel n « nombre pratique » si tout nombre naturel $\leq n$ est une somme de diviseurs naturels distincts du nombre n. Dans « The Mathematical Gazette », **36** (1952), p. 49, M. A. K. SAROJA donne sans démonstration une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre naturel n soit pratique. Or, la formule qui exprime cette condition est fausse, sans doute à cause d'une faute d'impression. Un de mes élèves, M. J. BROWKIN a exprimé l'hypothèse qu'on a ici le théorème suivant:

THÉORÈME 1. - *Pour qu'un nombre naturel $n > 1$ soit pratique, il faut et il suffit qu'il se décompose en facteurs premiers*

$$n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, \tag{1}$$

où k, α_0, $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ sont des nombres naturels (en cas $k = 0$ on a $n = 2^{\alpha_0}$) *et où* (dans le cas $k > 1$) $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ *sont des nombres premiers impairs, $p_1 < p_2 < \dots < p_{k-1}$ et*

$$p_i \leq 1 + \sigma(2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}) \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \tag{2}$$

où $\sigma(l)$ désigne la somme de tous le diviseurs naturels du nombre l (¹).

Je donnerai ici la démonstration de ce théorème qui sera basée sur le lemme suivant.

LEMME. - *s, c, p et m étant des nombres naturels tels que*

$$p \leq c + 1 \quad \textit{et} \quad m \leq c(1 + p + p^2 + \dots + p^{s-1}), \tag{3}$$

il existe des entiers c_i $(i = 1, 2, \dots, s-1)$ tels que

$$0 \leq c_i \leq c \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \dots, s-1 \tag{4}$$

et

$$m = c_0 + c_2 p + c_2 p^2 + \dots + c_{s-1} p^{s-1}. \tag{5}$$

(¹) *Addition pendant la correction des épreuves:* Cf. B. M. STEWART, « American Journal of Mathematics », **76** (1954), p. 779-785.

DÉMONSTRATION du lemme. - Le lemme est évidemment vrai pour $s=1$. Or, supposons qu'il existe des nombres naturels $s>1$ pour lesquels le lemme n'est pas vrai et soit s le plus petit d'entre eux. Il existe donc un nombre naturel m qui est le plus petit tel qu'on a pour certains nombres naturels p et c les formules (3), mais qu'il n'existe pas des entiers c_i $(i=0, 1, \dots, s-1)$ pour lesquels on ait les formules (4) et (5). On a ici évidemment $m>1$ et il existe des entiers c_i $(i=0, 1, \dots, s-1)$ satisfaisant aux conditions (4) et tels que

$$(6) \qquad m-1=c_0+c_1p+c_2p^2+\dots+c_{s-1}p^{s-1}$$

Il ne peut être ici $c_0=c_1=\dots=c_{s-1}=c$, puisque la formule (6) serait alors incompatible avec la deuxième des formules (3).

D'après (4) un au moins des entiers $c_0, c_1, \dots, c_{s-1}$ est $<c$: soit j le plus petit indice $\leq s-1$ tel que $c_j<c$. S'il était ici $j=0$, donc $c_0<c$, on aurait $c_0'=c_0+1\leq c$ et $m=c_0'+c_1p+c_2p^2+\dots+c_{s-1}p^{s-1}$, contrairement à l'hypothèse sur le nombre m. On a donc $j>0$ et $c_0=c_1=\dots=c_{j-1}=c$. Donc, vu que d'après la première des formules (3) on a $c\geq p-1$, on trouve

$$c_0+c_1p+\dots+c_{j-1}p^{j-1}-p^j+1\geq(p-1)(1+p+p^2+\dots+p^{j-1})-p^j+1=0$$

et comme d'autre part on a évidemment

$$c_0+c_1p+\dots+c_{j-1}p^{j-1}-p^j+1\leq c(1+p+p^2+\dots+p^{j-1})$$

et $j-1<s-1$, vu la définition du nombre s, il existe des entiers c_i' $(i=0, 1, \dots, j-1)$, tels que $0\leq c_i'\leq c$ pour $i=0, 1, \dots, j-1$ et que

$$(7) \qquad c_0+c_1p+\dots+c_{j-1}p^{j-1}-p^j+1=c_0'+c_1'p+\dots+c'_{j-1}p^{j-1}.$$

En posant $c_j'=c_j+1$ nous avons donc, d'après $c_j<c$, $c_j'\leq c$ et d'après (6) et (7)

$$m=c_0'+c_1'p+\dots+c'_{j-1}p^{j-1}+c_j'p^j+c_{j+1}p^{j+1}+c_{j+2}p^{j+2}+\dots+c_{s-1}p^{s-1},$$

contrairement à l'hypothèse sur le nombre m.

Notre lemme est donc vrai pour tout nombre naturel s et il se trouve ainsi démontré.

DÉMONSTRATION du théorème 1. - Soit $n>1$ un nombre naturel pratique. Il est clair que n doit être un nombre pair, puisque dans le cas contraire il serait $n>2$ et le nombre 2 n'est pas évidemment une somme de diviseurs distincts d'un nombre impair. Le nombre n a donc le développement (1) en facteurs premiers.

Supposons maintenant que pour un nombre naturel $i\leq k-1$ la condition (2) n'est pas remplie, donc qu'on a

$$p_i>1+\sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}).$$

Les diviseurs du nombre n qui ne dépassent pas le nombre p_i-1 peuvent donc être seulement les diviseurs du nombre $2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}$, et la somme de tous les diviseurs de ce nombre étant $\sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}) < p_i - 1$, le nombre $p_i - 1 < n$ ne peut pas être une somme de diviseurs distincts du nombre n, contrairement à l'hypothèse que n est un nombre pratique. La condition de notre théorème est ainsi nécessaire.

Nous démontrerons maintenant par l'induction (par rapport au nombre k) que si le nombre naturel n remplit les conditions de notre théorème, tout nombre naturel $\leq \sigma(n)$ est une somme des diviseurs distincts du nombre n.

Cela est vrai pour $k=1$, c'est-à-dire pour les nombres $n = 2^{\alpha_0}$, puisqu'alors on a $\sigma(n) = 2^{\alpha_0+1} - 1$ et, comme on sait, tout nombre naturel $\leq 2^{\alpha_0+1} - 1$ est une somme de termes distincts de la suite $1, 2, 2^2, \dots 2^{\alpha}$ (qui sont diviseurs du nombre 2^{α_0}).

Soit maintenant k un nombre naturel > 1 et supposons que notre assertion est vraie pour le nombre $k-1$, donc que tout nombre naturel $\leq \sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}})$ est une somme de diviseurs distincts du nombre $2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}}$.

Soit m un nombre naturel tel que

$$m \leq \sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}).$$

Comme

$$\sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}) = \sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}})(1 + p_{k-1} + p_{k-1}^2 + \dots + p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}),$$

on a

$$m \leq \sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}})(1 + p_{k-1} + p_{k-1}^2 + \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}),$$

et, vu la formule (2) pour $i = k-1$ et d'après notre lemme pour $s = \alpha_{k-1} + 1$, $c = \sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}})$ et $p = p_{k-1}$, on conclut qu'il existe des entiers c_i ($i = 0, 1, \dots, \alpha_{k-1}$) tels que $0 \leq c_i \leq \sigma(2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}})$ et que

$$m = c_0 + c_1 p_{k-1} + c_2 p_{k-1}^2 + \dots + c_{\alpha_{k-1}} p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}. \tag{8}$$

Notre assertion étant vraie, par l'hypothèse, pour le nombre $k-1$, tout nombre c_i ($i = 0, 1, \dots, \alpha_{k-1}$) est une somme de diviseurs distincts du nombre $2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-2}^{\alpha_{k-2}}$, d'où, d'après (8) on conclut tout de suite que m est une somme de diviseurs distincts du nombre $2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$. Notre assertion est ainsi vraie pour le nombre k.

Notre assertion, et, à plus forte raison, le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

En particulier, d'après $5 < 1 + \sigma(2^2) = 8$, le nombre $100 = 2^2.5^2$ est pratique et tout nombre naturel $\leq \sigma(100) = 217$ est une somme de diviseurs distincts du nombre 100. Pareillement 1000 est un nombre pratique et tout nombre naturel ≤ 2340 est une somme de diviseurs distincts du nombre 1000.

Il résulte sans peine du théorème 1 que si le nombre (1) est pratique, tout nombre naturel m dont le développement en facteurs premiers est

$m = 2^{\beta_0} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$, où β_i $(i = 0, 1, 2, \dots, k-1)$ sont des nombres naturels tels que $\beta_i \geq \alpha_i$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, est également un nombre pratique. Il en résulte tout de suite la proposition trouvée par M. J. BROWKIN que lorsqu'on multiplie un nombre pratique par un de ses diviseurs, on obtient un nombre pratique.

Il résulte aussi sans peine de notre théorème 1 que le produit de deux (ou plusieurs) nombres pratiques (distincts ou non) est toujours un nombre pratique (ce qui fut aussi trouvé par M. J. BROWKIN).

Pour démontrer que le nombre $p_1 p_2 \dots p_n$, où p_i désigne le i-ème nombre premier, et $n = 1, 2, \dots$, est pratique, il suffit d'appliquer notre théorème et l'inégalité connue $p_i \leq 1 + p_1 p_2 \dots p_{i-1}$ pour $i = 2, 3, \dots$.

Or, la proposition que pour tout n naturel > 1 le nombre $2^{n-1}(2^n - 1)$ est pratique peut être démontrée sans peine directement. En effet, si k est un nombre naturel $\leq 2^n - 1$, k est, comme on sait, une somme de termes distincts de la suite $1, 2, \dots, 2^{n-1}$. Or, si $2^n - 1 < k \leq 2^{n-1}(2^n - 1)$, on a $k = (2^n - 1)t + r$ où t est un nombre naturel $\leq 2^{n-1}$ et r un entier tel que $0 \leq r < 2^n - 1$, donc t et r sont des sommes de termes distincts de la suite $1, 2, \dots, 2^{n-1}$, d'où il résulte tout de suite la démonstration cherchée. Donc, en particulier, tout nombre parfait pair est pratique, ce qui a été signalé par M. SAROJA.

2. La notion des nombres pratiques nous conduit au problème suivant: $n_1, n_2, \dots, n_k$ étant une suite croissante donnée de nombres naturels, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que tout nombre naturel $n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_k$ soit une somme de termes distincts de cette suite?

Nous démontrerons que cette condition est qu'il soit

$$n_i \leq 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{9}$$

La condition est nécessaire. En effet, s'il existe un indice $i \leq k$ tel que $n_i > 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}$, le nombre $1 + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} < n_i$ ne pourrait évidemment être une somme de termes distincts de la suite $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Notre condition est évidemment suffisante pour le nombre $k = 1$, puisque pour $i = 1$ elle donne $n_1 \leq 1$, donc $n_1 = 1$, et pour $n \leq n_1$ on a $n = 1 = n_1$.

Supposons maintenant que notre condition n'est pas suffisante. Il existe donc un nombre naturel k qui est le plus petit pour lequel notre condition n'est pas suffisante, et on a $k > 1$. Il existe donc un nombre naturel $m \leq n_1 + n_2 + \dots + n_k$ qui n'est pas somme de termes distincts de la suite $n_1, n_2, \dots, n_k$. On a ici évidemment $m > n_1 = 1$ et il existe un nombre naturel $i \leq k$ tel que $m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1} < m < n_1 + n_2 + \dots + n_i$. Vu la condition que notre suite remplie, on a donc $-1 \leq n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} - n_i < m - n_i < n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}$. On a donc $m - n_i \geq 0$ et comme, d'après la définition du nombre m il ne peut pas être $m - n_i = 0$, le nombre $m - n_i$ est naturel et $< n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1}$ et comme, d'après $i - 1 < k$ notre condition est suffisante pour le nombre $i - 1$, le nombre naturel $m - n_i$ est une somme de termes distincts de la suite $n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}$, d'où il résulte que m est une somme de termes distincts de la suite $n_1, n_2, \ldots, n_i$, contrairement à la définition du nombre m.

Notre condition est donc suffisante. Nous avons ainsi démontré ce

THÉORÈME 2. - *$n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant une suite croissante de nombres naturels, la condition nécessaire et suffisante pour que tout nombre naturel $\leq n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ soit une somme de termes distincts de cette suite est qu'on ait les inégalités* (9).

Soit, en particulier, $n_1 = 1$ et $n_i = p_{i-1}$ pour $i = 2, 3, \ldots$, où p_i désigne le i-ème nombre premier. Comme on le sait, on a

$$p_{i+1} \leq 1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

d'où il résulte que les nombres n_i $(i = 1, 2, \ldots)$ satisfont aux conditions (9) pour $i = 1, 2, \ldots$. Il résulte donc tout de suite du théorème 2 ce

COROLLAIRE. - *Tout nombre naturel est une somme de nombres distincts de la suite infinie $1, p_1, p_2, \ldots$, où p_i est le i-ème nombre premier.*

Or, il est à remarquer que M. H. E. RICHERT a démontré en 1949 que tout nombre naturel > 6 est une somme de nombres premiers distincts ([2]).

Il résulte tout de suite du théorème 2 que si m est un nombre naturel tel que $m \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ et si n_j est le plus grand des nombres $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tel que $n_j \leq m$, le nombre m est une somme de termes distincts de la suite $n_1, n_2, \ldots, n_j$ et on a $m \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_j$.

Soit maintenant j_1 le plus grand indice $\leq k$ tel que $n_{j_1} \leq m$. On a donc $n_{j_1} \leq m \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_{j_1}$ et si $m \neq n_{j_1}$, on trouve $0 < m - n_{j_1} \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_{j_1 - 1}$ et si $j_1 \neq 1$, il existe le plus grand indice $j_2 \leq j_1 - 1$ tel que $n_{j_2} \leq m - n_{j_1}$ et on a $m - n_{j_1} \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_{j_2}$, d'où si $m \neq n_{j_1} + n_{j_2}$ on trouve $0 < m - n_{j_1} - n_{j_2} \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_{j_2 - 1}$ et si $j_2 \neq 1$, il existe le plus grand indice $j_3 \leq j_2 - 1$, tel que $n_{j_3} \leq m - n_{j_1} - n_{j_2}$. En raisonnant ainsi de suite on arrive à la décomposition $m = n_{j_1} + n_{j_2} + \ldots$, où $k \geq j_1 > j_2 > \ldots$.

Voici encore une conséquence immédiate du théorème 2:

THÉORÈME 3. - *Pour qu'un nombre naturel n soit un nombre pratique, il faut et il suffit qu'on ait pour la suite croissante de tous les diviseurs naturels $1 = d_1, d_2, \ldots; d_s = n$ du nombre n les inégalités*

$$d_i \leq 1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

([2]) H. E. RICHERT, « Norsk Matematisk Tidskrift », **31** (1949), p. 120.

Il résulte aussi du théorème 2 que si le nombre naturel n remplit ces conditions, tout nombre naturel m tel que pour un indice $i \leq k$ on a

$$m \leq d_1 + d_2 + \dots + d_i$$

est une somme des nombres distincts de la suite $d_1, d_2, \dots, d_i$.

Il en résulte la méthode suivante, signalée par M. SAROJA dans sa note citée, de déterminer pour un nombre naturel $m \leq 1 + \sigma(n)$, où n est un nombre pratique, la décomposition du nombre m en une somme de diviseurs distincts du nombre n. On détermine le plus grand diviseur d_{j_1} de n tel que $d_{j_1} \leq m$. Si $m \neq d_{j_1}$, on détermine le plus grand diviseur $d_{j_2} < d_{j_1}$ du nombre n tel que $d_{j_2} \leq m - d_{j_1}$. Si $m \neq d_{j_1} + d_{j_2}$, on détermine le plus grand diviseur $d_{j_3} < d_{j_2}$ de n tel que $d_{j_3} \leq m - d_{j_1} - d_{j_2}$ et ainsi de suite, jusqu'on arrive à la décomposition $m = d_{j_1} + d_{j_2} + \dots + d_{j_r}$, où $j_1 > j_2 > \dots > j_r$.