Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
39, 301–313 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov

Jean-Michel Bismut et Bernard Skalli
191 Rue d'Alésia, F-75014 Paris, France

L'objet de cet article est d'étendre les résultats obtenus dans [2] sur l'existence et la caractérisation de temps d'arrêts optimaux.

Dans [2], on utilisait un résultat de Rost [13], qui permet de caractériser très simplement les mesures d'arrêt associées à un processus de Markov.

Dans cet article, nous nous plaçons directement dans le cadre de la théorie générale des processus. On utilise alors les résultats de Mertens ([11] et [12]) pour démontrer l'existence d'un temps d'arrêt optimal. Les temps d'arrêt optimaux sont ensuite complètement caractérisés. Les résultats sont appliqués aux processus de Ray, aux processus droits et aux processus de Hunt. On redémontre alors certains résultats de [2]. On se réfèrera à [2] pour un développement complet des résultats de la partie III.

On retrouve en particulier le résultat d'existence de Fakeev [8], qui est un cas particulier des résultats démontrés ici. Pour une étude probabiliste des problèmes d'arrêt optimal, on se réfèrera aussi à Engelbert [6, 7] et à Grigelionis-Shiryaev [10].

I. Le problème de temps d'arrêt optimal dans le cadre de la théorie générale des processus

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ désigne un espace de probabilité complet, muni d'une suite croissante et continue à droite $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqq 0}$ de sous σ-algèbres complètes de $\mathscr{F}$. $\mathscr{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[0, +\infty]$.

On adjoindra, chaque fois que c'est nécessaire, un deuxième infini $\infty^+ > +\infty$, isolé de $[0, +\infty]$, où les temps d'arrêt s'évanouissent (i.e. ∞^+ joue le rôle de $+\infty$ dans l'application des théorèmes de section [4, 5]).

X_t est un processus mesurable borné, défini pour $t \in [0, +\infty]$ (il suffit en fait que X soit de la classe (D)).

Définition I.1. On appelle problème d'arrêt optimal (A) la recherche de $T \in \mathscr{T}$ maximisant $E(X_{T'})$ pour $T' \in \mathscr{T}$.

On peut naturellement remplacer X_t par sa projection optionnelle. On suppose donc désormais que X_t est un processus optionnel borné et $\geqq 0$ (en remplaçant éventuellement X par $X+a$).

On fait alors l'hypothèse suivante sur X.

Hypothèse 1. *Pour toute suite monotone — croissante ou décroissante — de temps d'arrêt $T_n \in \mathcal{T}$ convergeant vers $T \in \mathcal{T}$, alors $E(X_{T_n}) \to E(X_T)$.*

On peut caractériser complètement les processus X_t vérifiant l'hypothèse 1.

Théorème I.1. *Pour qu'un processus optionnel borné X_t défini pour $t \in [0, +\infty]$ vérifie l'hypothèse 1, il faut et il suffit qu'il soit* cad *sur* $[0, +\infty[$, lag *sur* $]0, +\infty]$ *et tel que sa projection prévisible ${}^3X_t$ soit égale à X_t^- pour $t \in]0, +\infty]$.*

Preuve. Par [4], IV, T 28, on sait que si X vérifie l'hypothèse 1, X est cad sur $[0, +\infty[$ et lag sur $]0, +\infty]$. De plus, par [4], IV, T 24, ${}^3X$ est lag sur $]0, +\infty]$ et $(X_t \neq X_t^-)$ est à coupes dénombrables dans $]0, +\infty]$. Enfin, par [4], V, T 19, $(X_t \neq {}^3X_t)$ est à coupes dénombrables dans $]0, +\infty]$. On a donc bien ${}^3X_t = X_t^-$ pour $t \in]0, +\infty]$.

Inversement, supposons les hypothèses du Théorème vérifiées. Soit alors T_n une suite croissante de temps d'arrêt $\in \mathcal{T}$ convergeant vers $T \in \mathcal{T}$. Si $\Lambda = \bigcap_n (T_n < T)$, le temps T_Λ (qui est égal à ∞^+ sur ${}^c\Lambda$) est prévisible. En effet, il est annoncé par $T_{n(T_n < T)}$ (le fait que sur $(T = \infty^+)$, T_n puisse être égal à T ne pose pas de difficultés). Or on a:

$$\lim E(X_{T_n}) = E(X_T 1_{c_\Lambda}) + E(1_{(T_\Lambda < \infty^+)} X_{T_\Lambda}^-). \tag{1.1}$$

Comme ${}^3X = X^-$, on déduit de (1.1):

$$\lim E(X_{T_n}) = E(X_T). \tag{1.2}$$

Les suites décroissantes de temps d'arrêt ne posent évidemment pas de difficultés.

Soit alors Z la surmartingale optionnelle introduite par Mertens dans [11], Théorème 4, sous le nom d'enveloppe de Snell de X, définie sur $[0, +\infty]$. On prendra ici encore garde au fait que Z est la plus petite surmartingale forte optionnelle forte majorant X sur $[0, +\infty]$ (pour se ramener aux hypothèses de Mertens [11], il suffit d'identifier $[0, +\infty]$ et $[0, 1]$).

On a alors immédiatement:

Théorème I.2. *Z est continue à droite sur* $[0, +\infty[$.

Preuve. Par le Théorème 2 de [11], Z est à trajectoires réglées et semi-continues supérieurement à droite. Si Z^+ est la régularisée à droite de Z sur $[0, +\infty[$, avec $Z^+_{+\infty} = Z_{+\infty}$, comme X est à trajectoires continues à droite, on a: $Z^+ \geqq X$. Or Z est la plus petite surmartingale forte majorant X sur $[0, +\infty]$. Comme Z^+ est une surmartingale forte majorant X, on a nécessairement $Z = Z^+$. Z est bien continue à droite.

Soit A le fermé droit optionnel $(X_t = Z_t)$ dans $[0, +\infty] \times \Omega$. A contient $\{+\infty\} \times \Omega$. Le début D_0^A de A est donc dans $\mathcal{T}$. On a alors le résultat essentiel suivant:

Théorème I.3. *D_0^A est un temps d'arrêt optimal.*

Preuve. Par [11], Théorème 4, on a:

$$E(Z_0) = \sup_{T \in \mathscr{T}} E(X_T). \tag{1.3}$$

Il suffit donc de démontrer que $E(Z_0) = E(Z_{D_0^A})$.

Supposons que $E(Z_0) - E(Z_{D_0^A}) = \varepsilon > 0$. Soit E l'ensemble des temps d'arrêt de $\mathscr{T}$ tels que $E(X_T) - E(Z_{D_0^A}) \geqq \varepsilon/2$.

E est nécessairement non vide par (1.3). Si $T \in E$, $T \wedge D_0^A \in E$. En effet:

$$E(X_{T \wedge D_0^A}) = E(1_{T \geqq D_0^A} X_{D_0^A} + 1_{T < D_0^A} X_T). \tag{1.4}$$

Or, on a:

$$1_{T \geqq D_0^A} X_{D_0^A} = 1_{T \geqq D_0^A} Z_{D_0^A} \geqq 1_{T \geqq D_0^A} E^{\mathscr{F}_{D_0^A}} Z_T \geqq 1_{T \geqq D_0^A} E^{\mathscr{F}_{D_0^A}} X_T. \tag{1.5}$$

Donc:

$$E(X_{T \wedge D_0^A}) \geqq E(X_T) \geqq E(Z_{D_0^A}) + \varepsilon/2. \tag{1.6}$$

L'ensemble E' défini par:

$$E' = \{T \in E;\ T \leqq D_0^A\} \tag{1.7}$$

est donc non vide.

Montrons qu'il est inductif pour l'ordre naturel des temps d'arrêt. Soit en effet F une partie totalement ordonnée de E', et τ le temps d'arrêt:

$$\tau = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau' \in F} \tau'. \tag{1.8}$$

Alors, F étant filtrant, il existe une suite croissante τ_n d'éléments de F tels que $\tau = \lim \tau_n$ p.s. Comme $E(X_\tau) = \lim E(X_{\tau_n})$, et comme nécessairement $\tau \leqq D_0^A$, la partie F possède bien un majorant τ dans E'. E' est bien inductif.

Par le Théorème de Zorn, on peut trouver un élément τ' maximal dans E'. Comme $D_0^A \notin E'$, $\tau' \leqq D_0^A$ avec inégalité stricte sur un non-négligeable. Or, D_0^A est le début de $(X_t = Z_t)$.

Donc, $E(Z_{\tau'}) > E(X_{\tau'})$. Par le Théorème 4 de [11], on a:

$$E(Z_{\tau'}) = \sup_{\substack{T \in \mathscr{T} \\ T \geqq \tau'}} E(X_T). \tag{1.9}$$

Il existe donc $T \geqq \tau'$ tel que $E(X_T) > E(X_{\tau'})$. Alors, par la première partie de (1.6) on a nécessairement:

$$E(X_{T \wedge D_0^A}) \geqq E(X_T). \tag{1.10}$$

Si τ'' est le temps d'arrêt $T \wedge D_0^A$, on a donc:

$$E(X_{\tau''}) > E(X_{\tau'}). \tag{1.11}$$

Donc, $\tau'' \in E'$, et par (1.11) majore strictement τ' au sens de l'ordre dans E'. τ' n'est donc pas maximal dans E'. Il y a contradiction.

D_0^A est donc bien un temps d'arrêt optimal.

On pose:

$$D_t^A = \inf\{s \geqq t;\ X_s = Z_s\}. \tag{1.12}$$

Le processus D_t^A est croissant. On a alors immédiatement:

Théorème I.4. *Z_t est la projection optionnelle du processus mesurable $X_{D_t^A}$ sur $[0, +\infty]$.*

Preuve. Le processus D_t^A est mesurable. En effet, pour $\alpha \geqq 0$. Soit R^α la variable aléatoire $\sup\{s \leqq \alpha;\ X_s = Z_s\}$. On vérifie que l'ensemble $\{D_t^A(\omega) \leqq \alpha\}$ est égal à $[0, R^\alpha(\omega)[\cup \{R^\alpha(\omega) \in A\}$ qui est mesurable dans $\Omega \times [0, +\infty]$. Il reste à vérifier que pour tout temps d'arrêt T, $Z_T = E^{\mathscr{F}_T} X_{D_T^A}$. En se ramenant au temps d'arrêt $T=0$, le Théorème résulte immédiatement du Théorème I.3.

On va maintenant montrer que Z *est une surmartingale régulière.*

Théorème I.5. *Z est une surmartingale régulière sur $[0, +\infty]$.*

Preuve. Il suffit de montrer que si $T_n \uparrow T$ alors $E(Z_{T_n}) \downarrow E(Z_T)$. Or, par le Théorème I.4, $E(Z_{T_n}) = E(X_{D_{T_n}^A})$. La suite de temps d'arrêt $D_{T_n}^A$ est croissante et converge vers un temps d'arrêt T', qui est nécessairement $\geqq T$. Or $E(X_{T'}) = \lim E(X_{D_{T_n}^A})$. Donc $\lim E(Z_{T_n}) = E(X_{T'})$. Or, par définition, $E(Z_T) \geqq E(X_{T'})$. On en déduit immédiatement le résultat.

Soit $Z = M - B$ la décomposition de Meyer de la surmartingale Z. B est alors nécessairement un processus continu sur $[0, +\infty]$.

On pose, pour $t \in [0, +\infty]$

$$D_t' = \inf\{s \geqq t;\ B_s - B_t > 0\} \wedge (+\infty). \tag{1.13}$$

D_t' est un processus croissant et continu à droite sur $[0, +\infty[$. L'ensemble $C = (D_t' = t)$ est alors progressivement mesurable par [4], VI, T2d) et T35. On a alors le résultat élémentaire suivant:

Proposition I.1. *$C \subset A$ (à un evanescent près).*

Preuve. Tout temps d'arrêt $T \in \mathscr{T}$ section de C est section de A. En effet, on a nécessairement: $Z_T = E^{\mathscr{F}_T} Z_{D_T^A}$, ce qui implique que $D_T^A = T$, et donc, comme A est un fermé droit, que T est section de A. Or C est l'adhérence à droite des graphes des temps d'arrêt D_t' ($t \in Q \cup \{+\infty\}$). Comme ces graphes sont inclus dans A et comme A est fermé à droite, la Proposition est bien démontrée.

On a enfin le résultat fondamental:

Théorème I.6. *Soit T_0 un temps d'arrêt $\in \mathscr{T}$. Pour que $T \geqq T_0$ maximise $E(X_{T'})$ sur $\{T' \in \mathscr{T};\ T' \geqq T_0\}$, il faut et il suffit que T soit section de A et que $T \leqq D_{T_0}'$. En particulier $D_{T_0}^A$ et D_{T_0}' sont optimaux.*

Preuve. Montrons tout d'abord que D'_{T_0} est bien un temps d'arrêt optimal. D'_{T_0} étant un temps d'arrêt section de C est nécessairement section de A. Comme B est un processus continu, on a alors:

$$E(Z_{T_0}) = E(Z_{D'_{T_0}}) = E(X_{D'_{T_0}}) \tag{1.14}$$

ce qui implique bien l'optimalité de D'_{T_0}.

Inversement, pour qu'un temps d'arrêt T soit optimal, on doit nécessairement avoir:

$$E(Z_{T_0}) = E(Z_T) = E(X_T). \tag{1.15}$$

Ceci implique bien que T est une section de A. De plus, la première égalité dans (1.15) implique nécessairement que $T \leqq D'_{T_0}$.

II. Extensions

On suppose maintenant que X_t est un processus optionnel $\geqq 0$ borné défini pour $t \in [0, +\infty]$, tel que pour toute suite monotone de temps d'arrêt $T_n \in \mathscr{T}$ convergeant vers $T \in \mathscr{T}$, on a:

$$E(X_T) \geqq \limsup E(X_{T_n}). \tag{2.1}$$

On a alors:

Théorème II.1. *Pour que X optionnel borné vérifie l'hypothèse* (2.1), *il faut et il suffit que X soit à trajectoires s.c.s. à droite sur* $[0, +\infty[$ *et que si Y_t est le processus prévisible*

$$Y_t = \limsup_{s \uparrow \uparrow t} X_t \qquad \textit{pour } t \in]0, +\infty] \tag{2.2}$$

on ait:

$$^3X_t \geqq Y_t \qquad \textit{pour } t \in]0, +\infty]. \tag{2.3}$$

Preuve. Par [5], IV, T 90 (p. 225), Y_t est prévisible.

Les conditions sont suffisantes par un raisonnement déjà utilisé au Théorème I.1. Montrons qu'elles sont nécessaires.

Soit Y'_t le processus défini pour $t \in [0, +\infty[$

$$Y'_t = \limsup_{s \downarrow \downarrow t} X_s. \tag{2.4}$$

Par [5] IV, T 90 (p. 225), Y' est progressif. On va montrer successivement que $X_t \geqq {}^1Y'_t$ et que ${}^1Y'_t \geqq Y'_t$, ce qui entraînera bien que X est s.c.s. à droite. Supposons en effet que $(X < {}^1Y')$ soit non évanescent dans $\Omega \times [0, +\infty[$. Il existe donc $r \in Q$ tel que $(X < r < {}^1Y')$ soit non évanescent dans $\Omega \times [0, +\infty[$. Par [5], IV, T 84 on peut trouver un temps d'arrêt T à valeurs dans $[0, +\infty[\cup \{\infty^+\}$ section de $(X < r < {}^1Y')$ et tel que $P(T = \infty^+) < 1$.

Sur $(T<\infty^+)$, on a donc: $X_T<r<{}^1Y'_T$ et comme sur $(T<\infty^+)$, $Y'_T={}^1Y'_T$, on a:

$$\text{sur}\,(T<\infty^+), \qquad X_T<r<Y'_T.$$

Or, sur $(T<\infty^+)$, on a: $T<+\infty$. De plus, $+\infty$ est un temps d'arrêt prévisible.

Enfin, sur $(T<\infty^+)$, T est adhérent à l'ensemble optionnel $A=]T, +\infty[\cap(X>r)$. Donc, par [4], IV, T 11, il existe une suite décroissante de temps d'arrêts T_n convergeant vers T à valeurs dans $[0, +\infty[\cup\{\infty^+\}$ dont les graphes sont inclus dans A.

Soit alors $m\in[0, +\infty[$ assez grand pour que $P(T<m)>0$.

On a:

$$\begin{aligned}\liminf E(X_{T_n\wedge m}) &= \liminf E(X_{T_n} 1_{T_n<m} + X_m 1_{T_n\geqq m}) \\ &\geqq \liminf (r\,P(T_n<m) + E(X_m 1_{T_n} \geqq m) \\ &= r\,P(T<m) + E(X_m 1_{T\geqq m}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Or, comme $P(T<m)>0$ et comme sur $(T<m)$ on a: $r>X_T$, il vient:

$$\liminf E(X_{T_n\wedge m}) > E(X_T 1_{T<m}) + E(X_m 1_{T\geqq m}) \tag{2.6}$$

ou encore:

$$\liminf E(X_{T_n\wedge m}) > E(X_{T\wedge m}). \tag{2.7}$$

La suite de temps d'arrêts $T'_n=T_n\wedge m$ décroît vers $T'=T\wedge m$ et la relation (2.7) contredit (2.1).

Montrons maintenant que ${}^1Y'\geqq Y'$. Si $({}^1Y'<Y')$ est non evanescent dans $\Omega\times[0, +\infty[$, il existe $r\in Q$ tel que $({}^1Y'<r\leqq Y')$ soit non evanescent dans $\Omega\times[0, +\infty[$.

L'ensemble progressif $A^r=(Y'\geqq r)$ est un fermé droit puisque Y' est s.c.s. à droite. Sa projection optionnelle est égale à $({}^1Y'\geqq r)$. On va montrer que $A^r\subset{}^1A^r$.

On utilise pour cela un argument communiqué par Azéma. En effet, on sait par [4], VI, T 2 que l'adhérence $\bar{A}^r$ de A^r est optionnelle. Or comme A^r est fermé à droite, $\bar{A}^r/A^r$ est mince. Par [5], IV, T 88, ${}^1(\bar{A}^r/A^r)$ est contenu dans $\bar{A}^r/A^r$. Par différence, on en déduit bien que $A^r\subset{}^1A^r$.

Il est donc impossible que $({}^1Y'\leqq Y')$ soit non évanescent dans $\Omega\times[0, +\infty[$. On a alors $X\geqq Y'$. X est bien à trajectoires p.s. s.c.s. à droite.

Supposons maintenant que $({}^3X<Y)$ est non évanescent dans $\Omega\times]0, +\infty]$. Il existe donc $r\in Q$ tel que $({}^3X<r<Y)$ est non évanescent dans $\Omega\times]0, +\infty]$.

Soit T un temps prévisible à valeurs dans $]0, +\infty]\cup\{\infty^+\}$ section de $({}^3X<r<Y)$ tel que $P(T=\{\infty^+\})<1$. On a donc:

$$\text{sur}\,(T<\infty^+), \qquad {}^3X_T<r<Y_T.$$

De plus $T>0$. Enfin sur $(T<\infty^+)$, T est adhérent à l'ensemble optionnel $B=]0, T[\cap(X>r)$.

Par [4], IV, T 11, il existe une suite croissante de temps d'arrêts T_n convergeant vers T, à valeurs dans $]0, +\infty] \cup \{\infty^+\}$, dont les graphes sont inclus dans B.

On pose:

$$T_n' = T_n \wedge +\infty,$$
$$T' = T \wedge +\infty.$$

Alors:

$$\begin{aligned}\liminf E(X_{T_n'}) &= \liminf E(X_{T_n} 1_{T_n \leqq +\infty} + X_{+\infty} 1_{T_n = \infty^+}) \\ &\geqq \liminf r P(T_n \leqq +\infty) + E(X_{+\infty} 1_{T_n = \infty^+}) \\ &= r P(T \leqq +\infty) + E(X_{+\infty} 1_{T = \infty^+})\end{aligned} \tag{2.8}$$

(rappelons que ∞^+ est isolé de $[0, +\infty]$).

Or, sur $T \leqq +\infty$, ${}^3X_T < r$. Enfin, $P(T \leqq +\infty) > 0$.

Donc:

$$\liminf E(X_{T_n'}) > E({}^3X_T 1_{T \leqq +\infty} + X_{+\infty} 1_{T = \infty^+}). \tag{2.9}$$

Or, par définition, $T \leqq +\infty$ est $\mathscr{F}_T^-$-measurable.

Comme T est prévisible, on a ([4], V, T 15):

$$1_{(T \leqq +\infty)} {}^3X_T = E^{\mathscr{F}_T^-}(X_T 1_{(T \leqq +\infty)}). \tag{2.10}$$

Donc:

$$E({}^3X_T 1_{(T \leqq +\infty)}) = E(X_T 1_{(T \leqq +\infty)}). \tag{2.11}$$

De (2.9) et (2.11), on tire:

$$\liminf E(X_{T_n'}) > E(X_{T'}). \tag{2.12}$$

Il y a encore contradiction.

Z désigne l'enveloppe de Snell au sens de Mertens de X, sur $[0, +\infty]$ et Z^+ sa regularisée à droite sur $[0, +\infty[$ (avec $Z_{+\infty}^+ = Z_{+\infty}$).

Par [11] – Théorème 4 et sa démonstration, on a:

$$Z = X \vee Z^+. \tag{2.13}$$

Soit A l'ensemble optionnel $(Z_t = X_t)$. A est un fermé droit, car il peut s'écrire:

$$A = (Z_t^+ \leqq X_t) \tag{2.14}$$

On a alors immédiatement:

Théorème II.2. *D_0^A est un temps d'arrêt optimal.*

Preuve. La preuve est identique à la preuve du Théorème I.3. La condition à laquelle satisfait X permet encore de montrer que E' reste inductif dans les mêmes conditions.

Les Théorèmes I.4 et I.5 restent également vrais.

Par les Théorèmes 3 et 4 de [11], il existe un processus prévisible B unique engendrant la surmartingale forte Z, et B est continu à gauche sur $]0, +\infty]$.

Necessairement, on a $(Z=Z^+)=(B=B^+)$. Donc $(B^+>B)=(Z^+<Z)$. Or $(Z^+<Z)=(Z^+<X)$.

Donc:

$$(B^+>B)=(Z^+<X). \tag{2.15}$$

De plus, l'ensemble $(B^+>B)$ est optionnel.

Soit $\tilde{B}$ la partie continue de B. On pose:

$$\tilde{D}_t=\inf\{s\geqq t, \tilde{B}_s-\tilde{B}_t>0\}\wedge(+\infty). \tag{2.16}$$

L'ensemble $C=(\tilde{D}_t=t)$ est progressivement mesurable.

On a alors:

Proposition II.1. *$C\cup(B^+>B)\subset A$ (à un evanescent près).* (2.17)

Preuve. Par (2.15), $(B^+>B)\subset(Z=X)$. Il suffit donc de raisonner sur C. La démonstration est alors identique à la dèmonstration de la Proposition I.1.

On pose:

$$D'_t=\tilde{D}_t\wedge\inf\{s\geqq t; B_s^+>B_s\}=\inf\{s\geqq t; B_s-B_t>0\}\wedge(+\infty). \tag{2.18}$$

Alors

$$(D'_t=t)=C\cup(B^+>B). \tag{2.19}$$

Théorème II.3. *Soit T_0 un temps d'arrêt. Pour que $T\geqq T_0$ maximise $E(X_{T'})$ sur $\{T'\in\mathscr{T}; T'\geqq T_0\}$, il faut et il suffit que T soit section de A et que $T\leqq D'_{T_0}$. En particulier $D^A_{T_0}$ et D'_{T_0} sont optimaux.*

Preuve. La démonstration est la même que la démonstration du Théorème I.6.

III. Application aux processus de Markov

On va appliquer les résultats précédents aux processus de Ray, aux processus droits et aux processus de Hunt.

1. Processus de Ray

x désigne un processus de Ray ([9], (3.1)) à valeurs dans un espace compact métrisable E, contenant un cimetière δ. On suppose que x est à durée de vie ζ finie.

g désigne une fonction continue bornée sur E. On suppose que si P_t est le semi-groupe associé à x, on a: $P_0 g=g$.

λ est une mesure de probabilité sur E. P_λ est le processus de mesure d'entrée λ.

Définition III.1. On appelle problème (A_λ) la recherche d'un temps d'arrêt $T \in \mathscr{T}$ maximisant $E_\lambda\, g(x_{T'})$ où T' est un temps d'arrêt $T \in \mathscr{T}$.

Comme précédemment, on peut supposer que g est positive. On a alors le résultat suivant:

Proposition III.1. *Il existe une fonction $q \geqq g$ excessive régulière bornée qui est la plus petite fonction fortement surmédiane presque-borélienne $\geqq g$. Pour toute mesure de probabilité λ sur E, on a:*

$$\langle \lambda, q \rangle = \sup_{T \in \mathscr{T}} E_\lambda\, g(x_T). \tag{3.1}$$

Enfin $q(x_t)$ est l'enveloppe de Snell de $g(x_t)$ pour P_λ.

Preuve. Soit D l'ensemble $E-B$, où B est le borélien formé des points de branchement ([9], (3.6)). Alors pour toute mesure d'entrée μ concentrée sur D, x se comporte comme un processus droit à valeurs dans D, dont les fonctions excessives sont presque-boréliennes ([9], Théorème (5.8)). On peut donc par [12] définir l'enveloppe de Snell de la fonction g sur D: c'est la plus petite fonction fortement surmédiane presque-borélienne $\geqq g$ sur D, qu'on note q; q est elle-même fortement surmédiane presque-borélienne. On prolonge q sur B par $q = P_0\, q$ (le noyau P_0 ne charge que D). q est alors universellement mesurable et presque-borélienne sur E.

Alors, comme q est $\geqq g$ hors des points de branchement, et comme $P_0\, g = g$, on a bien $q \geqq g$ partout. De plus, pour toute mesure de probabilité μ ne chargeant pas les points de branchement, on a par [12]:

$$\langle \mu, q \rangle = \sup_{T \in \mathscr{T}} E_\mu\, g(x_T). \tag{3.2}$$

Si λ est une mesure de probabilité quelconque, on a:

$$\langle \lambda, q \rangle = \langle \lambda, P_0\, q \rangle = \langle \lambda P_0, q \rangle. \tag{3.3}$$

Alors λP_0 ne charge pas les points de branchement. Donc:

$$\langle \lambda, q \rangle = \sup_{T \in \mathscr{T}} E_{\lambda P_0}\, g(x_T). \tag{3.4}$$

Mais, par définition, $E_{\lambda P_0} = E_\lambda$ sur $\mathscr{B}(x_u \mid u \geqq 0)$. On en déduit:

$$\langle \lambda, q \rangle = \sup_{T \in \mathscr{T}} E_\lambda\, g(x_T). \tag{3.5}$$

La fonction q a donc toutes les propriétés classiques des enveloppes de Snell. En particulier c'est la plus petite fonction fortement surmédiane $\geqq g$. De plus, par le Théorème (5.11) de [9], $P_0\, g(x_t -)$ est la projection prévisible de $g(x_t)$. Comme $P_0\, g = g$, $g(x_t)_-$ est la projection prévisible de $g(x_t)$. Enfin, comme x est à durée de vie finie, $g(x_t)$ est lag sur $]0, +\infty]$.

Le processus $g(x_t)$ vérifie donc toutes les hypothèses de la partie I. On applique alors les Théorèmes I.2 et I.5: q est bien excessive et régulière.

Par le Théorème de [3], IV (3.13), il existe une fonctionnelle additive continue B dont q est le potentiel. Soit C son support fin, qui est finement fermé, presque borélien et finement régulier. C est inclus dans D.

Soit A l'ensemble presque borélien

$$A=\{x; q(x)=g(x)\}. \tag{3.6}$$

$A \cap D$ est finement fermé dans D.

On a alors:

Théorème III.1. *Pour qu'un temps d'arrêt T soit solution du problème (A_λ), il faut et il suffit que $x_T \in A$ p.s. et que $T \leqq D_C$.*[1] *En particulier D_A et D_C sont optimaux.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème I.6.

On suppose maintenant que g est une fonction s.c.s. bornée telle que $P_0 g \geqq g$. On définit un nouveau problème d'arrêt optimal (A_λ), comme à la définition III.1.

On a alors:

Proposition III.2. *Il existe une fonction $q \geqq g$ fortement surmédiane régulière presque borélienne bornée qui est la plus petite fonction fortement surmédiane presque-borélienne $\geqq g$. Pour toute mesure λ, on a:*

$$\langle \lambda, q\rangle = \sup_{T \in \mathscr{T}} E_\lambda\, g(x_T). \tag{3.7}$$

Enfin $q(x_t)$ est l'enveloppe de Snell de $g(x_t)$ pour P_λ.

Preuve. Pour construire l'enveloppe de Snell q de g sur l'ensemble D, on procède comme à la Proposition III.1. On prolonge q à B par $q=P_0 q$. Alors, comme $P_0 q \geqq P_0 g \geqq g$, on a bien $q \geqq g$ partout.

Le processus $g(x_t)$ est s.c.s. à droite. De plus la projection prévisible de $g(x_t)$ est égale à $P_0 g(x_t-)$. Comme g est s.c.s., on a:

$$g(x_t-) \geqq \limsup_{s \uparrow \uparrow t} g(x_s). \tag{3.8}$$

Comme $P_0 g \geqq g$, les conditions du Théorème II.1 sont bien vérifiées.

On applique alors le Théorème I.5 qui est aussi vrai pour II.

Soit $\bar{q}$ la régularisée p-excessive de q. Par la Proposition 1 de [12] on sait que $q=\bar{q} \vee g$ sur D.

Par un résultat de [1], il existe une fontionnelle additive gauche C engendrant q[2]. De plus, l'ensemble $B'=(\bar{q}<q) \cap D$ est semi-polaire. Enfin, on a nécessairement:

$$B'=(\bar{q}<g) \cap D. \tag{3.9}$$

Soit B'' le support fin de la partie continue de la fonctionnelle additive gauche

---

[1] $D_H=\inf\{t \geqq 0; x_t \in H\} \wedge (+\infty)$

[2] Nous suivons la terminologie de Meyer. Ces fonctionnelles sont appellées fonctionnelles droites par Azéma [1]

engendrant q (voir [1]), avec $B'' \subset D$. Soit B le presque borélien $B' \cup B''$. Alors $B \subset D$.

A est l'ensemble presque borélien

$$A = \{x; q(x) = g(x)\}. \tag{3.10}$$

Alors $A \cap D$ est finement fermé dans D, car:

$$A \cap D = \{x \in D; \bar{q}(x) \leqq g(x)\}.$$

On a immédiatement:

Théorème III.2. *Pour qu'un temps d'arrêt T soit solution du problème (A_λ), il faut et il suffit que sur $(T < +\infty)$, $x_T \in A$ p.s. et que $T \leqq D_B$. En particulier D_A et D_B sont optimaux.*

Preuve. La preuve résulte du Théorème II.3.

2. *Processus droits*

x désigne un processus droit [9], 9, à valeurs dans un espace E homéomorphe à une partie universellement mesurable d'un espace métrique compact $\hat{E}$. Soit P_t le semi-groupe associé. On suppose encore que E contient un cimetière δ, et que x est à durée de vie finie.

g est une fonction borélienne bornée sur E. On pose de nouveau un problème (A_λ), où λ est une mesure de probabilité sur E.

Nous donnons tous les éléments qui permettent de construire l'enveloppe de Snell de g et de caractériser les temps d'arrêt optimaux, quand ils existent.

On supposera ici encore que g est positive.

a) Construction de l'enveloppe de Snell

Soit $\bar{E}$ un compactifié de Ray-Knight de E ([9].10). Alors on peut transformer x en un processus de Ray à valeurs dans $\bar{E}$. Par [9], (11.3), g est une fonction Ray-borélienne. Il existe donc $\bar{g}$ Ray-borélienne définie sur $\bar{E}$ qui coincide avec g sur E.

Par la démonstration de la Proposition III.1, il existe une fonction $\bar{q}$ définie sur l'ensemble Ray-borélien D, complémentaire de l'ensemble des points de branchement de x dans $\bar{E}$, qui est fortement p-surmédiane Ray presque-borélienne, et qui est la plus petite fonction fortement surmédiane Ray presque-borélienne $\geqq \bar{g}$ sur D.

Or par [12], pour tout x de D, on

$$\bar{q}(x) = \sup_{T \in \mathscr{T}} \bar{E}_x\, g(x_T). \tag{3.11}$$

Comme $E \subset D$ ([9], (10.9)), si $x \in E$, on a aussi (3.11).

Or si $x \in E$, pour tout T, $x_T \in E$. Donc si $x \in E$,

$$\bar{q}(x) = \sup_{T \in \mathscr{T}} E_x\, g(x_T). \tag{3.12}$$

Ainsi la restriction de $\bar{q}$ à E ne dépend que de g, et pas de la compactification particulière choisie, ou du prolongement de g hors de E. Soit q cette restriction.

Pour toute mesure de probabilité λ sur E, $q(x_t)$ est donc l'enveloppe de Snell de $g(x_t)$ pour le processus x_t de mesure d'entrée λ. On a donc:

Proposition III.3. *Il existe une fonction q Ray presque-borélienne et fortement surmédiane $\geqq g$, qui est la plus petite fonction Ray presque-borélienne fortement surmédiane $\geqq g$. De plus, pour toute mesure de probabilité λ sur E, $q(x_t)$ est l'enveloppe de Snell de $g(x_t)$.*

b) Existence de temps d'arrêt optimaux: le cas continu

Nous donnerons uniquement des résultats canoniques, i.e. ne dépendant pas de la compactification de Ray-Knight choisie.

Soit donc R l'espace de Ray associé à x ([9], (15.5)) muni de la topologie de Ray.

On suppose que g possède un prolongement $\bar{g}$ à R, qui est borné, continu sur R pour la topologie de Ray, et tel que soit $\bar{P}_0 1_E g = \bar{g}$, soit $\bar{P}_0 \bar{g} = \bar{g}$ ($\bar{P}_0$ est défini en [9], (10.8) et (15.6)). On a alors:

Théorème III.3. *La fonction q est excessive régulière. Soit A le Ray presque-borélien finement fermé $\{x \in E;\ q(x) = g(x)\}$ et $F \subset E$ le support fin Ray presque-borélien finement fermé de la fonctionnelle additive continue engendrant q. Pour que T soit solution du problème (A_λ), il faut et il suffit que $x_T \in A$ p.s. et que $T \leqq D_F$. En particulier D_A et D_F sont des temps d'arrêt optimaux.*

Preuve. Par [9], (15.4), x_t est continu à droite à valeurs dans E et à limites à gauche dans R. Le processus $\bar{g}(x_t)$ est donc cad sur $[0, +\infty[$, lag sur $]0, +\infty]$, et est indistinguable de $g(x_t)$. De plus, g étant borélienne sur E par [9], (11.15), $(\bar{P}_0 1_E g)(x_t -)$ est la projection prévisible de $g(x_t)$. Donc si $\bar{P}_0 1_E g = \bar{g}$, $\bar{g}(x_t -)$ est la projection prévisible de $g(x_t)$, ce qui implique que $g(x_t)_-$ est la projection prévisible de $g(x_t)$.

De même $\bar{g}$ étant Ray-borélienne sur R, il existe $\bar{g}'$ Ray-borélienne sur un compactifié de Ray-Knight $\bar{E}$ de E contenant R dont la restriction à R est $\bar{g}$. Alors, par [9], (11.15), $\bar{P}_0 \bar{g}'(x_t^-)$, est la projection prévisible de $g(x_t)$. De plus, par [9], (15.6), si $x \in R$, $\varepsilon_x \bar{P}_0$ est portée par R. Donc $\bar{P}_0 \bar{g}(x_t)$ est la projection prévisible de $g(x_t)$. Si $\bar{P}_0 \bar{g} = \bar{g}$, $g(x_t)_-$ est la projection prévisible de $g(x_t)$.

Dans les deux cas, on peut appliquer les résultats de la partie I.

c) Existence de temps d'arrêt optimaux: le cas s.c.s.

On suppose maintenant que g possède un prolongement $\bar{g}$ à R, qui est borné, s.c.s. sur R et tel que soit $\bar{P}_0 1_E g \geqq \bar{g}$, soit $\bar{P}_0 \bar{g} \geqq \bar{g}$.

On a alors grâce aux résultats de II et à la démonstration des Théorèmes III.2 et III.3 l'équivalent de la Proposition III.2 et du Théorème III.2.

3. Processus de Hunt

C'est le cas le plus agréable à traiter. x désigne en effet un processus de Hunt à valeurs dans E, contenant un cimetière δ. On suppose x à durée de vie finie. Si g est une fonction borélienne bornée sur E, $g(x_t^-)$ est projection prévisible de $g(x_t)$.

On vérifie alors que si g est continue ou s.c.s., le problème (A_λ) a une solution. Les résultats s'énoncent dans les mêmes termes que pour les processus de Ray.

Références

1. Azema, J.: Le retournement du temps. Ann. Sci. École Norm. Sup., 4° série, **6**, 439–519 (1973)
2. Bismut, J.M.: Dualité convexe, temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **38**, 169–198 (1977)
3. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press 1968
4. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 67. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
5. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiels. 2nd édition. Paris: Hermann 1975
6. Engelbert, H.J.: On the Theory of Optimal Stopping Rules for Markov Processes. Theor. Probab. Appl. **18**, n° 2, 304–311 (1973)
7. Engelbert, H.J.: On optimal stopping rules for Markov Processes with continuous time. Theor. Probab. Appl. **19**, n° 2, 278–296 (1974)
8. Fakeev, A.G.: Optimal Stopping Rules for stochastic processes with continuous parameters. Theor. Probab. Appl. **15**, n° 2, 324–331 (1970)
9. Getoor, R.K.: Markov processes: Ray processes and Right processes. Lecture notes in Mathematics n° 440. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
10. Grigelionis, B.I., Shiryaev, A.N.: On Stefan's problem and optimal stopping rules for Markov Processes. Theor. Probab. Appl. **11**, n° 4, 541–558 (1966)
11. Mertens, J.F.: Théorie des processus stochastiques généraux. Application aux Surmartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **22**, 45–68 (1972)
12. Mertens, J.F.: Strongly supermedian functions and optimal stopping. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **26**, 119–139 (1973)
13. Rost, H.: The stopping distribution of a Markov process. Invent. Math., **14**, 1–16 (1971)

Références supplémentaires

Bismut, J.M.: Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt et retournement du temps. A paraître.
Mainguenau, M.A.: Théorie générale des processus et problèmes d'optimalité. Thèse de 3° cycle. Université Paris VI (Mai 1977)

Reçu le 25. 5. 76; en forme révisée le 7. 3. 77