associati a quelle due basi si può stabilire una corrispondenza affine ponendo

$$(*) \qquad u_i = \sum_k \alpha_{ik} \cdot v_k, \qquad\qquad (**) \qquad v_i = \sum_k \beta_{ik} \cdot u_k$$

con $\alpha_{ik} = a_{ik} + \mathfrak{p}$, $\beta_{ik} = b_{ik} + \mathfrak{p}$, e $\sum_l \alpha_{il} \cdot \beta_{lk} = \delta_{ik}$, dato che secondo **195** vale $\sum_l a_{il} \cdot b_{lk} - d_{ik} \subset \mathfrak{p}$, con $d_{ik} = 0$ o 1, secondochè $i \neq k$ o $= k$.

Ogni forma di grado m $\varphi(u_1, \dots, u_h) = f(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h]$ tangente $x \in s$ mutasi dopo la sostituzione $(*)$ in una forma

$$\psi(v_1, \dots, v_h) = \varphi(\sum_k \alpha_{1k} \cdot v_k, \dots, \sum_k \alpha_{hk} \cdot v_k)$$

tangente x, poichè

$$\psi(v_1, \dots, v_h) = f(\sum_k a_{1k} \cdot v_k, \dots, \sum_k a_{hk} \cdot v_k) + \mathfrak{p}[v_1, \dots, v_h]$$

e

$$f(\sum_k a_{1k} \cdot q_k, \dots, \sum_k a_{hk} \cdot q_k) = f(p_1, \dots, p_h) \subset x + \mathfrak{p}^{m+1}.$$

Viceversa, dal fatto che $(**)$ è l'inversione di $(*)$ risulta che ogni forma $\psi(v_1, \dots, v_h)$ tangente x si ottiene da una forma $\varphi(u_1, \dots, u_h)$ tangente x mediante la sostituzione $(*)$, sicchè possiamo dire:

Il cono tangente $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ di una figura $\mathfrak{a}$ in una prospettiva $\mathfrak{p}$ subisce la trasformazione affine biunivoca $u_i = \sum_k (a_{ik} + \mathfrak{p}) \cdot v_k$, se si passa, ponendo $p_i = \sum_k a_{ik} \cdot q_k$, da una base minima p_i dell'ideale $\mathfrak{p}$ a un altra q_i.

§ 6. Ideali omogenei.

199. Il presentarsi di ideali omogenei nella definizione dei coni tangenti ci induce a richiamare talune proprietà di siffatti ideali.

Designeremo in quel che segue con $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}$, ecc. ideali (omogenei o no) in un anello $A = k[u_1, \dots, u_h]$ di polinomi sopra un corpo k, che subito estendiamo a un corpo $K = (k, t)$ 1-dimensionale sopra k. L'estensione di A all'anello $A \cdot K = K[u_1, \dots, u_h]$ conduce a estensioni $\mathfrak{a} \cdot K$ degli ideali $\mathfrak{a}$ dalle quali si ritrovano questi nel modo $\mathfrak{a} \cdot K \cap A = \mathfrak{a}$ (ved. 40). Notiamo che gli elementi di $\mathfrak{a} \cdot K$ possono si scrivere nella forma $\frac{1}{f(t)} \sum a_i \cdot t^i$ con $f(t) \in [k, t]$, $a_i \in \mathfrak{a}$. Ne segue subito, che sempre $\mathfrak{b} \cdot K \cap \mathfrak{c} \cdot K = [\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}] \cdot K$. Invero, ogni $x \in \mathfrak{b} \cdot K \cap \mathfrak{c} \cdot K$ ammette le rappresentazioni $x = \frac{1}{f(t)} \sum_i b_i \cdot t^i = \frac{1}{f(t)} \sum_i c_i \cdot t^i$, dalle quali si trae $b_i = c_i \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$.

Se $\mathfrak{q}$ è $\mathfrak{p}$-primario, $\mathfrak{q} \cdot K$ è $\mathfrak{p} \cdot K$-primario.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $f(t) \cdot (\sum_i a_i \cdot t^i) \cdot (\sum_i b_i \cdot t^i) \subset \mathfrak{q} \cdot [k, t]$, $\sum b_i \cdot t^i \not\subset \mathfrak{q} \cdot [k, t]$ con $f(t) = t^l + \dots \in [k, t]$, a_i, $b_i \in A$.

Volendo dimostrare dapprima $\sum a_i \cdot t^i \subset \mathfrak{p} \cdot [k, t]$, possiamo supporre $\sum b_i \cdot t^i = b_n \cdot t^n + \dots$ con $b_n \not\subset \mathfrak{q}$ e che si sappia già $a_i \subset \mathfrak{p}$ per $i < m$. Scriviamo $\sum a_i \cdot t^i = -P + a_m \cdot t^m + \dots$ con $P \in \mathfrak{p} \cdot [k, t]$ e formiamo

$$(X - P) \cdot (\sum_{i=1}^{r} P^{r-i} \cdot X^{i-1}) = X^r - P^r \subset X^r + \mathfrak{q} \cdot [k, t]$$

con $X = a_m \cdot t^m + \dots$ e un esponente r per il quale $\mathfrak{p}^r \subset \mathfrak{q}$.

Moltiplicando la relazione presupposta con $\sum_i P^{r-i} \cdot X^{i-1}$ si ottiene

$$X^r \cdot f(t) \cdot (\sum_i b_i \cdot t^i) = a_m^r \cdot b_n \cdot t^{mr+n+l} + \dots \subset \mathfrak{q} \cdot [k, t]$$

donde si deduce $a_m^r \cdot b_n \subset \mathfrak{q}$ e quindi $a_m \subset \mathfrak{p}$ e in conseguenza $\sum a_i \cdot t^i \subset \mathfrak{p} \cdot [k, t]$, $(\sum_i a_i \cdot t^i)^r \subset \mathfrak{q} \cdot [k, t]$, proprietà qualificante $\mathfrak{q} \cdot K$ come ideale primario.

Se un elemento $Z = \frac{1}{f(t)} \cdot \sum c_i \cdot t^i$ con $c_i \in A$ soddisfa a $Z^j \subset \mathfrak{q} \cdot K$, si ha $g(t) \cdot (\sum c_i \cdot t^i)^j \subset \mathfrak{p} \cdot [k, t]$ epperò $c_i \in \mathfrak{p}$ per ogni indice, cioè $Z \in \mathfrak{p} \cdot K$, mentre viceversa da $Z \in \mathfrak{p} \cdot K$ sempre segue $Z^r \subset \mathfrak{q} \cdot K$. (Si osservi che $g(t) \in [k, t]$ non è contenuto nell'ideale $\mathfrak{p} \cdot [k, t]$ primo in $[A, t]$).

Da una decomposizione noetheriana ridotta $\mathfrak{a} = \cap\, \mathfrak{q}_i$ *segue la decomposizione noetheriana ridotta* $\mathfrak{a} \cdot K = \cap\, \mathfrak{q}_i \cdot K$.

Il sussistere dell'equazione $\mathfrak{a} \cdot K = \cap\, \mathfrak{q}_i \cdot K$ e il fatto che $\mathfrak{q}_i \cdot K$ è $\mathfrak{p}_i \cdot K$–primario, se $\mathfrak{q}_i$ è $\mathfrak{p}_i$–primario, sono già dimostrati. I $\mathfrak{p}_i \cdot K$ sono diversi fra di loro, poichè l'uguaglianza $\mathfrak{p}_i \cdot K = \mathfrak{p}_j \cdot K$ darebbe $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i \cdot K \frown A = \mathfrak{p}_j \cdot K \frown A = \mathfrak{p}_j$ (ved. 40). Similmente si otterrebbe da una riducibilità dell'intersezione $\cap\, \mathfrak{q}_i \cdot K$ una riduzione di $\cap\, \mathfrak{q}_i$. C. d. d.

200. *I divisori primi di un ideale omogeneo sono omogenei.*

DIMOSTRAZIONE. – Ponendo $u_i^\tau = t \cdot u_i$ $(i = 1, \dots, h)$, $c^\tau = c$ per $c \in K$, si definisce un automorfismo τ dell'anello $A \cdot K$ che muta in sè ogni ideale $\mathfrak{a} \cdot K$ estensione di un ideale omogeneo $\mathfrak{a}$.

Supposto $\mathfrak{a}$ omogeneo e $\mathfrak{a} = \cap\, \mathfrak{q}_i$ con $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$–primario una sua decomposizione noetheriana ridotta, avremo

$$\cap\, \mathfrak{q}_i \cdot K = \mathfrak{a} \cdot K = (\mathfrak{a} \cdot K)^\tau = \cap\, (\mathfrak{q}_i \cdot K)^\tau.$$

dove $(\mathfrak{q}_i \cdot K)^\tau$ è $(\mathfrak{p}_i \cdot K)^\tau$–primario. Poichè gli ideali primi $(\mathfrak{p}_i \cdot K)^\tau$ sono distinti come i $\mathfrak{p}_i \cdot K$ e l'ultimo membro dell'equazione suddetta è intersezione ridotta come il suo primo membro, essendo τ automorfismo di A, ogni $(\mathfrak{p}_i \cdot K)^\tau$ deve coincidere con un $\mathfrak{p}_i \cdot K$. Sia

$$(*) \qquad (\mathfrak{p}_i \cdot K)^\tau = \mathfrak{p}_j \cdot K$$

e $p(u) = \sum_m p^{(m)}(u)$ (con $p^{(m)}$ omogeneo di grado m) un elemento qualunque di $\mathfrak{p}_i$. Da $(*)$ segue una relazione $f(t) \cdot \sum_m t^m \cdot p^{(m)}(u) \subset \mathfrak{p}_j \cdot [k, t]$, donde si trae successivamente

$$(**) \qquad p^{(0)}(u) \in \mathfrak{p}_j, \quad p^{(1)}(u) \in \mathfrak{p}_j, \text{ ecc.},$$

il che mostra $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j$. Scrivendo ora l'equazione $(*)$ nella forma $(\mathfrak{p}_j \cdot K)^{\tau^{-1}} = \mathfrak{p}_i \cdot K$, si può ripetere il ragionamento precedente facendo fare a t^{-1} la parte di t. Se ne ricava $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ e quindi $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j$. Dal risultato $(**)$ segue poi l'omogeneità dell'ideale $\mathfrak{p}_i$. C. d. d.

201. Se con $\varphi(\mathfrak{a}, m)$ si designa il rango del k-modulo $M(\mathfrak{a})$ delle forme di grado m in un ideale omogeneo $\mathfrak{a}$, si avrà la relazione

$$\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, m) = \varphi(\mathfrak{a}, m) + \varphi(\mathfrak{b}, m) - \varphi(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}, m)$$

per ideali omogenei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ qualunque. Ciò risulta dal fatto che si possono trovare basi indipendenti $\{A_1, \dots, A_\alpha, C_1, \dots, C_\gamma\}$ di $M(\mathfrak{a})$, $\{B_1, \dots, B_\beta, C_1, \dots, C_\gamma\}$ di $M(\mathfrak{b})$, che comprendono una data base indipendente $\{C_1, \dots, C_\gamma\}$ di $M(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b})$ e forniscono pertanto la base indipendente $\{A_1, \dots, A_\alpha, B_1, \dots, B_\beta, C_1, \dots, C_\gamma\}$ di $M(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.

Col numero $\varphi(A, m) = \binom{m+h-1}{h-1}$ delle forme linearmente indipendenti di grado m in $A = k[u_1, \dots, u_h]$ si calcola la *funzione caratteristica* $\chi(\mathfrak{a}, m)$ di un ideale omogeneo $\mathfrak{a}$:

$$\chi(\mathfrak{a}, m) = \sum_{l=0}^{m} (\varphi(A, l) - \varphi(\mathfrak{a}, l)) = \binom{m+h}{h} - \sum_{l=0}^{m} \varphi(\mathfrak{a}, l),$$

la quale, secondo un classico teorema di HILBERT può rappresentarsi per valori abbastanza grandi di m come polinomio in m.

Volendo riprodurre la dimostrazione data da VAN DER WAERDEN per il teorema, che il grado di quel polinomio $\chi(\mathfrak{a}, m)$ uguaglia la dimensione della figura $(\mathfrak{a})$ individuata dall'ideale $\mathfrak{a}$ nella varietà $V(A)$, ci bisogna premettere qualche osservazione sulla nozione di dimensione nel caso di figure in varietà algebriche.

202. La *dimensione* (sopra k) *di una figura* $\mathfrak{a}$ *in una varietà* V *algebrica* sopra k è la massima fra le dimensioni

$$\dim \frac{S/\mathfrak{P}}{k + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}}$$

per tutte le prospettive $\mathfrak{P} \in V$ di $\mathfrak{a}$.

Una prospettiva $\mathfrak{p}$ di $\mathfrak{a}$ per la quale è raggiunto quel massimo, è necessariamente estrema, come risulta dall'osservazione più generale, che *per due prospettive* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ *in una varietà algebrica sopra* k *sempre vale*

$$m = \dim \frac{S/\mathfrak{p}}{k+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}} < \dim \frac{S'/\mathfrak{p}'}{k+\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}'} = n, \; se \; S \subset S' \neq S.$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $A=[k, x_1, \dots, x_h]$ base di $\mathfrak{p}$ e perciò anche di $\mathfrak{p}'$ (ved. **170** e **180**). Allora $\mathfrak{p}' \cap A \subset \mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{p}' \cap A$ di seguito a $S \subset S' \neq S$.

A ogni dipendenza algebrica

$$f(x_1, \dots, x_h) \subset \mathfrak{p}' \quad (f(X_1, \dots, X_h) \in k[X_1, \dots, X_h])$$

fra $x_1+\mathfrak{p}', \dots, x_h+\mathfrak{p}' \in S'/\mathfrak{p}'$ sopra $k+\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}'$ corrisponde una relazione analoga $f(x_1, \dots, x_h) \subset \mathfrak{p}$ fra $x_1+\mathfrak{p}, \dots, x_h+\mathfrak{p} \in S/\mathfrak{p}$ sopra $k+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, donde segue $m \leq n$.

Siano $y_1+\mathfrak{p}, \dots, y_n+\mathfrak{p}$ n qualunque fra gli elementi $x_1+\mathfrak{p}, \dots, x_h+\mathfrak{p}$. Volendo dimostrare che essi dipendono algebricamente sopra $k+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ e che pertanto $m<n$, basta considerare, secondo quel che si è detto sopra, il caso in cui $y_1+\mathfrak{p}', \dots, y_n+\mathfrak{p}'$ sono algebricamente indipendenti sopra $k+\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}'$. Scelto $p \in \mathfrak{p} \cap A$, $p \not\subset \mathfrak{p}'$ si avrà quindi una dipendenza algebrica $f(p^{-1}, y_1, \dots, y_n) \subset \mathfrak{p}'$ $(f(Z, Y_1, \dots, Y_n) \in k[Z, Y_1, \dots, Y_n])$ di $p^{-1}+\mathfrak{p}'$ da $y_1+\mathfrak{p}', \dots, y_n+\mathfrak{p}'$ sopra $k+\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}'$, dalla quale si trae, moltiplicandola con una potenza $p^r \subset A$, una relazione

$$g(y_1, \dots, y_n) \subset \mathfrak{p}' + p \cdot A, \quad \text{cioè} \quad \subset \mathfrak{p}' \cap A + \mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{p} \cap A$$

(con $g(Y_1, \dots, Y_n) \in k[Y_1, \dots, Y_n]$), che è proprio la dipendenza accennata degli elementi $y_1+\mathfrak{p}, \dots, y_n+\mathfrak{p}$. C. d. d.

Da questa osservazione segue in particolare, che per una figura $\mathfrak{p}$-primaria $\mathfrak{q}$

$$\dim \mathfrak{q} = \dim \mathfrak{p} = \dim \frac{S/\mathfrak{p}}{k+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}}.$$

La dimensione di una figura $\mathfrak{a}$ qualunque è quindi la massima fra le dimensioni delle figure prime di $\mathfrak{a}$ (ved. **186**).

Conseguenza immediata della definizione è il fatto che da $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ segue $\dim \mathfrak{a} \geq \dim \mathfrak{b}$.

203. Consideriamo il caso della varietà $V(A)$ di base $A=k[u_1, \dots, u_h]$ e di una figura $(\mathfrak{a})$ in $V(A)$ definita mediante un ideale $\mathfrak{a}$ in A ponendo

$$(\mathfrak{a})(S) = \mathfrak{a} \cdot S \quad \text{per ogni} \quad \mathfrak{p} \in V(A),$$

come accade nella definizione del cono tangente (ved. **197**). Se $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ con $\mathfrak{q}_i$ ideale $[\mathfrak{p}_i \frown A]$-primario è decomposizione noetheriana ridotta di $\mathfrak{a}$ e si designa con $\mathfrak{p}$ una prospettiva qualunque di $(\mathfrak{a})$, si deduce dalla relazione

$$(\prod_i [\mathfrak{p}_i \frown A])^L \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \frown A \qquad \text{(con } L \text{ abbastanza grande)},$$

che uno degli ideali primi $\mathfrak{p}_i \frown A$, sia $\mathfrak{p}_1 \frown A$, è contenuto in $\mathfrak{p} \frown A$ e che quindi $S \subset S_1$, cioè $\dim \mathfrak{p} \leq \dim \mathfrak{p}_1$ per le figure prime corrispondenti (ved. **202**). Ne segue che la dimensione della figura $(\mathfrak{a})$ uguaglia la dimensione di una delle figure prime $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{p}_i \frown A)$ individuate dai divisori primi dell'ideale $\mathfrak{a}$. (Si osserverà che difatti ogni figura $(\mathfrak{p} \frown A)$ è prima (ved. **177**), essendo $[\mathfrak{p} \frown A] \cdot S \frown s = \mathfrak{p} \frown s = [\mathfrak{p} \frown A] \cdot s$ per ciascun $s \subset S$ in $V(A)$ (ved. **174**), osservazione però irrilevante per le conclusioni).

204. Supponiamo $\mathfrak{a}$ omogeneo, sicchè anche gli ideali $\mathfrak{p}_i \frown A$ sono omogenei (ved. **200**). Fra questi divisori primi di $\mathfrak{a}$ può trovarsi l'ideale $\mathfrak{u} = \sum_{i=1}^{h} u_i \cdot A$. Se si è costruita una forma $f \in A$ che non appartiene a nessuno degli ideali $\mathfrak{p}_i \frown A$ diversi da $\mathfrak{u}$, la dimensione della figura $(\mathfrak{b})$ definita mediante l'ideale $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + f \cdot A$ invece di $\mathfrak{a}$ nel modo suddetto è minore di quella di $(\mathfrak{a})$, purchè questa sia positiva.

Sia, invero, $\mathfrak{p}$ figura prima di $(\mathfrak{b})$, cioè $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \frown A$, la cui dimensione uguaglia quella di $(\mathfrak{b})$. Siccome $\mathfrak{p} \leq (\mathfrak{b}) \leq (\mathfrak{a})$ è anche prospettiva di $(\mathfrak{a})$, si avrà $S \subset S_i$ per certo i (ved. **203**).

Se $\dim \mathfrak{p} = 0$, si ha $\dim(\mathfrak{a}) > 0 = \dim \mathfrak{p} = \dim(\mathfrak{b})$, come vogliamo dimostrare.

Se $\dim \mathfrak{p} > 0$, anche $\dim \mathfrak{p}_i \geq \dim \mathfrak{p} > 0$, sicchè $\mathfrak{p}_i \frown A$ è diverso da $\mathfrak{u}$ e quindi $f \not\subset \mathfrak{p}_i \frown A$. Ma $f \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \frown A$ epperò $S \neq S_i$, mentre $S \subset S_i$. Ciò mostra $\dim(\mathfrak{b}) = \dim \mathfrak{p} < \dim \mathfrak{p}_i \leq \dim(\mathfrak{a})$ c. d. d.

205. L'esistenza di una forma f del tipo suddetto si dimostrerebbe facilmente, se non ci importasse in riguardo alla dimostrazione del teorema di HILBERT l'ipotesi che f sia lineare. Per realizzare questa premessa senza ipotesi ristrettiva sul corpo k, estendiamo k a $K = (k, t)$ come in **199**. La funzione caratteristica $\chi(\mathfrak{a} \cdot K, m)$ dell'ideale $\mathfrak{a} \cdot K$ estensione di $\mathfrak{a}$ coincide con quella $\chi(\mathfrak{a}, m)$ di $\mathfrak{a}$, poichè una k-base indipendente del k-modulo $M(\mathfrak{a})$ delle forme di grado l in $\mathfrak{a}$ è altresì K-base *indipendente* del K-modulo delle forme di grado l in $\mathfrak{a} \cdot K$, come si vede con un ragionamento già usato in **39** I.

La figura $(\mathfrak{a} \cdot K)$ definita in $V(A \cdot K)$ ponendo

$$(\mathfrak{a} \cdot K)(S) = \mathfrak{a} \cdot K \cdot S \ (= \mathfrak{a} \cdot S) \qquad \text{per ogni} \qquad \mathfrak{p} \in V(A \cdot K)$$

ha la stessa dimensione sopra K come la figura $(\mathfrak{a})$ sopra k. Cio si riconosce dalla decomposizione noetheriana ridotta (ved. **199**) $\mathfrak{a} \cdot K = \bigcap_i \mathfrak{q}_i \cdot K$ mostrando, che la dimensione sopra K di ognuna delle figure prime $\mathfrak{p}_i' = ([\mathfrak{p}_i \frown A] \cdot K)$ individuate nel modo suddetto dai divisori primi $[\mathfrak{p}_i \frown A] \cdot K$ di $\mathfrak{a} \cdot K$ coincide con la dimensione della figura corrispondente $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{p}_i \frown A)$.

È chiaro che la dimensione (uguale a dim $\mathfrak{p}_i'$) di un corpo $(K, x_1, \dots, x_h)$ definito sopra K dalle equazioni

$$f(x_1, \dots, x_h) = 0 \qquad (\text{con } f(u_1, \dots, u_h) \in \mathfrak{p}_i \frown A)$$

non supera la dimensione (uguale a dim $\mathfrak{p}_i$) di un corpo $K_1 = (k, x_1, \dots, x_h)$ definito sopra k dalle medesime relazioni. Quindi

$$(*) \qquad \dim \mathfrak{p}_i' \leq \dim \mathfrak{p}_i .$$

D'altra parte sappiamo (ved. **42**) che esiste una composizione sopra k (K, K_1^σ) di K con K_1, la cui dimensione relativa a K raggiunge quella di K_1 sopra k, cioè dim $\mathfrak{p}_i$. Ora, l'ideale $\mathfrak{p}' \frown A \cdot K$ in $K[u_1, \dots, u_h] = A \cdot K$ costituito dai polinomi $F(u_1, \dots, u_h)$ formanti i membri sinistri delle relazioni

$$F(x_1^\sigma, \dots, x_h^\sigma) = 0$$

che definiscono (K, K_1^σ) sopra K, contiene $[\mathfrak{p}_i \frown A] \cdot K = \mathfrak{p}_i' \frown A \cdot K$, il che mostra $S' \subset S_i'$ e

$$(\dim \mathfrak{p}_i =) \dim \frac{S'/\mathfrak{p}'}{K + \mathfrak{p}'/\mathfrak{p}'} \leq \dim \frac{S_i'/\mathfrak{p}_i'}{K + \mathfrak{p}_i'/\mathfrak{p}_i'} \quad (= \dim \mathfrak{p}_i'),$$

cioè, tenuto conto di $(*)$, l'uguaglianza dim $\mathfrak{p}_i =$ dim $\mathfrak{p}_i'$ e in conseguenza

$$\dim (\mathfrak{a}) = \dim (\mathfrak{a} \cdot K).$$

Osserviamo infine, che la forma lineare $f = \sum_{n=1}^{h} u_n \cdot t^n \in A \cdot K$ non appartiene a nessuno degli ideali primi $[\mathfrak{p}_i \frown A] \cdot K$ diversi da $\mathfrak{u} \cdot K$.

Invero. l'ipotesi $f \subset [\mathfrak{p}_i \frown A] \cdot K$ equivale a una relazione

$$(c_\nu \cdot t^\nu + \dots) \cdot (u_1 \cdot t + u_2 \cdot t^2 + \dots) = \sum_l p_l \cdot t^l \quad \text{con} \quad c_\nu, c_{\nu+1}, \dots \in k, \quad p_l \in \mathfrak{p}_i \frown A$$

dalla quale si deduce successivamente $u_1 \in \mathfrak{p}_i \frown A$, $u_2 \in \mathfrak{p}_i \frown A, \dots$, cioè $\mathfrak{p}_i \frown A = \mathfrak{u}$.

206. TEOREMA di HILBERT. - *La funzione caratteristica* $\chi(\mathfrak{a}, m)$ *di un ideale omogeneo* $\mathfrak{a}$ *in un anello* $A = k[u_1, \dots, u_h]$ *è per* m *abbastanza grande un polinomio in* m *il cui grado è la dimensione della figura* $(\mathfrak{a})$ *definita da*

$$(\mathfrak{a})(S) = \mathfrak{a} \cdot S \quad \textit{per ogni} \quad \mathfrak{p} \in V(A).$$

DIMOSTRAZIONE. - Riprendiamo le notazioni di **203** e **205**: $\mathfrak{a} = \cap \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_i$ è $[\mathfrak{P}_i \cap A]$-primario, f una forma lineare $\subset\!\!\!\!|\,\mathfrak{P}_i \cap A$. se $\mathfrak{P}_i \cap A \neq \mathfrak{u}$

Risulta dalle osservazioni precedenti. che nel caso che non si riesca a trovare una forma lineare f del tipo suddetto, basterebbe estendere k a $K = (k, t)$ e dimostrare il teorema di HILBERT per l'ideale $\mathfrak{a} \cdot K$ in $A \cdot K$, nel qual caso certo esiste una forma lineare soddisfacente alle condizioni proposte. mentre le uguaglianza $\chi(\mathfrak{a} \cdot K, m) = \chi(\mathfrak{a}, m)$, $\dim(\mathfrak{a} \cdot K) = \dim(\mathfrak{a})$ assicurano la completa equivalenza del nuovo contenuto del teorema con quel che si è proposto a dimostrare.

I. - Se $\dim(\mathfrak{a}) = 0$, ognuna delle figure prime $\mathfrak{P}_i$ ha la dimensione 0. Valgono dunque relazioni $f_j(u_j) \subset \mathfrak{P}_i \cap A$ (con $f_j(U) \in k[U]$) per $j = 1, \dots, h$ che si semplificano in equazioni del tipo $u_j^m \in \mathfrak{P}_i \cap A$. essendo $\mathfrak{P}_i \cap A$ omogeneo (ved. **200**). Quindi $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{P}_i \cap A \subset \mathfrak{u}$, cioè $\mathfrak{a}$ è $\mathfrak{u}$-primario e si ha con un certo $l : \mathfrak{u}^l \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}$. Allora $\varphi(\mathfrak{a}, m) = \varphi(A, m)$ per $m \geq l$, sicchè $\chi(\mathfrak{a}, m)$ risulta costante per $m \geq l$. Il teorema è dunque vero per $\dim(\mathfrak{a}) = 0$.

II. - Supponiamolo dimostrato per $\dim(\mathfrak{a}) < n$ e consideriamo il caso di $\dim(\mathfrak{a}) = n$. Scegliendo la forma lineare f nel modo suddetto, avremo $\dim(\mathfrak{a} + f \cdot A) < n$, sicchè può affermarsi che $\chi(\mathfrak{a} + f \cdot A, m)$ è per m abbastanza grande, ad esempio per $m > m_1$, polinomio in m di grado $= \dim(\mathfrak{a} + f \cdot A) < n$.

Ora (ved. **201**)

$$(*) \qquad \varphi(\mathfrak{a} + f \cdot A, m) = \varphi(\mathfrak{a}, m) + \varphi(f \cdot A, m) - \varphi(\mathfrak{a} \cap f \cdot A, m)$$

e $\varphi(f \cdot A, m) = \varphi(A, m-1)$, mentre $\varphi(\mathfrak{a} \cap f \cdot A, m)$ si determina nel modo seguente:

Se uno degli ideali $\mathfrak{q}_i$ è $\mathfrak{u}$-primario, sia r un esponente tale che $\mathfrak{u}^r \subset \mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{u}$ per questo $\mathfrak{q}_i$, altrimenti si prenda $r = -1$. Poichè le forme $x \cdot f \in \mathfrak{a} \cap A \cdot f$ soddisfano a $x \cdot f \subset \mathfrak{q}_i$, mentre $f \subset\!\!\!\!|\,\mathfrak{P}_i \cap A$ per $\mathfrak{P}_i \cap A \neq \mathfrak{u}$, si ha $x \subset \mathfrak{q}_i$. Se il grado m di $x \cdot f$ supera r, si avrà inoltre $x \subset \mathfrak{q}_i$ per $\mathfrak{P}_i \cap A = \mathfrak{u}$ e quindi $x \in \mathfrak{a}$, cioè $\varphi(\mathfrak{a} \cap A \cdot f, m) = \varphi(\mathfrak{a}, m-1)$ per $m > r$.

Ciò posto, si ottiene da $(*)$

$$\varphi(\mathfrak{a} + A \cdot f, m) = \varphi(\mathfrak{a}, m) - \varphi(\mathfrak{a}, m-1) + \varphi(A, m-1)$$

e pertanto

$$\chi(\mathfrak{a} + A \cdot f, m) = \sum_{l=r+1}^{m} (\varphi(A, l) - \varphi(\mathfrak{a} + A \cdot f, l)) + c'' =$$

$$= c'' + \sum_{r+1}^{m} (\varphi(A, l) - \varphi(\mathfrak{a}, l)) - \sum_{r+1}^{m} (\varphi(A, l-1) - \varphi(\mathfrak{a}, l-1))$$

$$= \chi(\mathfrak{a}, m) - \chi(\mathfrak{a}, m-1) + c$$

e finalmente

$$\chi(\mathfrak{a},\ m) = c \cdot m + c' + \sum_{r+1}^{m} \chi(\mathfrak{a} + A \cdot f,\ l).$$

Essendo $\chi(\mathfrak{a} + f \cdot A,\ m)$ per $m > m_1$ polinomio di grado $m < n$, la sua sommazione estesa da $m = r + 1$ fino a un $m > m_0 =$ massimo di $r + 1$ e m_1 darà per $\chi(\mathfrak{a},\ m)$ una espressione come polinomio di grado $\leq n = \dim(\mathfrak{a})$.

III. Per dimostrare che il grado di questo polinomio è appunto n, osserviamo che fra gli elementi $u_1, \ldots, u_h$ debbono trovarsi n, siano $u_1, \ldots, u_n$ tali che

$$(**) \qquad \mathfrak{a} \frown k[u_1, \ldots, u_n] = 0.$$

Se infatti ciò non si verificasse, se cioè per n qualunque presi $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ si trovasse un polinomio $g(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \neq 0$, $\in \mathfrak{a}$, si avrebbe per ogni $\mathfrak{P}_i$ la dipendenza algebrica

$$g(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \subset \mathfrak{P}_i \frown A$$

fra $u_{i_1} + \mathfrak{P}_i, \ldots, u_{i_n} + \mathfrak{P}_i$ contrario all'ipotesi che per un $\mathfrak{P}_i$ almeno sia $\dim \mathfrak{P}_i = n$.

Ora da $(**)$ segue, che ci sono almeno $\binom{l + n - 1}{n - 1}$ forme di grado l linearmente indipendenti dalle $\varphi(\mathfrak{a},\ l)$ forme di grado l in $\mathfrak{a}$, cioè

$$\varphi(A,\ l) = \binom{l + h - 1}{h - 1} \geq \varphi(\mathfrak{a},\ l) + \binom{l + n - 1}{n - 1}$$

e quindi

$$\chi(\mathfrak{a},\ m) = \sum_{l=0}^{m} (\varphi(A,\ l) - \varphi(\mathfrak{a},\ l)) \geq \sum_{l=0}^{m} \binom{l + n - 1}{n - 1} = \binom{m + n}{n},$$

sicchè il grado del polinomio $\chi(\mathfrak{a},\ m)$ non può essere minore di $n = \dim(\mathfrak{a})$.

§ 7. Funzione caratteristica di una figura.

207. Definizioni. - La funzione caratteristica $\chi(\mathfrak{a}(s),\ m)$ di una figura $\mathfrak{a}$ in una varietà V associa a ogni prospettiva $\mathfrak{p} \in V$ e ogni numero intero $m \geq 0$, il valore

$$\chi(\mathfrak{a}(s),\ m) = \chi(\overline{\mathfrak{a}(s)},\ m)$$

della funzione caratteristica (ved. **201**) dell'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ che individua il cono tangente $(\overline{\mathfrak{a}(s)})$ (ved. **197**) di $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$.