Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier.

Memoria di LEONIDA TONELLI (a Bologna).

INTRODUZIONE

Lo studio della convergenza della serie di FOURIER di una funzione di due variabili — *serie doppia di Fourier* — è, come è noto, assai più complesso di quello relativo alla serie di FOURIER di una funzione di una variabile sola. La naturale maggiore complicazione che si presenta nel passare da una serie semplice ad una serie doppia, viene aggravata da un fatto nuovo che si verifica per le serie multiple di FOURIER. Mentre per una serie di FOURIER in una sola variabile la convergenza in un dato punto dipende (per un teorema di RIEMANN) *esclusivamente* dal comportamento della funzione generatrice nell'intorno di quel punto, altrettanto non può affermarsi per una serie doppia di FOURIER. Anzi, per una tale serie, avviene che la convergenza in un determinato punto può sempre farsi sparire cambiando opportunamente la funzione generatrice *soltanto al di là* di un intorno del punto stesso ([1]). Da ciò deriva che le condizioni di convergenza della serie doppia di FOURIER in un punto non possono limitarsi alle proprietà della funzione generatrice nell'intorno del punto stesso, e che perciò non possono ottenersi criteri di convergenza in un punto della stessa semplicità di quelli che si hanno per le serie di FOURIER in una sola variabile, pur anche prescindendo dal fatto

---

([1]) Vogliamo però osservare che, se si resta nel campo delle funzioni limitate, l'influenza, sulla convergenza in un dato punto, dei valori della funzione nei punti al di là di un intorno del punto considerato, si traduce in una semplice *indeterminazione del primo ordine*. Più precisamente, se f_1 e f_2 sono due funzioni limitate e integrabili, coincidenti in un intorno del punto $(\bar{x}, \bar{y})$, la serie doppia di FOURIER di $f_1 - f_2$ in $(\bar{x}, \bar{y})$ o converge allo zero o è indeterminata, ma sempre ha per somma lo zero se viene sommata col metodo della media aritmetica del CESARO. Perciò, se la serie della f_1 è convergente in $(\bar{x}, \bar{y})$, quella della f_2 o è convergente anche essa, ed allora ha la stessa somma di quella della f_1, oppure è sommabile col metodo della media aritmetica, fornendo ancora la stessa somma della serie della f_1. È noto poi che, sulla convergenza in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$, hanno influenza soltanto i valori della funzione generatrice relativi ai punti che hanno o l'ascissa prossima a $\bar{x}$ oppure l'ordinata prossima a $\bar{y}$.

che le condizioni nell'intorno del punto debbano essere necessariamente più complesse.

Per quanto poi riguarda le discontinuità della funzione generatrice, va notato che discontinuità di natura assai semplice possono essere sufficienti ad impedire la convergenza della serie doppia di FOURIER ([2]).

Il primo ad occuparsi della convergenza delle serie doppie di FOURIER sembra essere stato G. ASCOLI ([3]); Egli però considerò soltanto la convergenza per linee e per colonne della serie doppia, e non già la convergenza ordinaria nel senso moderno, precisato da STOLZ ([4]) e PRINGSHEIM ([5]). Dopo queste ricerche, un teorema di convergenza fu dato dal PICARD, nel suo *Traité d'Analyse* ([6]). Il metodo semplice ed elegante usato dal PICARD porta a stabilire la convergenza assoluta della serie doppia, ma richiede condizioni troppo restrittive, giacchè presuppone, per la funzione generatrice, l'esistenza, la continuità e la periodicità delle derivate parziali dei primi quattro ordini.

Arriviamo così al periodo delle ricerche moderne sulla convergenza delle serie doppie di FOURIER, iniziato da G. CERNI, nel 1901 ([7]). Il CERNI enunciò un criterio di convergenza molto notevole, in base al quale la convergenza è assicurata quando la funzione generatrice ha i rapporti incrementali, rispetto ad x e ad y, entrambi limitati; e benchè i ragionamenti del CERNI non siano privi di errori, il criterio dato è perfettamente valido, come risulterà da quanto dimostreremo nella presente Memoria.

Nel 1903, troviamo un lavoro di M. KRAUSE ([8]), nel quale è stabilita la convergenza della serie doppia di FOURIER per ogni funzione $f(x, y)$ tale che il quadrato $Q \equiv [0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$ possa essere diviso in un numero finito di rettangoli a lati paralleli agli assi x e y, in ognuno dei quali ciascuna delle espressioni $f(x', y) - f(x, y)$, $f(x, y') - f(x, y)$, $f(x', y') - f(x', y) - f(x, y') + f(x, y)$, dove è $x' > x$ e $y' > y$, conservi un segno costante. Questo criterio risulta un caso particolare di un altro, dato nel 1906 da

([2]) Così, per es., se la funzione generatrice nell'intorno del punto (0, 0) ha sempre il valore 0, salvo nei punti di un angolo minore di 90°, avente il vertice in (0, 0), nei quali supponiamo che abbia il valore 1, la serie doppia di FOURIER *non* è convergente in (0, 0).

([3]) Memorie della R. Accademia dei Lincei, s. 3, vol. IV (1879), pp. 253-300; vol. VIII (1880), pp. 263-319.

([4]) Math. Annalen, B. 24 (1884), p. 157.

([5]) Sitzgsb. Akad. München, B. 27 (1897), pp. 100-152.

([6]) T. I (1ª ediz. 1891), pp. 270-271.

([7]) Rend. R. Istit. Lomb. Scienze e Lettere, s. 2, vol. XXXIV (1901), pp. 921-956.

([8]) Leipzig Berichte, B. 55 (1903), pp. 164-197.

G. H. HARDY [9], che assicura la convergenza per ogni funzione *a variazione doppia finita* (secondo la terminologia da noi adottata [10]) e tale che, sia come funzione della sola x, sia come funzione della sola y, risulti sempre a variazione limitata. Di un altro caso particolare del criterio di HARDY, si occupò, nel 1910, A. VERGERIO [11], dal cui lavoro, qualora fosse scevro da errori, si potrebbe trarre anche la convergenza della serie doppia di FOURIER per ogni funzione continua mai decrescente nel verso positivo degli assi, il che in fatto avviene, come risulterà da quanto qui dimostreremo.

Estendendo una condizione data dal DE LA VALLÉE POUSSIN per le serie semplici di FOURIER, W. H. YOUNG, nel 1912 [12], dimostrò la convergenza della serie doppia di FOURIER della funzione $f(x, y)$ nel punto (x, y), sotto la condizione che l'espressione $\operatorname{cosec} u \operatorname{cosec} v \int_{-u}^{u} \int_{-v}^{v} f(x+u, y+v)dudv$ sia, nel campo $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq \pi$, una funzione di (u, v) a variazione doppia finita e tale da risultare a variazione limitata tanto come funzione della sola u quanto come funzione della sola v.

Della convergenza della serie doppia di FOURIER si occuparono anche W. W. KÜSTERMANN, nel 1913 [13], e H. GEIRINGER, nel 1918 [14], presentando alcune osservazioni al riguardo, ma senza giungere a criteri veramente utilizzabili.

Dobbiamo menzionare, infine, un risultato recentissimo di E. W. HOBSON [15], il quale stabilisce la convergenza della serie doppia di FOURIER per ogni funzione limitata, monotona tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y, e tale che il suo rapporto incrementale rispetto alla x (oppure rispetto alla y) risulti limitato.

Nella presente Memoria, diamo un teorema generale di convergenza per la serie doppia di FOURIER, utilizzando il concetto di *funzione di due variabili a variazione limitata*, da noi introdotto recentemente, a proposito di alcune ricerche sulla quadratura delle superficie [16]. Indicate con $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$, considerata rispettivamente come

---

[9] Quart. Journ., vol. XXXVII (1906), pp. 53-79.
[10] Vedi n.° 25.
[11] Giornale di Matem. del Battaglini, vol. XLIX (1911), pp. 181-206.
[12] Proc. London Math. Soc., s. 2, vol. XI (1912), pp. 133-184.
[13] Inaugural-Dissertation, München (1913), pp. 1-60.
[14] Monatshefte f. Math. u. Phys, B. XXIX (1918), pp. 65-144.
[15] *The theory of functions of a real variable....* (Second Edition, 1926), vol. II, p. 710.
[16] Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. III (1926), p. 357.

funzione della sola x e della sola y, dimostriamo che « *se la $f(x, y)$ è integrabile e a variazione limitata, in ogni punto (x, y) in cui valgono le quattro uguaglianze*

$$\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x \pm u, \; y + v) - V_{(x)}(x \pm 0, \; y + v) \} = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x + u, \; y \pm v) - V_{(y)}(x + u, \; y \pm 0) \} = 0,$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso il valore

$$\frac{1}{4} \{ f(x+0, \; y+0) + f(x-0, \; y+0) + f(x-0, \; y-0) + f(x+0, \; y-0) \} \text{ ».}$$

Da questo teorema deduciamo poi numerosi criteri di convergenza, ritrovando, in particolare, tutti quelli sino ad ora conosciuti, ad eccezione del criterio dato da W. H. YOUNG. Per ragione di spazio, non ci siamo occupati qui di tale criterio; ma in altro lavoro dedurremo dal teorema sopra enunciato una condizione di convergenza che contiene come caso particolare quella di YOUNG.

Fra i nuovi criteri che qui stabiliamo ci limitiamo a rammentare quelli che assicurano la convergenza in un dato punto della serie doppia di FOURIER:

se la funzione generatrice è limitata, e sempre monotona come funzione della sola x e pure sempre monotona come funzione della sola y, e se, inoltre, esistono i quattro limiti $f(x \pm 0, \; y \pm 0)$;

oppure se, essendo limitata e integrabile, la $f(x, y)$, come funzione della sola x e pure come funzione della sola y, compie un numero di oscillazioni sempre inferiore ad un numero fisso, ed inoltre esistono ancora i quattro limiti $f(x \pm 0, \; y \pm 0)$;

oppure se la $f(x, y)$ è, come funzione della sola x, sempre assolutamente continua, e pure assolutamente continua come funzione della sola y, e se, inoltre, esistono due numeri positivi σ e N, tali che sia sempre

$$\int_0^{2\pi} | f_x' |^{1+\sigma} dx < N, \qquad \int_0^{2\pi} | f_y' |^{1+\sigma} dy < N.$$

Diamo poi delle condizioni di convergenza indipendenti dal teorema generale di cui abbiamo già parlato e che si riattaccano alle osservazioni del KÜSTERMANN e della GEIRINGER, e ne deduciamo un criterio (n.° 26) che ci sembra la più naturale estensione a due variabili del noto criterio di LIPSCHITZ.

Insieme con la convergenza in un dato punto, studiamo anche la convergenza uniforme in un dato campo; e terminiamo il lavoro con lo stabilire delle condizioni affinchè la serie doppia di Fourier sia sommabile per linee o per colonne. Dimostriamo che, in tutti i casi di convergenza della serie doppia considerati nella presente Memoria, la serie si può comunque sommare per linee o per colonne, giungendo sempre allo stesso risultato; e ritroviamo, in particolare, quanto, a questo proposito, provò l'Ascoli nelle ricerche di cui abbiamo già fatto cenno.

I. Preliminari.

1. Secondo una definizione già posta altrove ([17]), diremo che la funzione $f(x, y)$, supposta definita nel quadrato $Q \equiv [0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$, è *a variazione limitata in* Q, se:

1°) per quasi tutti i valori di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$ in $(0, 2\pi)$, $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ sono funzioni, rispettivamente di y e di x, a variazione limitata in $(0, 2\pi)$;

2°) le variazioni totali di $f(\bar{x}, y)$ e di $f(x, \bar{y})$, in $(0, 2\pi)$, sono delle funzioni integrabili (nel senso del Lebesgue), rispettivamente di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$, in $(0, 2\pi)$.

Indicheremo, nel seguito, con $V_{(x)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, x)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x; e con $V_{(y)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, y)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y. Se la $f(x, y)$ è *a variazione limitata* in Q, le funzioni $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ esistono finite per quasi tutti i valori di y e x, rispettivamente, in $(0, 2\pi)$, ed esistono (finiti) ambedue gli integrali

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)dy, \quad \int_0^{2\pi} V_{(y)}(x, 2\pi)dx.$$

2. Sia $f(x, y)$ una funzione definita in tutto il piano (x, y) e periodica, di periodo 2π, tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y. Se questa funzione è *a variazione limitata* nel quadrato Q, essa risulta a variazione limitata anche in ogni altro quadrato o rettangolo a lati paralleli agli assi x e y; diremo allora, senz'altro, che essa è *a variazione limitata*. In questo caso,

---

([17]) V. loc. cit. ([16]).

intenderemo che le funzioni $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ siano definite in tutto il piano (x, y), la loro definizione essendo dedotta, da quella già data in Q, per mezzo della periodicità, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y. A tale scopo, cambieremo il valore della $V_{(x)}(x, y)$ per $x = 0$, ponendolo uguale a $V_{(x)}(2\pi, y)$; ed analogamente, il valore di $V_{(y)}(x, y)$ per $y = 0$ sarà sostituito con $V_{(y)}(x, 2\pi)$.

Inoltre, se la $f(x, y)$ è integrabile (nel senso del Lebesgue) in Q, essa risulta integrabile anche in ogni altro quadrato o rettangolo; e diremo, senz'altro, che tale funzione è integrabile.

3. Data una funzione $f(x, y)$ in un certo campo C, consideriamo un punto (x, y) *interno* a C. Diremo che esiste finito il limite $\lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x + h, y + k)$ se esiste un numero finito, che indicheremo con $f(x + 0, y + 0)$, tale che, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, si possa poi sempre determinare un $\delta > 0$, in modo che, per ogni coppia h, k, soddisfacente alle disuguaglianze $0 < h < \delta$, $0 < k < \delta$, sia

$$|f(x + 0, y + 0) - f(x + h, y + k)| < \sigma.$$

Analogamente si definiranno i limiti $f(x - 0, y + 0) = \lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x - h, y + k)$, $f(x - 0, y - 0) = \lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x - h, y - k)$ e $f(x + 0, y - 0) = \lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x + h, y - k)$. Definiremo poi il limite $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to +0}} f(x + h, y + k)$ come quel numero (se esiste) tale che, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, si possa poi sempre determinare un $\delta > 0$, in modo che, per ogni coppia h, k, soddisfacente alle $0 < |h| < \delta$, $0 < k < \delta$, sia

$$\left|\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to +0}} f(x + h, y + k) - f(x + h, f(x + k)\right| < \sigma.$$

4. Data una funzione $f(x, y)$ in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto ad entrambe le variabili x e y, e integrabile, dicesi *serie doppia di Fourier* ad essa corrispondente, la serie doppia

$$(1) \quad \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny +$$
$$+ c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

dove è

$$(2)\qquad \lambda_{m,n}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{se}\quad m=n=0;\\ \frac{1}{2}, & \text{se}\quad m=0,\ n>0;\ \text{ oppure se }\ m>0,\ n=0;\\ 1, & \text{se}\quad m>0,\ n>0;\end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{Bmatrix}a_{m,n}\\ b_{m,n}\\ c_{m,n}\\ d_{m,n}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\begin{Bmatrix}\cos m\alpha\cos n\beta\\ \operatorname{sen} m\alpha\cos n\beta\\ \cos m\alpha\operatorname{sen} n\beta\\ \operatorname{sen} m\alpha\operatorname{sen} n\beta\end{Bmatrix}d\alpha d\beta.$$

Posto

$$s_{\mu,\nu}(x,y)=\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\lambda_{m,n}[a_{m,n}\cos mx\cos ny+b_{m,n}\operatorname{sen} mx\cos ny+$$
$$+c_{m,n}\cos mx\operatorname{sen} ny+d_{m,n}\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} ny],$$

diremo, con STOLZ e PRINGSHEIM, che nel punto (x, y) la serie doppia (1) è convergente ed ha per *somma* il numero $S(x, y)$ se, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, è sempre possibile di determinare un numero $N>0$, tale che, per tutte le coppie μ, ν, di numeri entrambi maggiori di N, sia

$$|S(x,y)-s_{\mu,\nu}(x,y)|<\varepsilon.$$

La somma $s_{\mu,\nu}$ può essere espressa con un unico integrale. Abbiamo, infatti, tenendo conto delle (2) e (3),

$$s_{\mu,\nu}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\lambda_{m,n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\cos m(x-\alpha)\cos n(y-\beta)d\alpha d\beta$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\mu}\cos m(x-\alpha)\right\}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\nu}\cos n(y-\beta)\right\}d\alpha d\beta,$$

e per essere

$$\frac{1}{2}+\cos\omega+\cos 2\omega+\ldots+\cos r\omega=\operatorname{sen}\frac{2r+1}{2}\omega:2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2},$$

$$s_{\mu,\nu}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha,\beta)\frac{\operatorname{sen}\frac{2\mu+1}{2}(x-\alpha)\operatorname{sen}\frac{2\nu+1}{2}(y-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{y-\beta}{2}}d\alpha d\beta.$$

In virtù della periodicità della funzione integranda, possiamo scrivere

$$s_{\mu,\nu}(x,\ y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(\alpha,\ \beta)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{2\mu+1}{2}(x-\alpha)\operatorname{sen}\frac{2\nu+1}{2}(y-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{y-\beta}{2}}\,d\alpha d\beta,$$

ed anche, ponendo $x-\alpha=-2u$, $y-\beta=-2v$,

$$s_{\mu,\nu}(x,\ y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u,\ y+2v)\,\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u\operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}\,dudv.$$

Se ora poniamo

$$\Phi(x+2u,\ y+2v) = f(x+2u,\ y+2v) + f(x-2u,\ y+2v) + \\ + f(x-2u,\ y-2v) + f(x+2u,\ y-2v),$$

abbiamo

$$s_{\mu,\nu}(x,\ y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(x+2u,\ y+2v)\,\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u\operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}\,dudv. \tag{4}$$

5. Ci saranno utili nel seguito due disuguaglianze che qui ora stabiliremo. Sia $\varphi(z)$ una funzione a variazione limitata, data in un intervallo $(0,\ a)$, con $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$, e indichiamo rispettivamente con $p(z)$, $n(z)$ e $V(z)$ le sue variazioni positiva, negativa e totale, in $(0,\ z)$. È allora

$$\varphi(z) = \varphi(0) + p(z) - n(z),$$
$$p(z) + n(z) = V(z),$$

e $p(z)$, $n(z)$ e $V(z)$ sono funzioni non negative e non decrescenti. Dalle uguaglianze scritte segue

$$\varphi(+0) = \varphi(0) + p(+0) - n(+0)$$

e perciò

$$\varphi(z) = \varphi(+0) + \{\, p(z) - p(+0) \,\} - \{\, n(z) - n(+0) \,\}.$$

Se dunque consideriamo l'integrale

$$\int_0^a \{\, \varphi(z) - \varphi(+0) \,\} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z}\,dz,$$

dove k è un intero positivo, questo integrale possiamo decomporlo nella differenza

$$\int_0^a \{ p(z) - p(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz - \int_0^a \{ n(z) - n(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz,$$

vale a dire, possiamo scriverlo, applicando il secondo teorema della media,

$$\{ p(a) - p(+0) \} \int_{a_1}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz - \{ n(a) - n(+0) \} \int_{a_2}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz,$$

dove a_1 e a_2 sono due numeri convenienti dell'intervallo $(0, a)$. Gli integrali ora scritti sono ambedue minori, in modulo, di $\pi^2:2$ [18] e si ha, pertanto,

$$\left| \int_0^a \{ \varphi(z) - \varphi(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{\pi^2}{2} \{ p(a) - p(+0) + n(a) - n(+0) \}$$

ossia

$$(5) \qquad \left| \int_0^a \{ \varphi(z) - \varphi(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{\pi^2}{2} \{ V(a) - V(+0) \}.$$

Analogamente, si ha, per $0 < \delta < a$,

$$\int_\delta^a \{\varphi(z) - \varphi(+0)\} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz = \{p(a) - p(+0)\} \int_{a'}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz - \{n(a) - n(+0)\} \int_{a''}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz,$$

con a' e a'' punti dell'intervallo (δ, a). Ma ciascuno degli integrali del secondo membro è, per $k > \frac{2\pi}{\delta}$, minore, in modulo, di $\pi : k \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}$ [19]; è perciò, qua-

[18] Ciò è evidente se è $k = 1$; se è $k \geq 2$, si ha $\int_{a_1}^a = \int_0^a - \int_0^{a_1}$ e i due termini di questa differenza sono entrambi non negativi e non maggiori di

$$\int_0^{\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz < k \int_0^{\pi/k} \frac{z}{\operatorname{sen} z} dz < \frac{k\pi}{2} \int_0^{\pi/k} dz = \frac{\pi^2}{2}.$$

[19] Ed infatti, se h è il minimo intero tale che $\frac{h}{k}\pi \geq \frac{\delta}{2}$, ciascuno degli integrali indicati è, in modulo, minore di $\int_{h\pi/k}^{(h+1)\pi/k} \left| \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} \right| dz < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\delta}{2}} \int_{h\pi/k}^{(h+1)\pi/k} dz = \pi : k \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}.$

lunque sia k,

$$\left|\int_\delta^a \{ \varphi(z) - \varphi(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{C_\delta}{1+k} \{ V(a) - V(+0) \}, \tag{6}$$

dove C_δ è una costante dipendente da δ, ma indipendente da a $\left(\text{purchè } 0 < \delta < a \leq \frac{\pi}{2}\right)$ e dalla funzione $\varphi(z)$.

II. La convergenza semplice.

6. Ci proponiamo di dimostrare la seguente proposizione:

Sia $f(x, y)$ una funzione data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle due variabili x e y, integrabile e a variazione limitata. Se nel punto (x, y) valgono le quattro uguaglianze

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x+u,\ y+v) - V_{(x)}(x+0,\ y+v) \} = 0, \\ &\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x-u,\ y+v) - V_{(x)}(x-0,\ y+v) \} = 0, \\ &\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x+u,\ y+v) - V_{(y)}(x+u,\ y+0) \} = 0, \\ &\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x+u,\ y-v) - V_{(y)}(x+u,\ y-0) \} = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge, in tale punto, verso

$$\frac{1}{4}\{ f(x+0,\ y+0) + f(x-0,\ y+0) + f(x-0,\ y-0) + f(x+0,\ y-0) \}. \tag{8}$$

Se la funzione $f(x, y)$ è continua nel punto (x, y), il valore (8) coincide evidentemente con $f(x, y)$.

7. Senza ledere la generalità del teorema che vogliamo dimostrare, possiamo supporre, per semplicità di scrittura, che il punto (x, y) considerato sia $(0, 0)$.

Decomponiamo l'integrale che esprime la somma $s_{\mu,\nu}(0, 0)$ in tre parti, corrispondenti ai tre rettangoli di vertici opposti $(0, 0)$ e (δ, δ); $(\delta, 0)$ e

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $(0, \delta)$ e $\left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$; dove supponiamo $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Avremo così decomposto $s_{\mu,\nu}(0, 0)$ in tre parti, che indicheremo con $s^{(1)}_{\mu,\nu}$, $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, $s^{(3)}_{\mu,\nu}$.

Occupiamoci subito di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$. Abbiamo, ponendo $2\mu + 1 = h$, $2\nu + 1 = k$,

$$s^{(2)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_0^{\pi/2} \Phi(2u, 2v)\, \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv;$$

e siccome è

$$\Phi(2u, 2v) = f(2u, 2v) + f(-2u, 2v) + f(-2u, -2v) + f(2u, -2v),$$

possiamo scomporre $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ in quattro parti, corrispondenti ai quattro addendi che formano $\Phi(2u, 2v)$. Consideriamo la prima di queste parti, vale a dire

$$\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_0^{\pi/2} f(2u, 2v)\, \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv.$$

Osserviamo qui che, essendo la $f(x, y)$, come funzione della sola y, a variazione limitata su quasi tutte le parallele all'asse delle y (n.° 1), esiste finito, per quasi tutti i valori di u, il limite $f(2u, +0)$, e questo limite risulta una funzione quasicontinua (misurabile), perchè la $f(2u, 2v)$ è quasi continua, rispetto ad u per quasi tutti i valori di v, in forza dell'ipotesi che la $f(x, y)$ sia integrabile. Inoltre, se è $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ e se $\bar{v}$ è un valore dell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tale che la $f(2u, 2\bar{v})$ risulti integrabile rispetto ad u ([20]), si ha

$$|f(2u, 2\bar{v}) - f(2u, 2v)| \leq V_{(y)}(2u, 2\pi)$$

donde

$$|f(2u, 2v)| \leq |f(2u, 2\bar{v})| + V_{(y)}(2u, 2\pi);$$

e siccome $|f(2u, 2\bar{v})|$ è integrabile rispetto ad u e tale è anche la $V_{(y)}(2u, 2\pi)$, per l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata, ne viene che, se per

---

([20]) In virtù dell'integrabilità superficiale della $f(x, y)$, questa funzione risulta linearmente integrabile rispetto ad x per quasi tutti i valori di y, per un noto teorema del FUBINI.

uno dei v considerati la $f(2u, 2v)$ è quasi continua rispetto ad u, essa è anche integrabile. Dall' ultima disuguaglianza scritta e da un noto teorema di integrazione per serie segue anche che $f(2u, +0)$ è essa pure integrabile rispetto ad u. Indicando con δ_1 un numero >0 e $<\frac{\pi}{2}$, che fra poco determineremo, possiamo dunque scrivere

$$
\begin{aligned}
s^{(2)}_{\mu,\nu} &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\delta_1}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\int_\delta^{\pi/2} f(2u, +0)\,\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du + \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^{\delta_1}\{ f(2u, 2v) - f(2u, +0)\}\,\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv + \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_{\delta_1}^{\pi/2} f(2u, 2v)\,\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Per qualunque valore di v, è

$$\left|\int_0^{\delta_1}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\right| < \frac{\pi^2}{2};$$

e per $h\to\infty$ è

$$\int_\delta^{\pi/2} f(2u, +0)\,\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du \to 0,$$

in virtù di un noto teorema di RIEMANN-LEBESGUE della teoria delle serie di FOURIER per le funzioni di una sola variabile. Pertanto la prima parte del secondo membro di (9) tende a zero per $h\to\infty$.

Per vedere come si comporta il secondo termine del secondo membro di (9), osserviamo che, per quasi tutti i valori di u, $V_{(y)}(2u, 2v)$ tende, per $v\to+0$, al valore finito $V_{(y)}(2u, +0)$; perciò, preso ad arbitrio un $\sigma>0$, possiamo supporre di aver determinato δ_1 in modo che lo pseudointervallo dei valori di u di $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ per i quali non è $V_{(y)}(2u, 2\delta_1) - V_{(y)}(2u, +0) < \sigma$, sia di misura (piccola quanto vuolsi e quindi) tale che l' integrale di $V_{(y)}(2u, 2\pi)$, ad esso esteso, risulti $< \sigma$ [21]. Applicando allora la (5), avremo

$$\left|\int_0^{\delta_1}\{f(2u,\ 2v)-f(2u,\ +0)\}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}dv\right| < \frac{\pi^2}{2}\{V_{(y)}(2u,\ 2\delta_1)-V_{(y)}(2u,\ +0)\},$$

e perciò

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}du\int_0^{\delta_1}\{f(2u,\ 2v)-f(2u,\ +0)\}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}dv\right| < \frac{1}{2\operatorname{sen}\delta}\left(\sigma\frac{\pi}{2}+\sigma\right) < \frac{2\sigma}{\operatorname{sen}\delta}.$$

Concludiamo dunque che, fissato il δ, si può scegliere δ_1 in modo da rendere la seconda parte del secondo membro di (9) minore, in modulo, di un numero positivo arbitrariamente prefissato, e ciò indipendentemente da h e k.

L'ultimo termine della (9) tende poi allo zero, per $\left.\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right\}\to\infty$, in virtù del teorema di RIEMANN-LEBESGUE, esteso alle funzioni di due variabili.

Risulta così $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}\to 0$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\\nu\end{matrix}\right\}\to\infty$.

In modo analogo si dimostra che tendono a zero anche le altre tre parti di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, quando μ e ν si facciano tendere entrambi e contemporaneamente all'infinito. È dunque $s^{(2)}_{\mu,\nu}\to 0$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\\nu\end{matrix}\right\}\to\infty$.

Nello stesso modo si prova anche la $s^{(3)}_{\mu,\nu}\to 0$.

8. Veniamo ora allo studio di

$$s^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \Phi(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}dudv.$$

---

[21] Possiamo sempre supporre che $V_{(y)}(x,\ y)$ sia, per ogni y, quasi continua (misurabile) come funzione della sola x. Ciò è sicuramente vero se la $f(x,\ y)$ è continua rispetto alla y, ed anche se è, per quasi tutti gli x e per tutti gli y, $f(x,\ y-0)\leq f(x,\ y)\leq f(x,\ y+0)$. In caso contrario, nei punti di discontinuità che non soddisfano a questa condizione e che si trovano su quelle parallele all'asse delle y sulle quali la $f(x,\ y)$ è a variazione limitata, come funzione della sola y, — punti che su ciascuna delle parallele indicate sono al massimo in un'infinità numerabile — si cambierà il valore della $f(x,\ y)$, che figura nell'espressione di $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}$, in modo da verificare la doppia disuguaglianza scritta. Con ciò, invece di $V_{(y)}(x,\ y)$, si avrà una variazione totale $\bar{V}_{(y)}(x,\ y)$ tale che $\bar{V}_{(y)}(x,\ y)\leq V_{(y)}(x,\ y)$. Questa $\bar{V}_{(y)}$ risulta quasi-continua e integrabile su ogni parallela all'asse delle x, in virtù della $\bar{V}_{(y)}(x,\ y)\leq\bar{V}_{(y)}(x,\ 2\pi)$ e per l'integrabilità della $V_{(y)}(x,\ 2\pi)$. Ed allora basterà sostituire, nel ragionamento che andiamo facendo, la $V_{(y)}$ con la $\bar{V}_{(y)}$.

Decomponiamo anche $s_{\mu,\nu}^{(1)}$ in quattro parti, corrispondenti ai quattro addendi di $\Phi(2u, 2v)$, e consideriamo la prima di esse, vale a dire

$$s_{\mu,\nu}^{(1)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta f(2u, 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,du\,dv.$$

Osserviamo, prima di proseguire, che, dalle ipotesi (7), ammesse per il punto $x=0$, $y=0$, segue l'esistenza del limite $f(+0, +0)$. Ed infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un l positivo in modo che, dalla $0 < x \leq l$, segua $|V_{(x)}(l, l) - V_{(x)}(x, l)| < \varepsilon$, e dalle $0 < x \leq l$, $0 < y \leq l$, segua $|V_{(y)}(x, l) - V_{(y)}(x, y)| < \varepsilon$. Per gli stessi x e y, è allora, $|f(l, l) - f(x, l)| < \varepsilon$, $|f(x, l) - f(x, y)| < \varepsilon$, e perciò $|f(l, l) - f(x, y)| < 2\varepsilon$. E ciò prova l'esistenza di $f(+0, +0)$, e la sua finitezza.

Possiamo scrivere allora

$$\begin{aligned} \bar{s}_{\mu,\nu}^{(1)} &= \frac{1}{\pi^2} f(+0, +0)\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^\delta\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv + \\ &+ \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \{f(2u, 2v) - f(+0, +0)\}\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,du\,dv, \end{aligned} \tag{10}$$

e il primo termine di questa somma tende a $\frac{1}{4}f(+0, +0)$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, perchè è

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Vogliamo dimostrare che, scegliendo δ sufficientemente piccolo, il secondo termine della somma (10) può rendersi minore, in modulo, di un numero positivo arbitrariamente prefissato, contemporaneamente per tutti gli h e k.

Posto

$$I_{r,s} = \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_{s\pi/k}^{(s+1)\pi/k}\{f(2u, 2v) - f(+0, +0)\}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv,$$

e indicati con p e q i massimi interi tali che sia $p\pi/h < \delta$, $q\pi/k < \delta$, il secondo termine della (10) si scrive

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=r}^{q} I_{r,s} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{s=0}^{q}\sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}, \tag{11}$$

intendendo che negli integrali $I_{p,s}(s=0,\ 1,\dots\ q)$ e $I_{r,q}(r=0,\ 1,\dots\ p)$ il campo di integrazione sia limitato a quella parte che si trova nel quadrato di vertici opposti $(0,\ 0)$ e $(\delta,\ \delta)$.

Cominciamo col prendere in esame la somma $\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}$.

La funzione $f(x,\ y)$, essendo a variazione limitata in Q, è, su quasi tutte le parallele all'asse delle y, a variazione limitata come funzione della sola y. Perciò, se, per ogni punto $(x,\ y)$ del quadrato di vertici opposti $(0,\ 0)$ e $(2\delta,\ 2\delta)$, indichiamo con $P_{(y)}(x,\ y)$ e $N_{(y)}(x,\ y)$ le variazioni positive e negative della $f(x,\ y)$, considerata come funzione della sola y, nell'intervallo $(y,\ 2\delta)$, abbiamo, per quasi tutti i valori di x di $(0,\ 2\delta)$,

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= f(x,\ 2\delta) - P_{(y)}(x,\ y) + N_{(y)}(x,\ y), \\ P_{(y)}(x,\ y) + N_{(y)}(x,\ y) &= V_{(y)}(x,\ 2\delta) - V_{(y)}(x,\ y), \end{aligned} \tag{12}$$

e $P_{(y)}(x,\ y)$ e $N_{(y)}(x,\ y)$ sono funzioni non negative e non crescenti col crescere di y nell'intervallo $(0,\ 2\delta)$. Abbiamo perciò, per quasi tutti gli x di $(0,\ 2\delta)$ e per ogni y di $(0,\ 2\delta)$,

$$\begin{aligned} f(x,\ y) - f(+0,\ +0) = \{ f(x,\ 2\delta) - f(+0,\ +0) \} \\ - P_{(y)}(x,\ y) + N_{(y)}(x,\ y). \end{aligned} \tag{13}$$

Preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo supporre δ sufficientemente piccolo in modo da avere, per ogni coppia x, y di numeri positivi e $\leq 2\delta$,

$$| f(x,\ y) - f(+0,\ +0) | < \varepsilon, \tag{14}$$

ed anche, per le (7),

$$V_{(y)}(x,\ y) - V_{(y)}(x,\ +0) < \varepsilon.$$

È allora, se $0 < x \leq 2\delta$, $0 < y \leq 2\delta$,

$$V_{(y)}(x,\ 2\delta) - V_{(y)}(x,\ y) < \varepsilon,$$

e per la (12)

$$P_{(y)}(x,\ y) < \varepsilon, \tag{15}$$

$$N_{(y)}(x,\ y) < \varepsilon. \tag{16}$$

Indicando con $I'_{r,s}$, $I''_{r,s}$ e $I'''_{r,s}$ gli integrali che si ottengono sostituendo a $f(2u, 2v) - f(+0, +0)$, nell'espressione di $I_{r,s}$, rispettivamente $f(2u, 2\delta) - f(+0, +0)$, $P_{(y)}(2u, 2v)$ e $N_{(y)}(2u, 2v)$, abbiamo, in virtù della (13)

$$I_{r,s} = I'_{r,s} - I''_{r,s} + I'''_{r,s},$$

e perciò

$$\sum_{s=r}^{q} I_{r,s} = \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} - \sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} + \sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}.$$

Ora è

$$\sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} = \int\limits_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \{f(2u, 2\delta) - f(+0, +0)\} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \sum_{s=r}^{q} \int\limits_{s\pi/k}^{(s+1)\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

e per la (14) e per il fatto che i termini della somma che figura al secondo membro sono a segni alternati e in modulo decrescenti (da cui segue che il modulo della somma è non maggiore del modulo del primo termine)

$$\left| \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} \right| < \varepsilon \left| \int\limits_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| \left| \int\limits_{r\pi/k}^{(r+1)\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \right|$$

e perciò

$$\left| \sum_{s=0}^{q} I'_{0,s} \right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4},$$

e per $r > 0$, essendo

$$\left| \int\limits_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{r\pi}{h}} \int\limits_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} du < \frac{\pi}{2r},$$

$$\left| \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} \right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

È poi

$$\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} = \int\limits_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \sum_{s=r}^{q} \int\limits_{s\pi/k}^{(s+1)\pi/k} P_{(y)}(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

e siccome $P_{(y)}(2u, 2v) : \operatorname{sen} v$ è funzione non negativa e non crescente al crescere di v, i termini della somma che figura al secondo membro sono anch'essi a segni alternati e in modulo non crescenti, e si ha

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi/k}^{(r+1)\pi/k} P_{(v)}(2u,\ 2v)\, \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

e per la (15)

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \varepsilon \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi/k}^{(r+1)\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

onde

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I''_{0,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^4}{4},$$

e per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

Analogamente si ha

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I'''_{0,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^4}{4},$$

e per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

È perciò

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I_{0,s}\right| < \varepsilon\pi^4,$$

e per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{r^2},$$

e quindi

$$\left|\sum_{r=0}^{p} \sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\right| < \varepsilon\pi^4\left(1 + \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r^2}\right) < \varepsilon\pi^4\left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\right). \tag{17}$$

Resta da esaminare la somma $\sum_{s=0}^{q} \sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}$.

Per essere la $f(x, y)$ a variazione limitata in Q, tale funzione è anche a variazione limitata rispetto alla sola x, su quasi tutte le parallele all'asse delle x. Indicando perciò, per ogni punto (x, y) del quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(2\delta, 2\delta)$, con $P_{(x)}(x, y)$ e $N_{(x)}(x, y)$ le variazioni positive e negative della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x, nell'intervallo $(x, 2\delta)$, abbiamo, per quasi tutti gli y di $(0, 2\delta)$,

$$f(x, y) = f(2\delta, y) - P_{(x)}(x, y) + N_{(x)}(x, y),$$

$$P_{(x)}(x, y) + N_{(x)}(x, y) = V_{(x)}(2\delta, y) - V_{(x)}(x, y);$$

e ragionando come dianzi e supponendo δ tale che, per ogni coppia x, y di numeri positivi e $\leq 2\delta$, sia anche

$$V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(+0, y) < \varepsilon,$$

otteniamo

$$\left| \sum_{s=0}^{q} \sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s} \right| < \varepsilon\pi^4 \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{s^2}\right).$$

Concludiamo che il secondo termine della somma (10), vale a dire l'espressione (11), soddisfa alla disuguaglianza

$$(18) \qquad \left| \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} \{ f(2u, 2v) - f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du dv \right| < 2\varepsilon\pi^2 \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{r^2}\right),$$

ed è perciò piccolo a piacere, contemporaneamente per tutti gli h e k. Resta così dimostrato che, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, si può scegliere δ in modo che, per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi, sia

$$\left| \bar{s}^{(1)}_{\mu,\nu} - \frac{1}{4} f(+0, +0) \right| < \eta.$$

Trattando nello stesso modo le altre tre parti di $s^{(1)}_{\mu,\nu}$, otteniamo, infine, che, preso ad arbitrio $\eta > 0$, è possibile scegliere δ in modo che sia

$$\left| s^{(1)}_{\mu,\nu} - \frac{1}{4} \{ f(+0, +0) + f(-0, +0) + f(-0, -0) + f(+0, -0) \} \right| < \eta,$$

per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi.

E siccome $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ e $s^{(3)}_{\mu,\nu}$ tendono a zero, come già abbiamo dimostrato nel n.° precedente, ne risulta

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu}\Big\}\to\infty} s_{\mu,\nu} = \frac{1}{4}\{f(+0, +0) + f(-0, +0) + f(-0, -0) + f(+0, -0)\},$$

e il teorema enunciato nel n.° 6 è completamente dimostrato.

9. *Osservazione I.* Se, nella dimostrazione data del teorema del n.° 6, invece di scindere ciascuna delle tre somme $s_{\mu,\nu}^{(1)}$, $s_{\mu,\nu}^{(2)}$ e $s_{\mu,\nu}^{(3)}$ nelle quattro parti corrispondenti ai quattro termini di $\Phi(2u, 2v)$, ragioniamo direttamente sulle intere somme, otteniamo che il teorema stabilito vale anche se le (7) si sostituiscono con le uguaglianze

$$\lim_{\substack{u\to+0 \\ v\to+0}} \{ W_{(x)}(x+u, y+v) - W_{(x)}(x+0, y+v)\} = 0,$$
$$\lim_{\substack{u\to+0 \\ v\to+0}} \{ W_{(y)}(x+u, y+v) - W_{(y)}(x+u, y+0)\} = 0,$$

dove $W_{(x)}(u, v)$ e $W_{(y)}(u, v)$ rappresentano le variazioni totali della $\Phi(x+2u, y+2v)$ considerata rispettivamente come funzione della sola u e della sola v. In questo caso, la somma $s_{\mu,\nu}$ tende, per $\substack{\mu \\ \nu}\Big\}\to\infty$, al valore $\frac{1}{4}\Phi(x+0, y+0)$, vale a dire, la somma della serie doppia di FOURIER è data da

$$\frac{1}{4}\lim_{\substack{u\to+0 \\ v\to+0}} \{f(x+u, y+v) + f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v) + f(x+u, y-v)\}.$$

10. *Osservazione II.* Dalla dimostrazione data del teorema del n.° 6, risulta che tale teorema conserva la sua piena validità se, invece di supporre la $f(x, y)$ a variazione limitata in tutto il quadrato Q, si fa l'ipotesi che essa sia a variazione limitata soltanto nel campo costituito dai punti (x', y') per i quali vale almeno una delle due disuguaglianze

$$|x'-x| \leq \delta, \quad |y'-y| \leq \delta,$$

dove δ è un numero positivo che può essere fissato comunque piccolo.

11. Se le funzioni $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ restano limitate, in tutto il quadrato Q, la dimostrazione data nel n.° 7, della tendenza a zero di $s_{\mu,\nu}^{(2)}$ e $s_{\mu,\nu}^{(3)}$, per $\substack{\mu \\ \nu}\Big\}\to\infty$, può essere sostituita da un ragionamento analogo a quello usato nel n.° 8, relativamente alla $s_{\mu,\nu}^{(1)}$.

Ed infatti, ripresa l'espressione $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}$, decomponiamola in due parti, nel seguente modo

$$\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}=\frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,du\,dv +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv.$$

La prima di queste parti tende a zero, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, in virtù del teorema di RIEMANN-LEBESGUE, esteso alle funzioni di due variabili; resta così da studiare soltanto la seconda parte, ossia

$$(19)\qquad \frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv.$$

Dall'ipotesi qui fatta che $V_{(x)}(2\pi,\ y)$ e $V_{(y)}(x,\ 2\pi)$ siano limitate in tutto Q, segue che esiste un numero positivo M tale che sia $V_{(x)}(2\pi,\ y)< M$, $V_{(y)}(x,\ 2\pi)< M$ e $|f(x,\ y)|< M$, in tutto Q. Allora, procedendo come abbiamo fatto al n.° 8 per lo studio della seconda parte di (10), decomponiamo (19) in due parti analoghe alle due che formano l'espressione (11) del n.° ricordato. Ciascuna di queste due parti risulta (sostituendo al ε del n.° 8 il numero M) minore, in modulo, di

$$M\pi^4\left(\frac{1}{p}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(p+r)r}\right),$$

dove p è ancora il massimo intero tale che $\frac{p\pi}{h}<\delta$. Dunque per h sufficientemente grande, in modo che sia

$$(20)\qquad \frac{1}{p}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(p+r)r}<\varepsilon,$$

ciascuna di tali parti risulta in modulo minore di $M\pi^4\varepsilon$. Si ha così

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\right|<2M\pi^4\varepsilon,$$

qualunque sia k e per tutti gli h maggiori di un certo $\bar{h}$ tale che per esso risulti soddisfatta la (20).

12. *Il teorema del n.° 6 sussiste anche se invece delle* (7) *si suppone che, per un* $\delta > 0$, *le quattro funzioni di* (u, v)

$$\frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y+0) - f(x+0, y+v) + f(x+0, y+0)}{uv},$$

$$\frac{f(x-u, y+v) - f(x-u, y+0) - f(x-0, y+v) + f(x-0, y+0)}{uv},$$

$$\frac{f(x-u, y-v) - f(x-u, y-0) - f(x-0, y-v) + f(x-0, y-0)}{uv},$$

$$\frac{f(x+u, y-v) - f(x+u, y-0) - f(x+0, y-v) + f(x+0, y-0)}{uv},$$

risultino tutte integrabili nel quadrato di vertici opposti (0, 0) *e* (δ, δ), *e che degli 8 integrali*

$$\int_0^\delta f(x \pm u, y \pm 0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du, \quad \int_0^\delta f(x \pm 0, y \pm v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

tanto i primi quattro quanto gli altri quattro tendano, per $h \to \infty$ *e* $k \to \infty$, *rispettivamente ai valori* $\frac{\pi}{2} f(x \pm 0, y \pm 0)$, *supposti esistenti.*

Per provare l'asserto, basta dimostrare che la seconda parte della somma (10), e cioè $\left(\text{tralasciando il fattore } \frac{1}{\pi^2}\right)$

$$\int_0^\delta \int_0^\delta \{ f(2u, 2v) - f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du dv, \tag{21}$$

può rendersi, in modulo, minore di un ε prefissato, per tutti gli h e k sufficientemente grandi. L'espressione ora scritta può porsi nella forma

$$\begin{aligned} &\int_0^\delta \int_0^\delta \{ f(2u, 2v) - f(2u, +0) - f(+0, 2v) + f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du dv + \\ &+ \int_0^\delta f(2u, +0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv + \int_0^\delta f(+0, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du - \\ &- 2f(+0, +0) \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv, \end{aligned} \tag{22}$$

il cui primo termine è, in modulo, minore di

$$4\int_0^\delta\int_0^\delta\left|\frac{f(2u,\,2v)-f(2u,\,+0)-f(+0,\,2v)+f(+0,\,+0)}{2u\cdot 2v}\right|\left|\frac{u}{\operatorname{sen} u}\right|\left|\frac{v}{\operatorname{sen} v}\right|du\,dv<$$

$$<\pi^2\int_0^\delta\int_0^\delta\left|\frac{f(2u,\,2v)-f(2u,\,+0)-f(+0,\,2v)+f(+0,\,+0)}{2u\cdot 2v}\right|du\,dv,$$

espressione che, per l'ipotesi qui fatta, resta minore di $\frac{\varepsilon}{2}$, per tutti i δ sufficientemente piccoli. Siccome poi è

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du=\frac{\pi}{2},$$

la somma degli ultimi tre termini di (22) tende allo zero quando $h\to\infty$ e $k\to\infty$. Dunque, se δ è scelto convenientemente, per tutti gli h e k sufficientemente grandi il modulo di (21) è minore di ε.

13. Il teorema del n.° 6 (anche con la variante indicata nel n.° precedente) conserva la sua validità se, invece dell'ipotesi che la $f(x,\,y)$ sia a variazione limitata, si suppone che:

1°) i limiti $f(x',\,y\pm 0)$ e $f(x\pm 0,\,y')$ esistano finiti, i primi per quasi tutti gli x' ed i secondi per quasi tutti gli y', e che essi siano integrabili, rispettivamente come funzioni della x' e della y';

2°) per ogni $\delta>0$ e $<\frac{\pi}{2}$, si possa sempre trovare un $\sigma>0$ tale che le funzioni di $(u,\,v)$

$$\frac{f(x+u,\,y+v)-f(x+u,\,y+0)}{v},$$

$$\frac{f(x+u,\,y-v)-f(x+u,\,y-0)}{v},$$

risultino entrambe integrabili nei due rettangoli $\left[\delta\leq u\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq v\leq\sigma\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}\leq u\leq-\delta,\ 0\leq v\leq\sigma\right]$, e che le

$$\frac{f(x+u,\,y+v)-f(x+0,\,y+v)}{u},$$

$$\frac{f(x-u,\,y+v)-f(x-0,\,y+v)}{u},$$

risultino entrambe integrabili nei rettangoli $\left[0 \leq u \leq \sigma,\quad \delta \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0 \leq u \leq \sigma,\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq -\delta\right]$.

Ed infatti, ripresa l'espressione di $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}$, data dalla (9), si osservi che il primo e l'ultimo termine di tale somma tendono a zero per μ e ν tendenti a ∞, e che il secondo termine, supposto $\delta_1 < \sigma$, è inferiore, in modulo, a

$$\frac{2}{\pi^2 \operatorname{sen} \delta}\int_\delta^{\pi/2} du \int_0^{\delta_1} \left|\frac{f(2u,\,2v)-f(2u,\,+0)}{2v}\right| \left|\frac{v}{\operatorname{sen} v}\right| dv <$$

$$< \frac{1}{\pi \operatorname{sen} \delta}\int_\delta^{\pi/2} du \int_0^{\delta_1} \left|\frac{f(2u,\,2v)-f(2u,\,+0)}{2v}\right| dv,$$

espressione che è piccola come vuolsi con δ_1. Dunque $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}$ si può rendere minore di un ε prefissato, per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi.

III. La convergenza uniforme.

14. Diremo che in un punto $(\bar{x},\ \bar{y})$ è verificata la condizione α) se la $V_{(x)}(x,\ y)$ è, per tutti gli y, uniformemente continua come funzione della sola x, nel punto $x = \bar{x}$ [22], e la $V_{(y)}(x,\ y)$ è, per tutti gli x, uniformemente continua come funzione della sola y, nel punto $y = \bar{y}$.

Diremo, invece, che è verificata ovunque la condizione β) se le $V_{(x)}(2\pi,\ y)$, $V_{(y)}(x,\ 2\pi)$ sono limitate in tutto il quadrato Q.

15. Dimostriamo la seguente proposizione:

Se la funzione $f(x,\ y)$, data in tutto il piano $(x,\ y)$, è periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle due variabili x e y, integrabile e a variazione limitata;

se, nell'intorno di ciascun punto di un insieme chiuso E, le $V_{(x)}(x,\ y)$ e $V_{(y)}(x,\ y)$ sono funzioni uniformemente continue, rispettivamente della sola x e della sola y;

---

(22) Vale a dire, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\lambda > 0$, tale che, per ogni x soddisfacente alla $|x - \bar{x}| \leq \lambda$, e per *tutti gli* y sia $|V_{(x)}(x,\ y) - V_{(x)}(\bar{x},\ y)| < \varepsilon$. Nel caso in cui sia $\bar{x} = 0$ (opp. $\bar{x} = 2k\pi$) si intenderà che si abbia, per $0 < x - \bar{x} \leq \lambda$, $V_{(x)}(x,\ y) < \varepsilon$, e per $0 > x - \bar{x} \geq -\lambda$, $|V_{(x)}(x,\ y) - V_{(x)}(2\pi,\ y)| < \varepsilon$.

se, infine, in tutti i punti di E è verificata la condizione α), oppure è ovunque verificata la condizione β);

allora la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge uniformemente, su tutto E, verso $f(x, y)$.

Osserviamo, in primo luogo, che, dalla supposta uniforme continuità, nell'intorno di ciascun punto di E, delle $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$, considerate come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, segue che nei punti di E la $f(x, y)$ è funzione continua di (x, y). Pertanto, preso ad arbitrio un ε, si può determinare il numero δ, richiesto per la validità della (18), in modo che esso valga per tutti i punti di E. Inoltre, poichè la $f(x, y)$ risulta limitata su E, il primo termine della somma (10) tende al suo limite uniformemente su tutto E, al tendere di μ e ν all'infinito. Dunque, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, è possibile scegliere δ in modo che sia

$$| s^{1)}_{\mu,\nu} - f(x, y) | < \eta,$$

per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi, e per tutti i punti (x, y) di E.

Per dimostrare la convergenza uniforme allo zero di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ e $s^{(3)}_{\mu,\nu}$, bisogna fare appello ad una delle condizioni α) o β).

Se è verificata la α), il numero δ_1, determinato nel n.° 7, si può prendere in modo che valga per tutti i punti di E, e perciò il secondo termine della somma (9) può farsi piccolo a piacere indipendentemente da h e k, contemporaneamente per tutti i punti di E. Il primo termine del secondo membro di (9) è poi il prodotto di $\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\delta_1} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv$ [che resta in modulo inferiore ad un numero fisso, qualunque sia k], per l'integrale

$$\int_\delta^{\pi/2} f(2u, +0)\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du.$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di E, e (x, y) è un altro punto qualsiasi, si ha

$$\left|\int_\delta^{\pi/2} f(x+2u,\ y+0)\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| < \left|\int_\delta^{\pi/2} f(x+2u,\ \bar{y}+0)\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du\right| + \tag{23}$$

$$+\frac{1}{\operatorname{sen}\delta}\int_\delta^{\pi/2} | f(x+2u,\ y+0) - f(x+2u,\ \bar{y}+0) |\, du.$$

Ora, per $h \to \infty$, l'integrale

$$\int_{\delta}^{\pi/2} f(x+2u,\ \bar{y}+0)\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du$$

tende a zero uniformemente per tutti gli x, come è noto dalla teoria delle serie di FOURIER di una sola variabile; e l'ultimo termine di (23) tende a zero, per $y \to \bar{y}$, perchè, dalla condizione α), segue che $f(x, y)$ è funzione continua di y, per $y = \bar{y}$, uniformemente rispetto a tutti gli x. Si ha, dunque, che preso un $\varepsilon > 0$, si possono determinare due numeri positivi λ e $\bar{h}$, tali che, per tutti i punti (x, y) soddisfacenti alla $|y - \bar{y}| \leq \lambda$ e per tutti gli $h > \bar{h}$, sia

$$\left|\int_{\delta}^{\pi/2} f(x+2u,\ y+0)\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\right| < \varepsilon.$$

Da ciò segue che l'integrale qui scritto tende, per $h \to \infty$, uniformemente allo zero su tutto l'insieme chiuso E. Altrettanto può quindi asserirsi del primo termine del secondo membro della (9).

Questo stesso fatto si presenta, infine, per il terzo termine del secondo membro della (9), in virtù dell'estensione a due variabili di una nota proposizione.

Con ciò resta dimostrato che $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ e così anche $s^{(3)}_{\mu,\nu}$, tendono uniformemente a zero su tutto E, per μ e ν tendenti all'infinito.

Se, invece della α) è verificata la condizione β), questa conclusione è conseguenza immediata della dimostrazione data nel n.° 11 della convergenza allo zero di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$.

16. Dal teorema del n.° precedente segue, in particolare:

Se la $f(x, y)$ è una funzione ovunque continua, periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y, e a variazione limitata, e se le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono ovunque uniformemente continue ([23]) *come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque uniformemente verso la $f(x, y)$ stessa.*

([23]) Nel senso indicato in ([22]), per quanto riguarda i punti che si trovano sulle rette $x = 2k\pi$, per la prima, e $y = 2k\pi$, per la seconda.

Si ha pure:

Se la $f(x, y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y, integrabile, a variazione limitata; se le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono limitate in tutto il quadrato Q, ed, inoltre, esse sono, in ogni campo chiuso interno a Q, funzioni uniformemente continue, rispettivamente della sola x e della sola y; la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge uniformemente verso la $f(x, y)$, in ogni campo chiuso interno a Q.

Altre condizioni di convergenza uniforme possono poi dedursi dai risultati dei n.i 12 e 13.

IV. Criteri particolari di convergenza.

17. Ci proponiamo ora di dedurre, dai risultati generali dei n.i precedenti, dei criteri di convergenza particolari, che ci sembrano notevoli per la loro facile e larga applicazione.

Premettiamo che, avendo chiamato Q il quadrato $[0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi]$, chiameremo Q' il campo definito dalle disuguaglianze $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$.

Premetteremo anche la seguente definizione. Diremo che una funzione $f(x, y)$ è *monotona* nel campo C in cui viene considerata, se, in tale campo, essa è sempre monotona, e nello stesso senso, come funzione della sola x (intendendo che, per tutti gli y ammessi, essa sia sempre non crescente oppure sempre non decrescente) e pure monotona e nello stesso senso (non necessariamente uguale al precedente) come funzione della sola y. Si hanno così quattro classi di funzioni $f(x, y)$ monotone:

1ª) per ogni coppia (x_1, y) (x_2, y), di punti appartenenti a C, con $x_1 < x_2$ è sempre $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$, e per ogni coppia (x, y_1), (x, y_2) di punti pure di C con $y_1 < y_2$ è sempre $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$;

2ª) valgono sempre le disuguaglianze contrarie di quelle ora scritte;

3ª) per tutte le coppie di punti indicate, è sempre $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$, $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$;

4ª) valgono sempre le disuguaglianze contrarie di queste ultime.

Le funzioni della 1ª e 2ª classe le diremo *monotone concordi*; quelle della 3ª e 4ª classe, *monotone discordi* ([24]).

([24]) Avvertiamo che alcuni Autori (V. per es. HOBSON, loc. cit. ([15]), vol. I, p. 322) chiamano *monotone* soltanto quelle funzioni $f(x, y)$ che noi chiamiamo *monotone concordi*.

Intenderemo poi che le funzioni $f(x, y)$, che considereremo nel presente §, siano sempre definite in tutto il piano e sempre periodiche, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y.

18. *Se la $f(x, y)$ è limitata e monotona nel campo Q' e se nel punto (x, y) esistono i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge in (x, y), ed ha per somma*

$$(24) \quad \frac{1}{4}\{f(x+0, y+0)+f(x-0, y+0)+f(x-0, y-0)+f(x+0, y-0)\}.$$

In particolare, dove la $f(x, y)$ è continua, questa somma è data dalla $f(x, y)$ stessa.

Ed infatti, la $f(x, y)$, per essere limitata e monotona in Q', è integrabile e a variazione limitata; inoltre, per la monotonia e per l'esistenza dei limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, risultano verificate in (x, y) le uguaglianze (7). Le condizioni del teorema del n.° 6 sono pertanto tutte soddisfatte.

Una condizione sufficiente affinchè la $f(x, y)$, supposta limitata e monotona in Q', *ammetta sempre i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, è che essa come funzione della sola x (opp. della sola y) sia in Q' uniformemente continua* o, più restrittivamente, *a rapporto incrementale limitato* ([25]).

19. *Se la $f(x, y)$ è limitata, continua e monotona nel campo $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$, la sua serie doppia di Fourier converge uniformemente in ogni campo chiuso interno al campo indicato.*

Ciò è una conseguenza immediata della seconda proposizione del n.° 16.

([25]) È dunque un caso particolare del criterio qui dato quello dimostrato da HOBSON (loc. cit. ([15])) e cioè che, se la $f(x, y)$ è in Q' limitata e monotona e a rapporto incrementale rispetto alla x limitato, la sua serie doppia di FOURIER converge verso il valore (24). Va tuttavia osservato che la dimostrazione dell'HOBSON, fondata sulla sostituzione dell'integrale $\iint f(xy)\frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}dxdy$ con $\iint f(xy)\frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny}{xy}dxdy$, non è corretta, perchè, contrariamente a quanto l'HOBSON afferma (l. c., p. 700), la funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} - \frac{1}{xy}$ non è limitata e integrabile nell'intorno di (0, 0). L'HOBSON enuncia anche la seguente proposizione: « se la $f(x, y)$, supposta integrabile, è a variazione limitata secondo la definizione di ARZELÀ, o più generalmente se è la differenza di due funzioni monotone concordi, e se di più è a rapporto incrementale, rispetto alla x, limitato, allora la sua serie doppia di FOURIER converge verso (24) ». Per altro le considerazioni svolte dall'HOBSON non sono sufficienti a dimostrare tale proposizione.

20. Il criterio del n.° 18 si estende senz'altro al caso della somma di un numero qualsiasi (finito) di funzioni soddisfacenti tutte alle condizioni ivi indicate per la $f(x, y)$. Altrettanto dicasi per la proposizione del n.° 19. Si ha inoltre:

Se la $f(x, y)$ è la somma di un numero qualsiasi (finito) di funzioni continue e monotone in tutto Q ([26]), *la sua serie doppia di Fourier converge verso di essa ovunque uniformemente.*

Ciò si deduce dalla prima delle due proposizioni del n.° 16, tenendo presente che, per l'ipotesi ora fatta, la $f(x, y)$ risulta a variazione limitata e le sue variazioni $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$ sono uniformemente continue, rispettivamente come funzioni della sola x e della sola y, per essere tali le variazioni corrispondenti dei termini della somma che costituisce la $f(x, y)$.

21. *Se la $f(x, y)$ è in Q' limitata ed ha ivi il rapporto incrementale relativo alla x limitato in un senso, ed ha pure limitato in un senso (non necessariamente lo stesso del precedente) il rapporto incrementale relativo alla y, la sua serie doppia di Fourier converge verso il valore* (24) *in ogni punto (x, y) in cui esistono tutti e quattro i limiti* $f(x \pm 0, y \pm 0)$.

Ed infatti, se per es. il rapporto incrementale relativo alla x è sempre minore di un numero positivo A e quello relativo alla y è sempre maggiore di un numero negativo $-B$, posto

$$f(x, y) = \{ f(x, y) - Ax + By \} + \{ Ax - By \}, \tag{25}$$

la funzione $f(x, y) - Ax + By$ risulta monotona in Q' (decrescente rispetto alla x e crescente rispetto alla y) e pure monotona risulta la $Ax - By$ (crescente rispetto alla x, decrescente rispetto alla y); e ciascuna di tali funzioni ammette i quattro limiti corrispondenti a $f(x \pm 0, y \pm 0)$, in ogni punto (x, y) in cui questi ultimi esistono. Non vi è dunque che sfruttare quanto si è detto nel n.° 20.

Nello stesso modo si ha che, *se la $f(x, y)$, oltre alle condizioni qui poste. è continua in ogni punto interno a Q, la convergenza della sua serie doppia di Fourier è uniforme in ogni campo chiuso interno al quadrato Q.*

22. Dalla (24) e sfruttando ancora quanto si è detto nel n.° 20, si ha pure:

Se la $f(x, y)$ è, in tutto il quadrato Q, continua, con rapporto incrementale relativo ad x limitato in un senso, e con rapporto incrementale

---

([26]) Non necessariamente periodiche; periodica invece deve essere la $f(x, y)$ (cfr. n.° 19).

relativo ad y pure limitato in un senso (non necessariamente lo stesso del precedente), la sua serie doppia di Fourier converge ovunque uniformemente.

Da questa proposizione e dall'ultima del n.° precedente si ha, come caso particolare, il criterio del CERNI [27]: *se la $f(x, y)$ ha nell'interno di Q (opp. in Q) i rapporti incrementali, rispetto a x e rispetto a y, limitati, la sua serie doppia di Fourier converge uniformemente in ogni campo chiuso interno a Q (opp. in tutto Q).*

23. *Se la $f(x, y)$ è limitata e integrabile in Q, e se esiste un numero N tale che per ciascun $\bar{y}$ interno a $(0, 2\pi)$, l'intervallo $(0, 2\pi)$ (considerato eventualmente aperto) può essere diviso in un numero non superiore ad N di intervalli parziali in ciascuno dei quali la $f(x, \bar{y})$ come funzione della sola x risulti monotona, e se altrettanto avviene per ogni $\bar{x}$ interno a $(0, 2\pi)$, relativamente alla funzione, della sola y, $f(\bar{x}, y)$, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso il valore* (24), *in ogni punto (x, y) in cui esistono i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$.*

La funzione qui considerata risulta immediatamente a variazione limitata; inoltre, osservando che la variazione totale della funzione della sola x, $f(x, \bar{y})$ in un intervallo (α, β) di $(0, 2\pi)$ è al più uguale alla oscillazione della $f(x, y)$ in tale intervallo, moltiplicata per N, ne viene, per la supposta esistenza dei limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$, che valgono anche le (7). È dunque applicabile il teorema del n.° 6.

Se, alle condizioni del criterio ora dimostrato, si aggiunge l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia continua in tutti i punti di Q (opp. in tutti i punti interni a Q), allora la convergenza della serie di Fourier della $f(x, y)$ è uniforme ovunque (opp. in ogni campo chiuso interno a Q).

Ciò segue immediatamente dal n.° 16.

24. *Se la $f(x, y)$, come funzione della sola x, è sempre assolutamente continua, e pure tale è come funzione della sola y, e se esistono due numeri N e σ maggiori di zero, tali che sia, per ogni y di $(0, 2\pi)$,*

$$\int_0^{2\pi} | f_x' |^{1+\sigma} dx < N,$$

[27] Loc. cit. [7].

e, per ogni x di $(0, 2\pi)$,

$$\int_0^{2\pi} |f_y'|^{1+\sigma} dy < N \text{ [28]},$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque uniformemente verso $f(x, y)$.

Si osservi che, per ogni intervallo (α, β) interno a $(0, 2\pi)$, è

$$V_{(x)}(\beta, y) - V_{(x)}(\alpha, y) = \int_\alpha^\beta |f_x'| dx,$$

e, per la disuguaglianza di SCHWARZ generalizzata,

$$\int_\alpha^\beta |f_x'| dx \leq \left[\int_0^{2\pi} |f_x'|^{1+\sigma} dx\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} (\beta - \alpha)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}};$$

è dunque

$$V_{(x)}(\beta, y) - V_{(x)}(\alpha, y) \leq N^{\frac{1}{1+\sigma}} (\beta - \alpha)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}},$$

e la $V_{(x)}(x, y)$ risulta così uniformemente continua rispetto ad x, in Q. Analogamente, si ha l'uniforme continuità della $V_{(y)}(x, y)$ rispetto ad y. Da ciò segue anche che la $f(x, y)$ è funzione continua di (x, y), in tutto Q. È quindi applicabile il primo teorema del n.° 16.

Se la $f(x, y)$ fosse priva della periodicità rispetto ad x e ad y, ma, considerata soltanto in Q, soddisfacesse alle condizioni del criterio qui dimostrato, la convergenza uniforme della sua serie doppia di FOURIER avverrebbe soltanto in ogni campo chiuso interno a Q. Nei punti del contorno di Q la serie sarebbe convergente verso il limite (24).

25. Diremo che la funzione *$f(x, y)$ è a variazione doppia finita* se, per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle x, in parti, me-

---

[28] Invece di questa e della disuguaglianza precedente, si possono porre le

$$\int_0^{2\pi} |f_x'| \log |1 + |f_x'|| dx < N, \quad \int_0^{2\pi} |f_y'| \log |1 + |f_y'|| dy < N.$$

diante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = 2\pi$, e per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle y mediante i punti $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots$ $\ldots < y_n = 2\pi$, la somma

$$\Sigma \left| f(x_r, y_s) - f(x_{r-1}, y_s) - f(x_r, y_{s-1}) + f(x_{r-1}, y_{s-1}) \right|,$$

estesa a tutti i valori $r = 1, 2, \ldots, m$, e $s = 1, 2, \ldots, n$, resta sempre inferiore ad un numero fisso, indipendente dalla suddivisione considerata [29].

È facile mostrare [30] che, se la $f(x, y)$ è a variazione doppia finita in Q, si può scrivere, in tutto Q,

$$f(x, y) = -f(0, 0) + f(x, 0) + f(0, y) + P(x, y) - N(x, y), \tag{26}$$

con $P(x, y)$ e $N(x, y)$ non negative, non decrescenti, sia come funzioni della sola x, sia come funzioni della sola y, e tali, inoltre, che per $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, sia sempre

$$P(x_2, y_2) - P(x_1, y_2) - P(x_2, y_1) + P(x_1, y_1) \geq 0,$$
$$N(x_2, y_2) - N(x_1, y_2) - N(x_2, y_1) + N(x_1, y_1) \geq 0.$$

Per le funzioni $P(x, y)$ e $N(x, y)$ esistono sempre [31] tutti i limiti $P(x \pm 0, y \pm 0)$, $N(x \pm 0, y \pm 0)$. Se perciò supponiamo che $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ siano funzioni, rispettivamente della x e della y, a variazione limitata, per la funzione a variazione doppia finita $f(x, y)$ esistono sempre i limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$.

E siccome ogni funzione di una variabile a variazione limitata si può sempre scomporre nella differenza di due funzioni non decrescenti, dalla (26) si deduce, applicando quanto si è detto nel n.° 20, che:

Se la $f(x, y)$ è a variazione doppia finita in Q, e se $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ sono funzioni, rispettivamente della x e della y, a variazione limitata, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque verso il limite (24) [32].

---

(29) Le funzioni *a variazione doppia finita* non sono altro che le funzioni *a variazione limitata del Vitali*.

(30) Vedi l. c. (9) od anche l. c. (15), vol. I, p. 325.

(31) R. C. YOUNG, *L'Enseignement Math.*, 1925, pp. 79-84.

(32) Questo teorema fu dato da HARDY in l. c. (9). L'HARDY suppone che la $f(x, y)$ sia anche a variazione limitata su ogni parallela all'asse delle x e su ogni parallela all'asse delle y; ma, come ha osservato W. H. YOUNG, e come del resto risulta immediatamente dalla (26), ciò è una conseguenza delle ipotesi da noi fatte.

Se alle ipotesi ora ammesse aggiungiamo quella della continuità della $f(x, y)$, i cinque termini del secondo membro di (26) risultano tutti funzioni continue ([33]); perciò abbiamo, sempre per quanto dimostrammo nel n.° 20:

Se, oltre alle condizioni della proposizione precedente, supponiamo la $f(x, y)$ ovunque continua, la serie doppia di Fourier di tale funzione converge verso di essa ovunque uniformemente.

Nel caso in cui le condizioni poste nelle due proposizioni qui stabilite valgano per la $f(x, y)$ considerata soltanto in Q e senza la periodicità, la prima proposizione continua ancora a sussistere, purchè sul contorno di Q si dia ai limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$ lo stesso significato che essi hanno quando si ammette la periodicità, mentre la seconda si riduce ad affermare la convergenza uniforme in ogni campo chiuso interno a Q.

26. *Se esistono due numeri maggiori di zero, K e α, tali che, per ogni coppia di punti di Q, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), sia*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha\}, \tag{27}$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso questa funzione in ogni punto (x_0, y_0) per il quale si possano determinare un intorno e due numeri positivi H e β, in modo da aversi, in tutto l'intorno,

$$|f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)| \leq H|x - x_0|^\beta |y - y_0|^\beta. \tag{28}$$

Ciò segue immediatamente, per cose note dalla teoria delle serie di FOURIER delle funzioni di una sola variabile, da quanto si è provato nei n.i 12 e 13.

Se poi la (28) è verificata per ogni coppia di punti di Q, (x_0, y_0) e (x, y) (H e β restando sempre gli stessi), e sempre supponendo verificata la (27), la convergenza della serie doppia di Fourier verso la $f(x, y)$ è ovunque uniforme.

Questo risulta facilmente dalle dimostrazioni dei n.i 12 e 13.

([33]) Ciò si dimostra facilmente utilizzando un lemma dato da W. H. YOUNG in l. c. ([12]), p. 143.

V. Sommabilità per linee e per colonne.

27. Posto

$$A_{m,n} = \lambda_{m,n}[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ si scriverà nella forma

$$\sum_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n}, \tag{29}$$

ed anche

$$\begin{array}{l} A_{0,0} + A_{1,0} + A_{2,0} + \dots + A_{m,0} + \dots \\ + A_{0,1} + A_{1,1} + A_{2,1} + \dots + A_{m,1} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + A_{0,n} + A_{1,n} + A_{2,n} + \dots + A_{m,n} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Diremo che la serie doppia (29) *è sommabile per linee*, in un punto (x, y), se, in tale punto, tutte le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sono convergenti e se, inoltre, risulta convergente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$. Il valore di questa serie si dirà allora *somma per linee* della serie doppia (29).

Analogamente si definirà la *sommabilità per colonne*.

È noto che una serie doppia può essere convergente senza essere sommabile per linee o per colonne ([34]). È anche noto che una serie doppia può

([34]) Per es. la serie doppia

$$\begin{array}{r} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \\ 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \\ -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots \\ 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots \\ -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

è convergente ed ha per somma 0, mentre nessuna delle sue linee e delle sue colonne è convergente.

essere sommabile tanto per linee quanto per colonne, ed avere le due somme uguali, senza essere convergente [35]. Si sa poi che, se la serie doppia (29) è convergente, e se la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$, è convergente per tutti i valori di n, allora la (29) è sommabile per linee, ed è

$$\sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} A_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \quad [36].$$

E analogamente, scambiando le linee con le colonne.

La (29) si dirà *uniformemente sommabile per linee* su un insieme E di punti (x, y), se, per ciascun valore di n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniformemente convergente su E, e se, inoltre, è uniformemente convergente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$.

Analoga definizione, per *l'uniforme sommabilità per colonne.*

---

[35] Per es. la serie doppia

$$\begin{array}{l}
1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots \\
-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots \\
-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ldots \\
\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \ldots \\
-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

è sommabile per linee, con somma 0, è sommabile per colonne, con somma 0, ma non è convergente.

[36] Ed infatti, se S è la somma della (29), preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, si possono determinare due numeri positivi μ_1 e ν_1 tali che, per $\mu > \mu_1$ e $\nu > \nu_1$, sia sempre

$$\left| S - \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n} \right| < \varepsilon.$$

Passando al limite, per $\mu \to \infty$, si ha

$$\left| S - \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right| < \varepsilon,$$

per ogni $\nu > \nu_1$. Di qui segue, per essere ε arbitrario, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è convergente e che la sua somma è S.

28. Vogliamo dimostrare che:

Se la $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), è periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y, è integrabile e a variazione limitata, indicata con $\sum\limits_{m, n = 0}^{\infty} A_{m,n}$ la sua serie doppia di Fourier, tutte le serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

sono convergenti in ogni punto (x, y) (le prime convergendo, in ciascun punto (x, y), uniformemente rispetto ad n, e le seconde rispetto ad m), ed è

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n(\beta - y) d\beta, \tag{30}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} = \frac{2\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha, y+0) + f(\alpha, y-0)}{2} \cos m(\alpha - x) d\alpha. \tag{31}$$

Consideriamo, infatti, la funzione di x

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \beta) \cos n\beta d\beta, \tag{32}$$

e mostriamo che essa è a variazione limitata in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$. Diviso tale intervallo in parti, mediante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_R = 2\pi$, abbiamo

$$\sum_{r=0}^{R} |\psi_n(x_{r+1}) - \psi_n(x_r)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{R} |f(x_{r+1}, \beta) - f(x_r, \beta)| d\beta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, \beta) d\beta.$$

Dunque la variazione totale di $\psi_n(x)$ in $(0, 2\pi)$ è inferiore ad un numero fisso (indipendente da n), vale a dire $\psi_n(x)$ è a variazione limitata in $(0, 2\pi)$. Ne segue che la serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ è convergente in ogni punto, ed ha sempre per somma

$$\frac{\psi_n(x+0) + \psi_n(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{u \to +0} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta.$$

Ma è, per quasi tutti i valori di β, di $(0, 2\pi)$,

$$\lim_{u \to +0} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} = \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2},$$

e siccome, per un'osservazione già fatta [37], le funzioni di β, $f(x+u, \beta)$ e $f(x-u, \beta)$ restano, in modulo, inferiori ad una funzione integrabile, indipendente da u, si ha, secondo un noto teorema di integrazione per serie,

$$\lim_{u \to +0} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta = \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta.$$

Ora la serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ è

$$\frac{1}{2\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \cos n\beta d\alpha d\beta + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos mx}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \cos m\alpha \cos n\beta d\alpha d\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} mx}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \operatorname{sen} m\alpha \cos n\beta d\alpha d\beta \right\},$$

vale a dire

$$\frac{1}{2\lambda_{0,n}} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx).$$

Dunque questa serie è sempre convergente, ed è

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta. \tag{33}$$

Analogamente, ragionando sulla funzione

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \beta) \operatorname{sen} n\beta d\beta, \tag{34}$$

si ha

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(c_{m,n} \cos mx + d_{m,n} \operatorname{sen} mx) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \operatorname{sen} n\beta d\beta. \tag{35}$$

---

[37] Cfr. n.° 7.

Da (33) e (35) si deduce che è sempre convergente la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$, e che vale la (30).

Proviamo che la convergenza della serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniforme rispetto ad n. A tale scopo riprendiamo a considerare la serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ e indichiamo con $\sigma_{\mu,n}$ la sua somma parziale, cioè poniamo

$$\sigma_{\mu,n} = \sum_{m=0}^{\mu} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx).$$

Abbiamo, come è noto,

$$\sigma_{\mu,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{\psi_n(x+2z) + \psi_n(x-2z)\} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz$$

e perciò

$$\sigma_{\mu,n} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\beta)+f(x-0,\beta)}{2} \cos n\beta d\beta = \sigma_{\mu,n} - \frac{\psi_n(x+0)+\psi_n(x-0)}{2} =$$

$$(36) \qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{\psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0)\} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{\psi_n(x-2z) - \psi_n(x-0)\} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz.$$

Indicando con $W_n(x)$ la variazione totale di $\psi_n(x)$, nell'intervallo $(0, x)$, e con δ un numero positivo $< \pi/2$, abbiamo, per le disuguaglianze (5) e (6),

$$\left|\int_0^{\pi/2} \{\psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0)\} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz\right| \leq \left|\int_0^{\delta}\right| + \left|\int_{\delta}^{\pi/2}\right| <$$

$$< \frac{\pi^2}{2}\{W_n(x+2\delta) - W_n(x+0)\} + \frac{C_\delta}{2(\mu+1)}\{W_n(x+\pi) - W_n(x+0)\}.$$

Ma ripetendo per l'intervallo $(x+\delta_1,\ x+2\delta)$, con $0<\delta_1<\delta$, il ragionamento fatto in principio di questo n.° per l'intervallo $(0, 2\pi)$, abbiamo

$$W_n(x+2\delta) - W_n(x+\delta_1) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{V_{(x)}(x+2\delta, \beta) - V_{(x)}(x+\delta_1, \beta)\} d\beta$$

e quindi

$$W_n(x+2\delta) - W_n(x+0) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+2\delta, \beta) - V_{(x)}(x+0, \beta) \} d\beta.$$

E, analogamente,

$$W_n(x+\pi) - W_n(x+0) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+\pi, \beta) - V_{(x)}(x+0, \beta) \} d\beta.$$

Se ne deduce

$$\left| \int_0^{\pi/2} \{ \psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+2\delta, \beta) - V_{(x)}(x+0, \beta) \} d\beta +$$

(37)

$$+ \frac{C_\delta}{2(\mu+1)\pi}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+\pi, \beta) - V_{(x)}(x+0, \beta) \} d\beta \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+2\delta, \beta) - V_{(x)}(x+0, \beta) \} d\beta + \frac{C_\delta}{2(\mu+1)\pi}\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, \beta) d\beta.$$

Ma per $\delta \rightarrow +0$, $V_{(x)}(x+2\delta, \beta)$ converge, per quasi tutti i β di $(0, 2\pi)$, verso $V_{(x)}(x+0, \beta)$, sempre non crescendo, e pertanto, in virtù di un teorema di integrazione per serie di B. LEVI, è, per $\delta \rightarrow +0$,

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(x+2\delta, \beta) d\beta \rightarrow \int_0^{2\pi} V_{(x)}(x+0, \beta) d\beta.$$

Se dunque scegliamo δ convenientemente piccolo e poi $\bar{\mu}$ sufficientemente grande, la (37) mostra che l'integrale del suo primo membro resta, per ogni $\mu > \bar{\mu}$ e per tutti gli n, minore, in modulo, di un numero positivo ε, prefissato ad arbitrio. E siccome altrettanto può dirsi dell'ultimo integrale della (36), se ne conclude, per la (36) stessa, che $\sigma_{\mu, n}$ tende al suo limite uniformemente rispetto a n.

È così provato che la serie (33) converge uniformemente rispetto ad n; e poichè lo stesso avviene per la (35), resta provata anche la convergenza uniforme di $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$.

In modo analogo si dimostra la convergenza uniforme, rispetto ad m, di $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$.

Osservazione. Per la dimostrazione della convergenza della serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ non si è fatto uso, in quanto precede, dell'intera ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata; si è soltanto utilizzato il fatto che l'integrale $\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)dy$ è finito.

29. Dalla proposizione dimostrata nel n.° precedente e da quanto si è rammentato nel n.° 27, risulta che:

Se la funzione $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è integrabile e a variazione limitata, la sua serie doppia di Fourier, in ogni punto in cui è convergente, è anche sommabile per linee e per colonne, e le somme così ottenute coincidono con la somma della serie stessa.

Come corollario si ha:

Nelle condizioni del teorema del n.° 6, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è, nel punto (x, y), sommabile tanto per linee quanto per colonne, con somme entrambe uguali alla somma della serie stessa.

30. Le uguaglianze (30) e (31) valgono anche se la $f(x, y)$, invece di essere a variazione limitata, soddisfa alla condizione espressa dalla (27). Ed infatti, in tale ipotesi, la funzione $\psi_n(x)$ definita dalla (32) verifica, per ogni coppia x_1, x_2 di punti di $(0, 2\pi)$, la disuguaglianza

$$(38)\qquad \begin{aligned} |\psi_n(x_1) - \psi_n(x_2)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, \beta) - f(x_2, \beta)|\, d\beta, \\ &\leq 2K|x_1 - x_2|^{\alpha}, \end{aligned}$$

vale a dire soddisfa alla condizione di LIPSCHITZ di ordine α, ed è perciò sviluppabile in serie di FOURIER ovunque convergente. Ripetendo allora le considerazioni svolte nel n.° 28, si ha, anche qui, la validità delle (30) e (31).

Possiamo, dopo di ciò, affermare che, *nelle condizioni di uno qualunque dei criteri di convergenza dati nel* § IV, *la serie doppia di Fourier della*

$f(x, y)$ è, nel punto (x, y), sommabile tanto per linee quanto per colonne, fornendo sempre somme uguali alla somma della serie stessa.

31. *Se alle ipotesi del teorema del n.° 28 si aggiunge la continuità della $f(x, y)$ rispetto ad x ed anche rispetto ad y, la convergenza delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ risulta uniforme rispetto a tutti i punti del piano (x, y) (e ciò indipendentemente da n, per la prima, da m, per la seconda).*

Nel caso attuale, $V_{(x)}(x, y)$, come funzione della sola x, è sempre continua e l'integrale $\int_0^{2\pi} V_{(x)}(x, y)dy$ è pure funzione continua della x, in virtù del teorema d'integrazione per serie del LEVI. Pertanto l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x + 2\delta, \beta) - V_{(x)}(x + 0, \beta) \} d\beta,$$

che figura nella (37) e che ora può scriversi

$$\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x + 2\delta, \beta) - V_{(x)}(x, \beta) \} d\beta,$$

può rendersi minore di un ε prefissato, per tutti i δ sufficientemente piccoli, e ciò indipendentemente da x. Il ragionamento fatto alla fine del n.° 28 mostra perciò che, preso ad arbitrio un ε positivo, si può determinare un $\bar{\mu}$ tale che, per ogni $\mu > \bar{\mu}$, sia

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} - \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n} \right| < \varepsilon,$$

per tutti i punti (x, y) e per tutti gli n.

Analogamente per $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$.

32. *Se la $f(x, y)$ — sempre supposta periodica — invece di essere a variazione limitata, soddisfa alla condizione* (27), *la convergenza delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è ancora uniforme rispetto a tutti i punti del* *piano* (x, y). Ciò risulta dal fatto che, in forza della (38), la convergenza della serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ è uniforme ovunque.

33. Alle condizioni di sommabilità per linee e per colonne già date nei n.[i] 29 e 30, possiamo aggiungerne qualche altra.

Osserviamo, in primo luogo, che, se alle ipotesi del teorema del n.° 28 aggiungiamo l'altra che per un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ esista un $\delta > 0$ tale che, in quasi tutto l'intervallo $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, la $\frac{f(\bar{x}+0, y) + f(\bar{x}-0, y)}{2}$ coincida con una funzione $\varphi(y)$ a variazione limitata, allora la serie doppia $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è sommabile per linee nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$, e la sua somma per linee è data da $\frac{\varphi(\bar{y}+0) + \varphi(\bar{y}-0)}{2}$. Ed infatti la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, per la (30), la serie di FOURIER della funzione, di y, $\frac{f(\bar{x}+0, y) + f(\bar{x}-0, y)}{2}$, e tale serie converge, nel punto $y = \bar{y}$, in virtù della condizione ora aggiunta, verso la somma della serie di FOURIER della $\varphi(y)$.

La condizione ora aggiunta è verificata se, per ogni y di $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, la $f(x, y)$ è funzione continua di x nel punto $x = \bar{x}$, e se, in $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, la $f(\bar{x}, y)$ è a variazione limitata. La somma per linee della serie doppia $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, in questo caso, $\frac{f(\bar{x}, \bar{y}+0) + f(\bar{x}, \bar{y}-0)}{2}$.

La stessa condizione è anche verificata se, per ogni x di $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, la funzione, della sola y, $f(x, y)$ ha, nell'intervallo $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, una variazione totale inferiore ad un numero fisso indipendente da x, e se i limiti $f(\bar{x}+0, y)$ e $f(\bar{x}-0, y)$ esistono per ogni y di $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$. La somma per linee della serie doppia $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, in questo caso,

$$\frac{1}{4} \lim_{\delta \to +0} \{ f(\bar{x}+0, \bar{y}+\delta) + f(\bar{x}-0, \bar{y}+\delta) + f(\bar{x}+0, \bar{y}-\delta) + f(\bar{x}-0, \bar{y}-\delta) \}.$$

Da quanto precede deduciamo la seguente proposizione:

Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è integrabile; se le variazioni totali $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ sono limitate in Q; la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$, è ovunque sommabile per *linee ed anche per colonne; la somma per linee è*

$$(39)\quad \frac{1}{4}\lim_{\delta\to+0}\{f(x+0,\ y+\delta)+f(x-0,\ y+\delta)+f(x+0,\ y-\delta)+f(x-0,\ y-\delta)\},$$

e la somma per colonne

$$(40)\quad \frac{1}{4}\lim_{\to+0}\{f(x+\delta,\ y+0)+f(x+\delta,\ y-0)+f(x-\delta,\ y+0)+f(x-\delta,\ y-0)\},$$

Se, di più, le $V_{(x)}(x,\ y)$ e $V_{(y)}(x,\ y)$ sono ovunque uniformemente continue, come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y ([38]), *la serie doppia è ovunque uniformemente sommabile per linee e per colonne, e le due somme* (39) *e* (40) *sono entrambe uguali a $f(x,\ y)$*,

La prima parte di questo enunciato è conseguenza immediata di quanto si è detto più sopra e del teorema del n.° 28. Per dimostrare la seconda parte, osserviamo, in primo luogo, che dalla ammessa continuità di $V_{(x)}(x,\ y)$ rispetto ad x, segue che la $f(x,\ y)$ è anch'essa continua rispetto ad x; e per ragione analoga tale funzione è continua anche rispetto ad y. Il teorema del n.° 31 assicura allora che le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,\,n}$ convergono uniformemente, ovunque. Osserviamo poi che, per la (30), la $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\,n}$ è la serie di FOURIER della funzione, della sola y, $f(x,\ y)$. Occorre provare che questa serie è ovunque uniformemente convergente. Posto

$$\sigma_\nu = \sum_{n=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\,n} = \sum_{n=0}^{\nu}\frac{2\lambda_{0,\,n}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x,\ \beta)\cos n(\beta-y)d\beta,$$

basta ragionare su σ_ν come abbiamo fatto sulla $\sigma_{\mu,\,n}$ nel n.° 28.

Un corollario della proposizione ora dimostrata è il seguente risultato, dovuto a G. ASCOLI ([39]):

Se la $f(x,\ y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili, ovunque continua e tale che il numero delle oscillazioni da essa compiute nel quadrato Q su ciascuna parallela all'asse delle x e su ciascuna parallela all'asse delle y, resti sempre inferiore ad uno stesso numero N, la sua serie doppia di Fourier è ovunque uniformemente sommabile per linee e per colonne, con somme sempre uguali a $f(x,\ y)$.

([38]) Si tenga presente quanto si è detto in ([22]).

([39]) L. c. ([3]).

34. Abbiamo anche facilmente, dopo quanto è già stato detto:

Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto alla x ed alla y, soddisfa per qualsiasi coppia (x_1, y_1), (x_2, y_2) di punti di Q, alla

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K \{ |x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha \},$$

con K e α numeri positivi fissi, la sua serie doppia di Fourier è ovunque uniformemente sommabile per linee e per colonne, con somme sempre uguali a $f(x, y)$.

35. Si possono dare facilmente esempi di funzioni $f(x, y)$ con serie doppia di FOURIER sommabile per linee e per colonne, in un punto, ma non convergente.

a) Sia $f(x, y) = 0$ nel campo $[-\pi \leq x \leq \pi,\ y^2 \leq x^2]$ e $f(x, y) = 1$ in $[-\pi \leq x \leq \pi,\ x^2 < y^2 \leq \pi^2]$. Si definisca poi altrove la $f(x, y)$ mediante la periodicità rispetto ad x e ad y, di periodo 2π. Per questa funzione, sono verificate le condizioni della prima parte del teorema del n.° 33, e perciò la sua serie doppia di FOURIER è sempre sommabile tanto per linee quanto per colonne. Nel punto (0, 0) la somma per linee è 1 e quella per colonne è 0. Ciò basta ([40]) per poter asserire che la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ non converge nel punto (0, 0).

Nei vertici del quadrato $\Omega \equiv [-\pi \leq x \leq \pi,\ -\pi \leq y \leq \pi]$, la serie considerata ha come somma per linee 0 e come somma per colonne 1. Quindi anche in tali punti la serie non converge.

In tutti gli altri punti di Ω, soddisfacenti alla $y^2 < x^2$, la serie doppia è convergente (per il teorema del n.° 23) ed ha per somma 0; in quelli soddisfacenti alla $y^2 > x^2$ la serie doppia converge verso 1; nei punti delle due diagonali di Ω, distinti dal centro e dai vertici, la serie è convergente per l'osservazione del n.° 9, ed ha per somma 1:2.

b) Sia $f(x, y) = 0$ in tutti i punti di Ω eccettuati quelli soddisfacenti alle disuguaglianze $\operatorname{tg} 30^\circ < \left|\frac{y}{x}\right| < \operatorname{tg} 60^\circ$, ove sia invece $f(x, y) = 1$. La serie doppia di FOURIER di questa funzione è ovunque sommabile per linee e per colonne (n.° 33). Nel punto (0, 0), le somme per linee e per colonne sono ambedue uguali a 0; ma la serie doppia non è convergente.

([40]) Cfr. n.° 27.

Ed infatti, se essa fosse convergente, dovrebbe avere per somma 0, mentre la sua somma parziale $s_{\mu,\nu}(0, 0)$, quando si facciano tendere μ e ν all'∞ in modo che $\frac{\mu}{\nu} \to \sqrt{3}$, tende a [41]

$$\frac{2}{\pi^2}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{t},$$

che è $\neq 0$. Nei punti $x = \pm\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, la serie doppia di FOURIER ha, come somma per linee, $1:2$, e come somma per colonne, 1; la serie non è perciò convergente. Analogamente, nei punti $y = \pm\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, la somma per linee è 1, e quella per colonne $1:2$, e la serie non converge. In tutti gli altri punti di Ω la somma per linee è sempre uguale a quella per colonne, e la serie è convergente con somma 0, se è $\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $\left|\frac{y}{x}\right| > \sqrt{3}$ (n.° 23); è convergente con somma 1, se è $\frac{1}{\sqrt{3}} < \left|\frac{y}{x}\right| < \sqrt{3}$ (n.° 23); è convergente con somma $\frac{1}{2}$, se è $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $\left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{3}$ (n.° 9).

[41] Ciò si vede subito applicando una formula stabilita da E. C. TITCHMARSH (*The Double Fourier Series of a Discontinuous Function*, Proc. Royal Society, Series A. vol. 106 (1924), (pp. 299-314), p. 302)