CAPITOLO I

IL CALCOLO DIFFERENZIALE

§ 1. Corrispondenze infinitesimali e differenziali.

1. Conveniamo di usare le abbreviazioni seguenti:

Se M designa un insieme di elementi di un anello R, commutativo o no, col simbolo

$$[M]$$

si rappresenterà sempre il sottoanello di R generato dall'insieme M.

Nel caso in cui R sia commutativo e che l'anello $[M]$ non sia costituito solamente con zero o con elementi che sono divisori dello zero in R, designeremo con

$$(M)$$

l'anello costituito da tutti i quozienti $\frac{a}{b}$ di elementi qualsiansi di $[M]$, però tali che il denominatore b non sia nè zero nè divisore dello zero in R.

Scriveremo ρ, σ, τ, ecc. per gli isomorfismi ed omomorfismi, usando questi simboli come esponenti. Si avranno dunque le relazioni

$$(a+b)^\rho = a^\rho + b^\rho, \qquad (a \cdot b)^\rho = a^\rho \cdot b^\rho$$

purchè si tratti di un omomorfismo ρ di un anello. Nel caso in cui si possa applicare l'omomorfismo τ dopo aver applicato un omomorfismo σ definiamo con

$$(a^\sigma)^\tau = a^{\sigma\tau}$$

il prodotto di questi omomorfismi σ, τ.

Parlando di anello intenderemo sempre, se non è detto altro, di parlare di anello commutativo.

2. Precisiamo la nozione di *elemento infinitesimale* usando l'attributo « infinitesimale » come sinonimo del termine « nilpotent » dell'algebra astratta. Un elemento x di un anello commutativo è dunque infinitesimale e precisamente *di grado* n, allora e soltanto allora che la potenza x^n è zero, mentre nessuna potenza di x con esponente minore di n è zero. È appunto questa proprietà che caratterizza l'uso delle quantità infinitesimali nell'analisi. (Nel caso di un anello non-commutativo un elemento x dovrà essere chiamato infinitesimale soltanto se l'ideale bilaterale generato da x è costituito da elementi nilpotenti).

3. Un anello A sarà detto *infinitamente vicino* ad un anello B allora e soltanto allora che tutti e due siano sottoanelli di un medesimo anello R ed esista un isomorfismo σ di A su B tale che valgano in R le relazioni

$$(x^\sigma - x)(y^\sigma - y) = 0 \qquad \text{per } x,\ y \text{ elementi qualunque di } A.$$

Se l'anello R è tale che generalmente da $2z = 0$ può dedursi $z = 0$, la condizione or ora espressa si semplifica nella

$$(x^\sigma - x)^2 = 0 \qquad\qquad \text{per } x \text{ qualunque di } A,$$

il che dice precisamente che tutti i « *differenziali* » $x^\sigma - x$ sono infinitesimali di grado minore o uguale a 2.

4. Chiameremo *corrispondenza infinitesimale h-upla di A* ogni anello

$$[A,\ A^{\sigma_1},\ A^{\sigma_2}, \dots ,\ A^{\sigma_h}] \tag{2}$$

generato da A e da anelli A^{σ_i} infinitamente vicini ad A, riservando tale denominazione solamente a questo caso. Notiamo per precisione che la vicinanza infinitesimale di cui sopra è da intendersi entro l'anello (2).

Ponendo

$$x^{\sigma_i} = x + d_i x$$

si hanno le relazioni

$$d_i x \cdot d_i y = 0$$

esprimenti la vicinanza infinita di A^{σ_i} ad A e le equazioni

$$(x + y) + d_i(x + y) = (x + d_i x) + (y + d_i y)$$
$$(x \cdot y) + d_i(x \cdot y) = (x + d_i x) \cdot (y + d_i y)$$

esprimenti che σ_i è un omorfismo di A.

L'anello (2) potendosi evidentemente generare da A e dagli insiemi $d_i A$ di tutti i cosidetti differenziali $d_i x$, possiamo affermare:

Una corrispondenza infinitesimale h-upla di A è un anello

$$[A,\ d_1 A,\ d_2 A, \dots ,\ d_h A] \tag{3}$$

generato da A e da elementi $d_i x$ fra i quali sussistono le relazioni

$$\left.\begin{array}{lr} (4) & d_i(x + y) - d_i x - d_i y \quad = 0 \\ (5) & d_i(x \cdot y) - x \cdot d_i y - y \cdot d_i x = 0 \\ (6) & d_i x \cdot d_i y = 0 \end{array}\right\} \text{(per } x,\ y \text{ qualunque di } A\text{)}.$$

Partendo da questa osservazione costruiamo ora un sopra-anello

$$[A,\ d_1 A,\ d_2 A, \dots ,\ d_h A] \tag{7}$$

di A associando ad ogni elemento x di A, h simboli

$$d_1 x,\ d_2 x, \dots ,\ d_h x$$

e generando con loro (il cui insieme sia denotato con $d_1A, d_2A, \ldots d_hA$ come prima) un anello (7) definito dalle equazioni (4), (5), (6), tale cioè che le relazioni seguenti dalle (4), (5), (6) mediante le *operazioni ideali* (cioè la moltiplicazione con elementi qualsiasi dell'anello e la sottrazione) siano le sole relazioni sussistenti fra i simboli d_ix, il che è sempre possibile nell'algebra, dato che essa non si preoccupa della qualità degli oggetti dei suoi calcoli.

Dimostriamo ora che tale anello è una corrispondenza infinitesimale h-upla di A.

Dalle sole equazione (4), (5), (6) segue che l'associazione σ_i definita da

$$x \to x + d_ix \qquad (x \text{ qualunque di } A)$$

è un omomorfismo del sottoanello A di (7) su un sottoanello A^{σ_i} di (7). Poichè l'ipotesi $x^{\sigma_i} = 0$, cioè $x + d_ix = 0$, conduce alla conclusione $x = 0$, è chiaro che σ_i è pure isomorfismo. Esprimendo le equazioni (6) la vicinanza infinita dei sottoanelli A^{σ_i} ad A, e potendosi l'anello (7) generare mediante gli anelli $A, A^{\sigma_1}, A^{\sigma_2}, \ldots, A^{\sigma_h}$, è dimostrato ormai che si tratta veramente di una corrispondenza infinitesimale h-upla di A.

5. La corrispondenza or ora costruita è *generica* nel senso, che ogni altra corrispondenza infinitesimale h-upla di A

$$(8) \qquad [A, A^{\tau_1}, A^{\tau_2}, \ldots, A^{\tau_h}]$$

può derivarsi da quella mediante un omomorfismo ρ avente l'effetto

$$x^\rho = x, \quad (x^{\sigma_i})^\rho = x^{\tau_i} \quad (\text{per } x \text{ qualunque di } A \text{ e } i = 1, 2, \ldots, h)$$

e inducente isomorfismi degli anelli A^{σ_i} sugli anelli A^{τ_i}. Ciò risulta immediatamente dal fatto che in una corrispondenza infinitesimale h-upla di A qualsiasi, come (8), valgono per le differenze $x^{\tau_i} - x$ (dopo averle designate con d_ix) le medesime relazioni (4), (5), (6) delle quali ci siamo serviti nella costruzione dell'anello (7), mentre può ben darsi che ne sussistano delle altre, indipendenti da loro.

6. È chiaro che tutte le corrispondenze infinitesimali generiche di un medesimo anello A delle diverse moltiplicità possono essere interpretate come sottoanelli di una stessa *corrispondenza infinitesimale generica infinita di A.* È ciò che faremo, chiamando questa corrispondenza semplicemente *la corrispondenza infinitesimale di A.*

7. Notiamo che ogni permutazione π tra gli infiniti indici di differenziazione 1, 2, ... della corrispondenza infinitesimale

$$(9) \qquad [A, A^{\sigma_1}, A^{\sigma_2}, A^{\sigma_3}, \ldots] = [A, d_1A, d_2A, d_3A, \ldots]$$

induce un automorfismo π di questo anello.

Chiamiamo *forma differenziale di grado h* di A ogni elemento di (9) che ammette un' espressione del tipo

$$F = \Sigma\, nd_1a \dots d_hb + \Sigma\, e \cdot d_1f \dots d_hg$$

dove $a, \dots, b$, e, $f, \dots, g$ designano elementi qualunque di A, mentre n denota un numero intero razionale indicante che trattasi dell' n-plo dell' espressione ad esse seguente. (La necessità di ammettere una parte costituita da n-pli della specie ora descritta derivasi dalla generalità delle nostre ipotesi che non presuppongono che l' anello A abbia un elemento 1).

Designando con πF il risultato dell' applicazione dell' automorfismo suddetto π sull' elemento F, cioè

$$\pi F = \Sigma\, nd_{\pi(1)}a \dots d_{\pi(h)}b + \Sigma\, e \cdot d_{\pi(1)}f \dots d_{\pi(h)}g,$$

possiamo dire che ogni elemento della corrispondenza infinitesimale di A (come del resto di ciascuna corrispondenza infinitesimale di A) è una somma di termini del tipo πF.

8. Una corrispondenza infinitesimale h-upla o infinita di A è detta *corrispondenza differenziale* h-upla o infinita di A allora e soltanto allora che in essa anche gli anelli A^{σ_i} siano infinitamente vicini mutualmente e precisamente A^{σ_i} ad A^{σ_j} mediante l' isomorfismo associante x^{σ_i} ad x^{σ_j} per x qualunque di A.

La vicinanza infinita di A^{σ_i} ad A^{σ_j} si esprime con le equazioni

$$(x^{\sigma_i} - x^{\sigma_j})(y^{\sigma_i} - y^{\sigma_j}) = 0 \qquad (\text{per } x,\ y \text{ qualunque di } A)$$

le quali si semplificano, tenuto conto delle relazioni (4), (5), (6), in

$$d_ixd_jy + d_iyd_jx = 0 \qquad (\text{per } x,\ y \text{ qualunque di } A). \tag{10}$$

9. Come nel caso delle corrispondenze semplicemente infinitesimali si costruisce la *corrispondenza differenziale h-upla generica di A* quale anello

$$[A,\ d_1A,\ d_2A, \dots,\ d_hA] \tag{11}$$

generato da A e (in generale) da infiniti simboli $d_1x,\ d_2x, \dots,\ d_hx$ (con x qualunque di A) legati solamente dalle relazioni (4), (5), (6), (10) e da quelle che ne conseguono mediante le operazioni ideali.

Per intravedere che con questo veramente si ottiene una corrispondenza differenziale di A basta valersi del fatto constatato in 4, e cioè che le equazioni (4), (5), (6) esprimono che l' anello (11) può generarsi da A ed esemplari A^{σ_i} omomorfi ad A mediante gli omomorfismi σ_i definiti da

$$x^{\sigma_i} = x + d_ix \qquad (x \text{ qualunque di } A),$$

i quali, benchè siano aggiunte adesso le relazioni (10), si riconoscono subito essere isomorfismi, cosicchè anche le associazioni

$$x + d_i x \rightarrow x + d_j x \qquad (x \text{ qualunque di } A)$$

definiscono isomorfismi e precisamente quelli realizzanti la vicinanza infinita di A^{σ_i} ad A^{σ_j}.

L'attributo «*generica*» sta anche in questo caso per indicare che ogni corrispondenza differenziale h-upla di A

$$[A, A^{\tau_1}, \dots, A^{\tau_h}]$$

si deduce dalla corrispondenza suddetta mediante un omomorfismo ρ avente l'effetto

$$x^\rho = x, \qquad (x^{\sigma_i})^\rho = x^{\tau_i}, \qquad (x \text{ qualunque di } A).$$

La corrispondenza differenziale infinita generica di A

(12) $$[A, d_1 A, d_2 A, d_3 A, \dots],$$

che chiameremo semplicemente *la corrispondenza differenziale di* A, contiene come sottoanelli corrispondenze differenziali, generiche di A di tutte le molteplicità, cosicchè la sua considerazione ne rende superfluo lo studio.

10. *Gli isomorfismi* $x \rightarrow x + d_i x$ *di* A *su* A^{τ_i} *possono essere estesi di modo che essi divengano automorfismi* (che saranno designati cogli stessi simboli σ_i) *della corrispondenza differenziale di* A.

Difatti, postulando

$$(d_j x)^{\sigma_i} = d_j x \qquad (\text{per } x \text{ qualunque di } A \text{ e } i, j = 1, 2, 3, \dots)$$

oltre a $x^{\sigma_i} = x + d_i x$, si è costretti a stabilire, per un elemento

$$X = \Sigma \pi F \quad (\text{con } F = \Sigma\, n d_1 a \dots d_h b + \Sigma\, e \cdot d_1 f \dots d_h g) \quad (\text{ved. } 7),$$

(13) $$X^{\sigma_i} = \Sigma\, (\pi F)^{\sigma_i} \quad \text{con} \quad (\pi F)^{\sigma_i} = \Sigma\, n d_{\pi(1)} a \dots d_{\pi(h)} b + \Sigma\, e^{\sigma_i} \cdot d_{\pi(1)} f \dots d_{\pi(h)} g.$$

Ora, serviamoci di questa condizione necessaria per definire l'estensione σ_i dell'isomorfismo σ_i con la formula (13), o piuttosto con la formula

$$d_i X = \Sigma\, d_i \pi F \quad \text{con} \quad d_i \pi F = \Sigma\, d_i e \cdot d_{\pi(1)} f \dots d_{\pi(h)} g,$$

introducendo dapprima un'estensione dell'operazione d_i alla corrispondenza totale.

Proviamo anzitutto l'univocità dell'operazione d_i così generalizzata.

Se $X = \Sigma\, \pi G$ è un'altra espressione del medesimo elemento X di (12), la differenza $\Sigma\, \pi F - \Sigma\, \pi G$ può essere ridotta a zero in conseguenza delle relazioni (4), (5), (6), (10), il che significa che essa può scriversi senza nessuna ipotesi sui simboli (e cioè colla sola applicazione delle regole delle tre prime operazioni fondamentali dell'aritmetica sui simboli che si presentano nel calcolo) come una somma di termine della forma

$$\begin{aligned}
&\pm (d_i(x+y) - d_i x - d_i y)\cdot d_{k_1}z_1 \dots d_{k_h}z_h,\\
&\pm (d_i(x\cdot y) - x\cdot d_i y - y\cdot d_i x)\cdot d_{k_1}z_1 \dots d_{k_h}z_h,\\
&\pm (d_i x\cdot d_i y)\cdot d_{k_1}z_1 \dots d_{k_h}z_h,\\
&\pm (d_i x\cdot d_j y + d_i y\cdot d_j x)\cdot d_{k_1}z_1 \dots d_{k_h}z_h,\\
&a\cdot (d_i(x+y) - d_i x - d_i y)\cdot d_{k_1}z_1 \dots d_{k_h}z_h,\\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

(con $x, y, a, z_1, \dots, z_h$ qualunque di A)

(dove $h \geq 0$ e nel caso $h = 0$ si omettano le parti $d_{k_1}z_1 \dots d_{k_h}z_h$).

Ora, applicando a questi termini l'operazione d_i non si ottengono che espressioni annullantisi in conseguenza delle equazioni (4), (5), (6), (10) (il che, del resto, non si verificherebbe se non fossero a disposizione le equazioni (10) che distinguono la corrispondenza differenziale dalla corrispondenza soltanto infinitesimale).

Poichè è dimostrato ormai che l'operazione d_i è univoca, si constatano subito le relazioni

$$d_i(X+Y) = d_iX + d_iY, \quad d_i(X\cdot Y) = X\cdot d_iY + Y\cdot d_iX$$

come valide per elementi qualsiansi X, Y di (12), le quali, prese insieme con le relazioni evidenti $d_iX\cdot d_iY = 0$ mostrano che con

$$X^{\sigma_i} = X + d_iX \qquad (X \text{ qualunque di } (12))$$

è definito un automorfismo σ_i della corrispondenza generica di A avente entro l'anello A lo stesso effetto dell'isomorfismo σ_i donde siamo partiti.

11. Osserviamo ancora (benchè non avremo occasione di valercene) che, dalle equazioni evidenti $d_i(d_jx) = 0$ (per x qualunque di A) segue

$$d_i(d_jX) = 0 \qquad \text{per } X \text{ qualunque di } (12)$$

oppure

$$(X^{\sigma_j} - X)^{\sigma_i} - (X^{\sigma_j} - X) = 0 \quad \text{cioè} \quad X^{\sigma_j\sigma_i} - X = (X^{\sigma_i} - X) + (X^{\sigma_j} - X),$$

il che mostra che *gli automorfismi σ_i generano un gruppo abeliano di automorfismi*

$$\sigma_1^{m_1}\cdot\sigma_2^{m_2}\cdot\sigma_3^{m_3}\dots$$

della corrispondenza differenziale dell'anello A, che risultano infinitesimali in forza delle equazioni generali

$$X^{\sigma_1^{m_1}\cdot\sigma_2^{m_2}\dots} - X = \sum_i m_i(X^{\sigma_i} - X) = \sum m_i d_iX.$$

12. Confrontando le relazioni

$$d_i x \cdot d_j y + d_i y \cdot d_j x = 0$$

$$d_i(\Sigma\, n d_1 a \ldots d_h b + \Sigma\, e \cdot d_1 f \ldots d_h g) = \Sigma\, d_i e \cdot d_1 f \ldots d_h g$$

$$d_i(d_j X) = 0$$

con le regole

$$dx dy + dy dx = 0$$

$$d(\Sigma\, n da \ldots db + \Sigma\, e \cdot df \ldots dg) = \Sigma\, de df \ldots dg$$

$$d(dX) = 0$$

del calcolo esterno, si rivela un intimo legame fra la corrispondenza differenziale di A ed *il calcolo delle forme differenziali esterne* di A, il quale *può essere addirittura considerato come stretta concentrazione dei calcoli da eseguire nella corrispondenza differenziale di un anello.*

Se nelle nostre applicazioni del calcolo esterno scriviamo

$$\Sigma\, n da \ldots db + \Sigma\, e \cdot df \ldots dg$$

e

$$d(\Sigma\, n da \ldots db + \Sigma\, e \cdot df \ldots dg),$$

allora sono, purchè non sia detto altro, da intendersi gli elementi

$$\Sigma\, n d_1 a \ldots d_h b + \Sigma\, e \cdot d_1 f \ldots d_h g$$

e rispettivamente

$$d_1(\Sigma\, n d_2 a \ldots d_{h+1} b + \Sigma\, e \cdot d_2 f \ldots d_{h+1} g).$$

Calcolando allora il prodotto $\xi \wedge \eta$ di forme esterne

$$\xi = \Sigma\, n da \ldots db + \Sigma\, e \cdot df \ldots dg$$
$$\eta = \Sigma\, n' da' \ldots db' + \Sigma\, e' \cdot df' \ldots dg'$$

nel modo

$$\xi \wedge \eta = \Sigma\, (n \cdot n') da \ldots db da' \ldots db' + \Sigma\, n e' \cdot da \ldots db df' \ldots dg' +$$
$$\Sigma\, n' e \cdot df \ldots dg da' \ldots db' + \Sigma\, e \cdot e' \cdot df \ldots dg df' \ldots dg',$$

le equazioni note

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{h \cdot h'} \eta \wedge \xi, \qquad d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta + (-1)^h \xi \wedge d\eta$$
$$d(d\xi) = 0 \qquad (h,\ h' \text{ designando i gradi delle forme } \xi,\ \eta)$$

rimangono valide anche nell'interpretazione suddetta delle forme esterne come elementi della corrispondenza differenziale.