Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
39, 277–299 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung.

II. Die reversiblen Maße sind kanonische Gibbs-Maße

Reinhard Lang

Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld, Universitätsstraße, D-4800 Bielefeld 1, Bundesrepublik Deutschland

Inhalt

1. Fragestellung und Präzisierung der Voraussetzungen 277
   a) Fragestellung 277
   b) Bezeichnungen und Definitionen 278
   c) Voraussetzungen 282
2. Ergebnis, Erläuterung am Spezialfall konstanter Drift 284
3. Ein Hilfssatz über den infinitesimalen Generator 288
   a) Abschätzungen über den Einzugsbereich einer kompakten Menge 288
   b) Eine notwendige Bedingung für Reversibilität 289
4. Beweis des Satzes 293
   a) Definition von f und g 293
   b) Ein Widerspruch zur Annahme $F(\xi, z)>0$ 296
   c) Beweis des Satzes 298
Literatur 299

1. Fragestellung und Präzisierung der Voraussetzungen

a) *Fragestellung*

Dieser Teil der Arbeit ist im wesentlichen unabhängig von Teil I ([5]) lesbar. Sei $\mathscr{M}$ der Raum der Radonschen Zählmaße auf $\mathbb{R}^\nu$, d.h. der Raum der Radon-Maße a auf $\mathbb{R}^\nu$, die nur Werte in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ annehmen. $\mathscr{M}$ sei mit der vagen Topologie versehen, $\mathfrak{B}$ die davon erzeugte σ-Algebra. Zu $a \in \mathscr{M}$ gibt es abzählbar viele nicht notwendig voneinander verschiedene Punkte $a_i \in \mathbb{R}^\nu$ („Partikeln") so, daß für jede Borelmenge $K \subset \mathbb{R}^\nu$ gilt: $a(K) = \#\{i: a_i \in K\}$, Schreibweise: $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$; $\zeta \in a$ bedeute: es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\zeta = a_i$; für $a_i = \zeta \in a$ sei $a \setminus \zeta = \{a_j: j \neq i\}$. Auf $\mathscr{M}^* := \{(\zeta, a) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathscr{M}: \zeta \in a\}$ sei eine Funktion c mit Werten in $\mathbb{R}^\nu$ gegeben. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei Ω_i der Raum der stetigen Funktionen ω_i: $[0, \infty) \to \mathbb{R}^\nu$, versehen mit der üblichen σ-Algebra $\mathfrak{F}_i$, Q_i das Standard-Wienermaß auf $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i)$, $(\Omega, \mathfrak{F}, Q) := \bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathfrak{F}_i, Q_i)$, die Elemente von Ω werden mit $\omega = (\omega_i)_{i \in N}$ bezeichnet.

Sei eine Anfangskonfiguration $a \in \mathscr{M}$ gegeben; die Partikeln $a_i \in a$ mögen sich nach folgenden Gleichungen (G^c) bewegen (der in a_i beginnende Pfad werde mit $x_i(t;\, a, \omega)$ bezeichnet $(t \geqq 0)$, $x(t;\, a, \omega) := \{x_i(t;\, a, \omega) \colon i \in \mathbb{N}\}$):

$$x_i(t;\, a, \omega) = a_i + \frac{1}{2}\int_0^t ds\, c(x_i(s;\, a, \omega),\ x(s;\, a, \omega)) + \omega_i(t)$$

$$(a \in \mathscr{M},\ \omega \in \Omega,\ t \geqq 0,\ i \in \mathbb{N}).$$

In Teil I ist die Frage nach der Lösbarkeit der Gleichungen (G^c) behandelt worden: Wenn Φ ein superstabiles (genügend glattes) Paarpotential auf $\mathbb{R}^\nu$ ist (vgl. [8]) und $c(\zeta, a) := -\sum_{\eta \in a \setminus \zeta} \operatorname{grad} \Phi(\zeta - \eta)$, dann gilt für jedes Gibbs-Maß μ zum Potential Φ: für $\mu \otimes Q$-fast alle $(a, \omega) \in \mathscr{M} \times \Omega$ existiert eine „μ-Lösung" (s. Definition 5 in Abschnitt 1 b) $x(t;\, a, \omega)$ von (G^c); sie ist μ-reversibel, d.h.

$$\mu \otimes Q\{x(0) \in B,\, x(t) \in C\} = \mu \otimes Q\{x(0) \in C,\, x(t) \in B\} \quad \text{für alle } B, C \in \mathfrak{B},\ t \geqq 0.$$

In diesem Teil werden folgende Fragen präzisiert und beantwortet (vgl. Satz 1 (I)):

(1) Sei $c \colon \mathscr{M}^* \to \mathbb{R}^\nu$ eine (genügend glatte) Funktion, (G^c) das zugehörige Gleichungssystem. Es existiere eine reversible μ-Lösung von (G^c) für ein W-Maß μ auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$. Ist c dann notwendigerweise der Gradient eines Potentials?

(2) Sei c durch ein genügend glattes Paarpotential Ψ gegeben, d.h. $c(\zeta, a) = -\sum_{\eta \in a \setminus \zeta} \operatorname{grad} \Psi(\zeta - \eta)$ für $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$. Wie sehen die W-Maße μ auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$ aus, für die gilt: (G^c) besitzt eine reversible μ-Lösung?

b) Bezeichnungen und Definitionen

$\mathfrak{C}$: σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^\nu$,
$\mathfrak{C}_0 := \{K \in \mathfrak{C} \colon K \text{ ist beschränkt}\}$,
$\mathscr{W} := \{K \in \mathfrak{C}_0 \colon K \text{ ist ein Würfel mit Mittelpunkt in } 0\}$,
$|K|$: Seitenlänge von $K \in \mathscr{W}$,
∂K: Rand von $K \in \mathscr{W}$,
$K(d, r)$: Kugel um $d \in \mathbb{R}^\nu$ mit Radius r,
$K_r := K(0, r)$,
$\langle\ ,\ \rangle$: Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\nu}$ $(n \in \mathbb{N})$,
$d(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b|$: Abstand zweier Mengen $A, B \in \mathfrak{C}_0$,
λ: Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^\nu$,
$\log_+(d) := \max\{\log(|d|), 1\}$ für $d \in \mathbb{R}^\nu$.

Für die folgenden Bezeichnungen sei $K \in \mathfrak{C}$, $a = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathscr{M}$, μ sei ein W-Maß auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$, $K^n \times \mathscr{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ sei mit der Produkttopologie versehen.

$X_K\colon \mathscr{M}\to\mathscr{M}$ sei definiert durch $X_K(a):=\{a_i\colon a_i\in K\}$,
$N(K)\colon \mathscr{M}\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ sei definiert durch $N(K)(a):=\#\{i\colon a_i\in K\}$,
$N_\alpha:=N(\Delta_\alpha)$, wobei Δ_α der Würfel mit Seitenlänge 1 und Mittelpunkt $\alpha\in\mathbb{R}^\nu$ ist,
$a_K:=X_K(a)$,
$\mathfrak{B}_K$: σ-Algebra, die erzeugt wird von den Ereignissen $\{N(L)=n\}$ mit $L\in\mathfrak{C}$, $L\subset K$, $n\in\mathbb{N}$,
$\mathfrak{G}_K$: σ-Algebra, die erzeugt wird von den Ereignissen $B\cap\{N(K)=n\}$ mit $B\in\mathfrak{B}_{K^c}$, $n\in\mathbb{N}$,
$\mathscr{M}^*:=\{(\zeta,a)\in\mathbb{R}^\nu\times\mathscr{M}\colon\zeta\in a\}$, versehen mit der von $\mathbb{R}^\nu\times\mathscr{M}$ induzierten Topologie,
$\mathscr{M}^{**}:=\{(\zeta,\eta,a)\in\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu\times\mathscr{M}\colon\zeta\in a,\eta\in a\setminus\zeta\}$, versehen mit der von $\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu\times\mathscr{M}$ induzierten Topologie,
$\mathscr{M}_K^*:=\{(\zeta,a)\in\mathscr{M}^*\colon a\in\mathscr{M}_K\}$,
$\mathscr{M}_K^{**}:=\{(\zeta,\eta,a)\in\mathscr{M}^{**}\colon a\in\mathscr{M}_K\}$,
$\mu^{(K)}$: Einschränkung von μ auf $\mathfrak{B}_K$.

Vereinbarung. Eine Zahl R mit $0<R<\infty$ sei fest gegeben; wenn Funktionen (Potentiale, Drift-Funktionen) von endlicher Reichweite vorausgesetzt werden, ist als Reichweite immer R zu nehmen.

Definition 1 (stabiles Paarpotential): Eine Funktion $\Psi\colon\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ heißt S-Funktion, wenn gilt:

(S 1) $\Psi(-x)=\Psi(x)$ für $x\in\mathbb{R}^\nu$; Ψ hat Reichweite R, d.h. $\Psi(x)=0$ für $|x|\geqq R$.

(S 2) Ψ ist zweimal stetig differenzierbar.

(S 3) Es gibt eine Konstante const. so, daß für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^\nu$ gilt:
$\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\Psi(x_i-x_j)\geqq -\text{const.}\,n.$

Definition 2 (kanonische Gibbs-Maße, s. [2]): Sei Ψ eine S-Funktion, $K\in\mathfrak{C}_0$; $a,b\in\mathscr{M}$, $n\in\mathbb{N}$.

$$U_K(b):=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\zeta,\eta\in b_K\\ \zeta\in b\setminus\eta}}\Psi(\zeta-\eta),$$

$$W_K(b\,|\,a):=\sum_{\substack{\zeta\in b_K\\ \eta\in a_{K^c}}}\Psi(\zeta-\eta),$$

$$E_K(b\,|\,a):=U_K(b)+W_K(b\,|\,a),$$

$$Z_{K,n;a_{K^c}}:=e^{-\lambda(K)}\cdot\frac{1}{n!}\int_{K^n}dx_1\dots dx_n\exp(-E_K(x|a))\quad\text{mit } x=\{x_1,\dots,x_n\}\in\mathscr{M}_K,$$

$$f_{K,n}(b\,|\,a):=Z^{-1}_{K,n,a_{K^c}}\,1_{[N(K)(b)=n]}(b)\exp(-E_K(b\,|\,a)).$$

$\Lambda^{(K)}$: Poissonprozeß auf K mit Intensitätsmaß $\lambda|_K$ (allgemeiner sei $\Lambda_\rho^{(K)}$ der Poissonprozeß auf K mit Intensitätsmaß $\rho|_K$, wenn ρ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^\nu$ ist).

Ein W-Maß μ auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$ heißt *kanonisches Gibbs-Maß* zu Ψ, wenn für alle $K \in \mathfrak{C}_0$ gilt:

$$\mu(F|\mathfrak{G}_K)(a) = \int_F \Lambda^{(K)}(db)\, f_{K, N(K)(a)}(b|a) \quad \mu\text{-f.s.} \qquad \text{für alle } F \in \mathfrak{B}_K.$$

Bemerkung 1. Hinreichend dafür, daß μ kanonisches Gibbs-Maß ist, ist (s. z.B. [7]): es gibt eine Folge $K_n \in \mathfrak{C}_0$ mit $K_n \uparrow \mathbb{R}^\nu$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu(F|\mathfrak{G}_{K_n})(a) = \int_F \Lambda^{(K_n)}(db)\, f_{K_n, N(K_n)(a)}(b|a) \quad \mu\text{-f.s.} \qquad \text{für alle } F \in \mathfrak{B}_{K_n}.$$

Definition 3 (Differenzierbarkeit von Funktionen auf $\mathscr{M}$). Sei $f: \mathscr{M} \to \mathbb{R}$, $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$, $x \in \mathbb{R}^\nu$; die Funktion $x \mapsto f((a \setminus \zeta) \cup x)$ werde mit $f_{a \setminus \zeta}$ bezeichnet (für ein Zählmaß $b \in \mathscr{M}$ und $x \in \mathbb{R}^\nu$ sei das Zählmaß $b \cup x$ definiert durch $(b \cup x)(K) = b(K) + 1_K(x)$ für $K \in \mathfrak{C}_0$); f heißt stetig differenzierbar, wenn gilt:

(a) für alle $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$ ist die Funktion $f_{a \setminus \zeta}: \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ an der Stelle ζ differenzierbar; Schreibweise:

$$D_\zeta f(a) := \left(\frac{\partial f_{a \setminus \zeta}}{\partial x^{(1)}}(\zeta), \ldots, \frac{\partial f_{a \setminus \zeta}}{\partial x^{(\nu)}}(\zeta) \right).$$

(b) $(\zeta, a) \mapsto D_\zeta f(a)$ ist stetig auf $\mathscr{M}^*$.

Entsprechend werde für eine Funktion $c: \mathscr{M}^* \to \mathbb{R}^\nu$ bzw. $c: \mathscr{M}_K^* \to \mathbb{R}^\nu$ die Ableitung $D_\zeta c(\zeta, a)$ erklärt ($(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$ bzw. $(\zeta, a) \in \mathscr{M}_K^*$). Sei $(\zeta, \eta, a) \in \mathscr{M}^{**}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$; die Funktion $(x, y) \mapsto f((a \setminus \zeta \setminus \eta) \cup x \cup y)$ werde mit $f_{a \setminus \zeta \setminus \eta}$ bezeichnet; f heißt zweimal stetig differenzierbar, wenn gilt:

(a) für alle $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$ bzw. $(\zeta, \eta, a) \in \mathscr{M}^{**}$ ist die Funktion $f_{a \setminus \zeta}$ bzw. $f_{a \setminus \zeta \setminus \eta}$ an der Stelle ζ bzw. (ζ, η) zweimal differenzierbar; Schreibweise:

$$D^2_{\zeta\zeta} f(a) := \left(\frac{\partial^2 f_{a \setminus \zeta}}{\partial x^{(k)} \partial x^{(l)}}(\zeta) \right)_{1 \leq k, l \leq \nu},$$

$$D^2_{\zeta\eta} f(a) := \left(\frac{\partial^2 f_{a \setminus \zeta \setminus \eta}}{\partial x^{(k)} \partial y^{(l)}}(\zeta, \eta) \right)_{1 \leq k, l \leq \nu}.$$

(b) $(\zeta, a) \mapsto D^2_{\zeta\zeta} f(a)$ ist auf $\mathscr{M}^*$ bzw. $(\zeta, \eta, a) \mapsto D^2_{\zeta\eta} f(a)$ ist auf $\mathscr{M}^{**}$ stetig.

Sei $f: \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $c: \mathscr{M}^* \to \mathbb{R}^\nu$. Schreibweise: $\Delta_\zeta f(a) := \operatorname{Spur}(D^2_{\zeta\zeta} f(a))$ für $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$,

$$Gf(a) := \frac{1}{2} \sum_{\zeta \in a} \langle c(\zeta, a), D_\zeta f(a) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\zeta \in a} \Delta_\zeta f(a).$$

Beispiel 1. Seien $\rho, \sigma: \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, ρ und $1 - \sigma$ habe kompakten Träger; mit D bzw. D^2 werde der Operator des ein- bzw. zweimaligen Differenzierens auf $\mathbb{R}^\nu$ bezeichnet, $\sigma_{/k}$ sei die k. partielle Ableitung von σ. $f, g: \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(a) := \sum_{\zeta \in a} \rho(\zeta), \qquad g(a) := \prod_{\zeta \in a} \sigma(\zeta).$$

Dann gilt für $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$, $(\zeta, \eta, a) \in \mathscr{M}^{**}$:

$$D_\zeta f(a) = (D\rho)(\zeta), \quad D^2_{\zeta\zeta} f(a) = (D^2\rho)(\zeta), \quad D^2_{\zeta\eta} f(a) = 0,$$
$$D_\zeta g(a) = \prod_{\eta \in a \setminus \zeta} \sigma(\eta) \cdot (D\sigma)(\zeta), \quad D^2_{\zeta\zeta} g(a) = \prod_{\eta \in a \setminus \zeta} \sigma(\eta) \cdot (D^2\sigma)(\zeta),$$
$$D^2_{\zeta\eta} g(a) = \prod_{\xi \in a \setminus \zeta \setminus \eta} \sigma(\xi) (\sigma_{/k}(\zeta) \cdot \sigma_{/l}(\eta))_{1 \leqq k, l \leqq \nu}.$$

Bemerkung 2. Sei $f: \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar; es gebe ein $K \in \mathscr{W}$ so, daß $f = f \circ X_K$; sei $a \in \mathscr{M}$ gegeben, zu jedem $\zeta \in a$ gebe es $h_\zeta \in \mathbb{R}^\nu$ mit $\lim_{|\zeta| \to \infty} |\zeta|^{-1} |h_\zeta| = 0$, $b := \{\zeta + h_\zeta : \zeta \in a\}$. L sei die kleinste Kugel, die alle die $\zeta \in a$ enthält, für die gilt: die Verbindungsstrecke zwischen ζ und $\zeta + h_\zeta$ trifft K. Dann gilt folgende Taylor-entwicklung:

$$f(b) = f(a) + \sum_{\zeta \in a} \langle D_\zeta f(a), h_\zeta \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta \in a \\ \eta \in a}} \langle D^2_{\zeta\eta} f(a) \cdot h_\zeta, h_\eta \rangle + R,$$

wobei $|R| \leqq \frac{1}{2} \max \{ |D^2_{\zeta\eta} f(a) - D^2_{\zeta\eta} f(\{\xi + k_\xi : \xi \in a\})| : k_\xi \in \mathbb{R}^\nu$ für $\xi \in a$ mit

$$|k_\xi| \leqq |h_\xi|;\ \zeta, \eta \in a_L\} \cdot \sum_{\substack{\zeta \in a_L \\ \eta \in a_L}} |\langle h_\zeta, h_\eta \rangle|$$

($D^2_{\zeta\eta} f(\{\xi + k_\xi : \xi \in a\})$ steht für $D^2_{\zeta + k_\zeta, \eta + k_\eta} f(\{\xi + k_\xi : \xi \in a\})$).

Definition 4. Eine Funktion $c: \mathscr{M}^* \to \mathbb{R}^\nu$ heißt D-Funktion, wenn gilt:

(D 1) c ist einmal stetig differenzierbar,

(D 2) für alle $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$ ist $c(\zeta, a) = c(\zeta, a_{K(\zeta, R)})$, d.h. $c(\zeta, a)$ hängt nur von ζ und den Partikeln $\eta \in a$ ab, die von ζ höchstens die Entfernung R haben (vgl. die Vereinbarung).

(D 3) Es gibt eine Konstante $D < \infty$ so, daß $|c(\zeta, a)| \leqq D \cdot N(K(\zeta, R))(a)$ für alle $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$.

Beispiel 2. Sei Ψ eine S-Funktion, dann wird durch $c(\zeta, a) := -\sum_{\eta \in a \setminus \zeta} \operatorname{grad} \Psi(\zeta - \eta)$ eine D-Funktion definiert.

Definition 5. Sei c eine D-Funktion, (G^c) das zugehörige Gleichungssystem; $\mathfrak{F}_t$ $(t \geqq 0)$ sei die kleinste σ-Algebra in $\mathfrak{F}$, bezüglich der alle $\omega_i(s)$ $(s \leqq t, i \in \mathbb{N})$ meßbar sind.

(i) Sei μ ein W-Maß auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$. Eine μ-Lösung $x(t)$ des Gleichungssystems (G^c) ist eine Folge von stochastischen Prozessen $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$; $t \geqq 0$, auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathscr{M} \times \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}, \mu \otimes Q)$ mit Werten in $\mathbb{R}^\nu$, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $x_i(t)$ ist meßbar bezgl. $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$ $(t > 0, i \in \mathbb{N})$

(b) $\mu \otimes Q$-f.s. gilt: für alle $t \geqq 0$ haben die Folgen $\{x_i(t) : i \in \mathbb{N}\}$ keinen endlichen Häufungspunkt

(c) $\mu \otimes Q$-f.s. gilt für $x(t; a, \omega) := \{x_i(t; a, \omega) : i \in \mathbb{N}\}$:

$$x_i(t; a, \omega) = a_i + \frac{1}{2} \int_0^t ds\, c(x_i(s; a, \omega), x(s; a, \omega)) + \omega_i(t),\ i \in \mathbb{N},\ t \geqq 0.$$

(ii) Eine μ-Lösung $x(t)$ des Gleichungssystems (G^c) heißt reversibel, wenn gilt: $\mu\otimes Q\{x(0)\in B,\ x(t)\in C\}=\mu\otimes Q\{x(0)\in C,\ x(t)\in B\}$ für alle $B, C\in\mathfrak{B}$ und $t\geqq 0$.

c) Voraussetzungen

Zur Beantwortung der Fragen (1) und (2) werden nur solche W-Maße μ auf $(\mathscr{M},\mathfrak{B})$ betrachtet, die gewisse Temperiertheitsbedingungen erfüllen:

Definition 6. $\mathscr{T}$ sei die Menge aller W-Maße μ auf $(\mathscr{M},\mathfrak{B})$ mit folgenden Eigenschaften:

($\mathscr{T}$ 1) Bedingungen an die Häufigkeit der Partikeln:

($\mathscr{T}$ 1a) Für $a\in\mathscr{M}$ sei

$$|a|:=\sup_{r\geqq 1} r^{-\nu} N(K_r)(a),$$

$$C(a):=\sup_{j\in\mathbb{Z}^\nu}\frac{1}{\log_+(j)} N(K(j,R+\sqrt{\nu}))(a).$$ Für alle $p\in\mathbb{N}$ ist dann

$$\int\mu(da)|a|^p<\infty,\qquad \int\mu(da)\,C^p(a)<\infty.$$

($\mathscr{T}$ 1b) Für alle $K\in\mathfrak{C}_0$ und alle Zahlen λ mit $0<\lambda<\infty$ gilt

$$\int\mu(da)\,\lambda^{N(K)(a)}<\infty.$$

($\mathscr{T}$ 1c) $\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^\nu}\int\mu(da)\,N_\alpha(a)<\infty.$

($\mathscr{T}$ 2) Lokale Absolutstetigkeit bezüglich des Poissonprozesses Λ:

Für alle $K\in\mathscr{W}$ gilt:

($\mathscr{T}$ 2a) $\mu^{(K)}\ll\Lambda^{(K)}$, die zu $\mu^{(K)}$ gehörige Dichte sei $\pi^{(K)}$; $\pi^{(K)}(x)>0$ für alle $x\in\mathscr{M}_K$.

($\mathscr{T}$ 2b) $\pi^{(K)}$ ist einmal stetig differenzierbar auf $\mathscr{M}_K$.

($\mathscr{T}$ 2c) Es gibt eine Konstante $C_K<\infty$, so daß für alle $(\zeta,x)\in\mathscr{M}_K^*$ gilt:

$$\pi^{(K)}(x)\leqq C_K^{N(K)(x)},\qquad |D_\zeta\pi^{(K)}(x)|\leqq C_K^{N(K)(x)}.$$

Beispiel 3. Sei μ ein W-Maß auf $(\mathscr{M},\mathfrak{B})$, es gebe γ,δ mit $0<\gamma<\infty$, $\delta<\infty$, so daß für alle $K\in\mathfrak{C}_0$ mit Durchmesser $D(K)\geqq 1$ gilt:

$$(R)\quad \mu\{N(K)\geqq n\}\leqq\exp\left[-\gamma\cdot\frac{n^2}{D(K)^\nu}+\delta n\right],\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Eine solche Abschätzung gilt z.B. für alle Gibbs-Maße μ zu superstabilem Paarpotential (vgl. [8], [5] Bemerkung 1). Dann erfüllt μ die Bedingungen ($\mathscr{T}$ 1).

Beispiel 4. Sei Φ eine S-Funktion, die superstabil ist ([8]), $V(dz)$ sei ein auf einem endlichen Intervall $(0,z_0]$ konzentriertes W-Maß; für $z\in(0,z_0]$ sei μ_z ein Gibbs-Maß zum Potential Φ und zur Aktivität z ([5], Definition 2). Dann ist $\mu:=\int V(dz)\,\mu_z\in\mathscr{T}$.

Beweis. Aus [8], Formel (2.35) auf Seite 141 und Corollary 2.8 auf S. 142 folgt, daß es Konstanten $\gamma, \delta > 0$ gibt, so daß gleichmäßig für alle $z \leqq z_0$ die Abschätzung (R) in Beispiel 3 für μ_z gilt, so daß μ nach Beispiel 3 die Bedingungen $(\mathscr{T}\,1)$ erfüllt. Sei $K \in \mathscr{W}$, U_K, W_K wie in Definition 2.

Dann gilt:

$$\pi^{(K)}(x) = \int V(dz) \int \mu_z(da)\, Z^{-1}_{K, z; a_{K^c}}\, z^{N(K)(x)} \exp[-U_K(x) - W_K(x \mid a_{K^c})],$$

wobei $Z_{K, z; a_{K^c}}$ ein Normierungsfaktor $\geqq e^{-\lambda(K)}$ und $x \in \mathscr{M}_K$ ist. Mit $(S\,3)$ folgt dann für $(\zeta, x) \in \mathscr{M}_K^*$:

$$\begin{aligned} &|D_\zeta \pi^{(K)}(x)| \leqq \\ &\quad \leqq e^{\lambda(K)} \int V(dz) \int \mu_z(da)\, z^{N(K)(x)} \cdot \Big(\sum_{\eta \in x \setminus \zeta} |\operatorname{grad} \Phi(\zeta - \eta)| + \sum_{\eta \in a_{K^c}} |\operatorname{grad} \Phi(\zeta - \eta)| \Big) \cdot \\ &\qquad \cdot \exp[\text{const.}\,(N(K)(x) + N(L)(a))], \end{aligned}$$

wobei $L \in \mathscr{W}$ der Würfel mit Seitenlänge $|K| + 2R$ ist. Es gibt also (V ist konzentriert auf $(0, z_0]$) eine Konstante $A_K < \infty$ so, daß für alle $(\zeta, x) \in \mathscr{M}_K^*$ gilt:

$$|D_\zeta \pi^{(K)}(x)| \leqq e^{\lambda(K)} A_K^{N(K)(x)} \int V(dz) \int \mu_z(da) \exp(A_K N(L)(a));$$

weil (R) gleichmäßig für alle $z \leqq z_0$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} &\int V(dz) \sum_{n \geqq 1} \mu_z \{\exp(A_K N(L)) \geqq n\} \\ &\quad \leqq \sum_{n \geqq 1} \exp\left[-\gamma \cdot \frac{(\log n)^2}{A_K^2 D(L)^\nu} + \delta \cdot \frac{\log n}{A_K} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Bemerkung 3 (Bedeutung der Bedingungen $(\mathscr{T}\,1)$). Bedingung $(\mathscr{T}\,1\,\mathrm{b})$ garantiert, daß Größen wie $\int \mu(da) \exp[-\sum_{\substack{\zeta, \eta \in a_K \\ \zeta \in a \setminus \eta}} \Psi(\zeta - \eta)]$ existieren (Ψ sei eine S-Funktion, $K \in \mathfrak{C}_0$). Der Beweis von Lemma 1 beruht auf Lemma 3 (I) (vgl. Bemerkung 4 (I)), zu dessen Beweis $(\mathscr{T}\,1\,\mathrm{a})$ und $(\mathscr{T}\,1\,\mathrm{c})$ benutzt wird; zum Beweis von Lemma 2 würde es genügen, in Lemma 1 anstelle einer Fluktuation von logarithmischer Größenordnung eine Fluktuation etwa der Ordnung $\sqrt{n}$ zu haben. Deshalb kann man die Bedingung $(\mathscr{T}\,1\,\mathrm{a})$ abschwächen zu

$(\mathscr{T}'\,1\,\mathrm{a})$: Sei $C'(a) = \sup_{j \in \mathbb{Z}^\nu} (|j|+1)^{-1/2} N(K(j, R + \sqrt{\nu}))(a)$. Für alle $p \in \mathbb{N}$ ist

$$\int \mu(da) |a|^p < \infty \text{ und } \int \mu(da) |C'(a)|^p < \infty.$$

Wie der Beweis von Lemma 3 (I) zeigt, kann man (zum Beweis von Fluktuationen der Größenordnung $\sqrt{n}$, entsprechend der Aussage von Lemma 1) Bedingung $(\mathscr{T}\,1\,\mathrm{c})$ abschwächen zu

$(\mathscr{T}'\,1\,\mathrm{c})$: Es gibt eine Zahl λ mit $0 < \lambda < \infty$, so daß $\sup_{j \in \mathbb{Z}^\nu} \lambda^{-|j|} \int \mu(da)\, N_j(a) < \infty$.

Bemerkung 4 (Bedeutung der Bedingungen $(\mathscr{T}\,2)$). Bei der Untersuchung von Gleichgewichtszuständen μ erscheint es natürlich, die lokale Absolutstetigkeit von μ bezüglich des Poissonprozesses Λ vorauszusetzen; in [3] geht man z.B. von vornherein von der Klasse der Gibbs-Maße (zu unbekanntem Potential, das noch zu bestimmen ist) aus, denn es gibt allgemeine hinreichende Kriterien dafür, wann ein Maß μ Gibbssch ist (s. [3], S. 70). Die Stabilitätsbedingung ($\mathscr{T}$2c) sorgt unter anderem dafür, daß Größen wie $\max_{\zeta\in x,\, \zeta\in U} |D_\zeta \pi^{(K)}(x)|$ (U sei eine offene Teilmenge von K) integrierbar sind bezüglich $\Lambda^{(K)}$ (vgl. Bedingung (S3) in Definition 1 für Energie-Funktionen U_K: $\exp(-U_K(x)) \leqq \exp(\text{const.}\, N(K)(x))$).

Definition 7. Sei c eine D-Funktion. $\mathscr{R}(c)$ sei die Menge aller Maße $\mu\in\mathscr{T}$, für die gilt: es gibt eine reversible μ-Lösung $x(t)$ von (G^c).

Beispiel 5. Sei Ψ ein superstabiles Paarpotential von endlicher Reichweite, dreimal stetig differenzierbar, $c(\zeta, a) := -\sum_{\eta\in a\setminus\zeta} \operatorname{grad} \Psi(\zeta-\eta)$ für $(\zeta, a)\in\mathscr{M}^*$, $\mu := \int_{(0, z_0]} V(dz)\, \mu_z$ wie in Beispiel 4. Dann gilt $\mu\in\mathscr{R}(c)$:

Weil (R) in Beispiel 3 gleichmäßig für alle $z\in(0, z_0]$ gilt, folgt aus dem Beweis von Lemma 2(I) (die Konstante A dort kann gleichmäßig für alle $z\in(0, z_0]$ gewählt werden) und von Satz 2(I), daß es eine reversible μ-Lösung $x(t)$ von (G^c) gibt. Mit Beispiel 4 folgt die Behauptung.

Bemerkung 5. Sei $\mu\in\mathscr{R}(c)$ mit $\mu\{a: \sup_{d\in\mathbb{R}^\nu} \sup_{r\geqq \log_+(d)} r^{-\nu} N(K(d,r))(a) < \infty\} = 1$. Wegen $\mu\in\mathscr{T}$ kann man Lemma 3(I) auf eine reversible μ-Lösung $x(t)$ von (G^c) anwenden. Wenn c durch eine S-Funktion Ψ gegeben ist ($c(\zeta, a) = -\sum_{\eta\in a\setminus\zeta} \operatorname{grad} \Psi(\zeta-\eta)$), kann man daraus wie im Beweis von Satz 3(I) und Satz 4(I) schließen: Eine reversible μ-Lösung $x(t)$ ist $\mu\otimes Q$-f.s. eindeutig bestimmt, sie ist ein reversibler Markovprozeß auf $(\mathscr{M}\times\Omega, \mathfrak{B}\otimes\mathfrak{F}, \mu\otimes Q)$.

2. Ergebnis, Erläuterung am Spezialfall konstanter Drift

Nach diesen Vorbereitungen kann eine genaue Antwort auf die eingangs gestellten Fragen gegeben werden:

Satz. *Sei c eine D-Funktion, Ψ eine S-Funktion. Dann gilt:*

(1) *Notwendig für $\mathscr{R}(c)\neq\emptyset$ ist: Zu jedem Würfel $K\in\mathscr{W}$ gibt es eine Funktion $U_K: \mathscr{M}_K \to \mathbb{R}$, so daß für alle $(\zeta, x)\in\mathscr{M}_K^*$ mit $d(\zeta, K^c) > R$ gilt: $c(\zeta, x) = -D_\zeta U_K(x)$.*

(2) *Sei c gegeben durch $c(\zeta, a) = -\sum_{\eta\in a\setminus\zeta} \operatorname{grad} \Psi(\zeta-\eta)$. Dann ist jedes Maß $\mu\in\mathscr{R}(c)$ ein kanonisches Gibbs-Maß zum Potential Ψ.*

Im folgenden sollen die Grundgedanken des Beweises dieses Satzes erläutert werden durch eine Gegenüberstellung von Bewegungen ohne Wechselwirkung ($c(\zeta, x)\equiv c\in\mathbb{R}^\nu$) und Bewegungen mit Wechselwirkung ($c(\zeta, x)\not\equiv\text{const.}$). Sei $c = (c^{(1)}, \ldots, c^{(\nu)})\in\mathbb{R}^\nu$, $c(\zeta, x) = c$ für alle $(\zeta, a)\in\mathscr{M}^*$. Dann beschreibt das Gleichungssystem (G^c) eine Bewegung $x(t)$, bei der sich das i. Partikel – unabhängig von den übrigen Partikeln – jeweils nach der Übergangshalbgruppe $P_t(x, dy) = (2\pi t)^{-\nu/2} \exp\left[-\frac{(y-(x+\frac{1}{2}c\,t))^2}{2t}\right] \lambda(dy)$ bewegt $(x, y\in\mathbb{R}^\nu)$.

Folgendes Resultat ist bekannt ([1], Theorem 1, S. 136): Sei $I := \{\pi : \pi$ ist Radon-Maß auf $\mathbb{R}^\nu$ mit $\pi P_t = \pi$ für alle $t \geq 0\}$, $\mathfrak{I} := \{\mu : \mu$ ist W-Maß auf $\mathscr{M}$; es gibt ein $\pi \in I$, so daß μ ein Intensitätsmaß $\leq \pi$ hat$\}$. Für $\pi \in I$ sei Λ_π der Poissonprozeß auf $\mathscr{M}$ mit Intensitätsmaß π. Ein Maß $\mu \in \mathfrak{I}$ ist genau dann invariant unter $x(t)$, wenn μ eine Mischung von Prozessen aus der Menge $\{\Lambda_\pi : \pi \in I\}$ ist. Man rechnet nach, daß für $\pi \in I$ gilt: Λ_π ist genau dann reversibles Maß zu $x(t)$, wenn π reversibles Maß zur Übergangshalbgruppe $P_t(x, dy)$ ist. In unserem Beispiel folgt aus einem Satz von Choquet-Deny, daß die Extremalstrahlen des Kegels I gerade die positiven Vielfachen der Maße aus der Menge

$$\{\sigma_a := e^{\langle a, x\rangle} \lambda(dx) : a \in \mathbb{R}^\nu, (2\pi)^{-\nu/2} \int \lambda(dx)\, e^{-\langle a, x\rangle} \exp[-(x - c/2)^2/2] = 1\}$$

sind. Man rechnet nach: unter den Maßen σ_a ist genau das Maß $\rho(dx) := e^{\langle c, x\rangle} \lambda(dx)$ reversibles Maß zur Übergangshalbgruppe $P_t(x, dy)$, so daß folgt: ein W-Maß μ auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$, dessen Intensitätsmaß $\leq \text{const.}(\lambda + \rho)$ ist, ist genau dann reversibel unter $x(t)$, wenn es eine Mischung von Maßen der Form $\Lambda_{r\rho}$ $(r > 0)$ ist. Dieses Ergebnis folgt nicht aus obigem Satz, weil Λ_ρ nicht die Bedingungen $(\mathscr{T}1)$ in Definition 6 erfüllt. Diese sorgen im allgemeinen Fall mit Wechselwirkung dafür, daß man $\bar{U}(a, \omega) := \#\{j :$ es gibt ein $t \in [0, 1]$ so, daß die Verbindungsstrecke von a_j und $x_j(t; a, \omega)$ K trifft$\}$ (vgl. Bemerkung 2) gut abschätzen kann. Im Sonderfall ohne Wechselwirkung erhält man Abschätzungen von $\bar{U}$ auch unter schwächeren Bedingungen:

Behauptung. *Sei $c \in R^\nu$, $\bar{\mathscr{R}}(c)$ die Menge aller W-Maße auf $(\mathscr{M}, \mathfrak{B})$, die folgende Bedingungen erfüllen:*

$(\bar{\mathscr{R}}1)$ für die Lösung $x(t; a, \omega)$ von (G^c) gilt: $x(t)$ ist ein reversibler Markovprozeß auf $(\mathscr{M} \times \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}, \mu \otimes Q)$.

$(\bar{\mathscr{R}}2)$ Zu jedem $p \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $M_p < \infty$, so daß

$$\int \mu(da)\, N_j^p(a) \leq M_p^{|j|} \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^\nu.$$

$(\bar{\mathscr{R}}3) = (\mathscr{T}2)$ wie in Definition 6.

Dann gilt: Ein Maß $\mu \in \bar{\mathscr{R}}(c)$ ist eine Mischung von Maßen der Form $\Lambda_{r\rho}$ $(r > 0)$.

Beweis. Der Beweis des Satzes (für allgemeine D-Funktionen c) läuft in vier Schritten, die hier für den Sonderfall $\mu \in \bar{\mathscr{R}}(c)$, $c \in \mathbb{R}^\nu$ (mit (a) bezeichnet) angedeutet werden; bei jedem Schritt wird angegeben, was im allgemeinen Fall (mit (b) bezeichnet) noch zu tun ist.

Schritt 1. Sei $K \in \mathscr{W}$ ein fester Würfel.

(a) *Behauptung.* $\bar{U}(a, \omega)$ ist von beliebig hoher Ordnung integrierbar bezüglich $\mu \otimes Q$.

Beweis. Sei $B_i := \{(a, \omega) : \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\omega_i(t)| \geq \frac{1}{2}|a_i| + 1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Es gibt $L \in \mathscr{W}$ so, daß $\bar{U}(a, \omega) \leq N(L)(a) + \sum\limits_{i \geq 1} 1_{B_i}(a, \omega)$. Es genügt also, für alle $p \in \mathbb{N}$ zu zeigen:

$$\int \mu(da)\, Q(d\omega) \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p < \infty} 1_{B_{i_1}}(a, \omega) \ldots 1_{B_{i_p}}(a, \omega) < \infty;$$

dies kann abgeschätzt werden durch

$$2\int \mu(da) \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p < \infty} \exp\left[-\tfrac{1}{8}(|a_{i_1}|^2 + \cdots + |a_{i_p}|^2)\right]$$

$$\leqq 2\int \mu(da) \sum_{n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_p < \infty} 1_{\Delta_{n_1}}(a_{i_1}) \ldots 1_{\Delta_{n_p}}(a_{i_p}) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\tfrac{1}{8}(|a_{i_1}|^2 + \cdots + |a_{i_p}|^2)\right],$$

wenn mit Δ_j der Würfel um $j \in \mathbb{Z}^\nu$ mit Seitenlänge 1 bezeichnet werde. Dies kann weiter abgeschätzt werden:

$$\leqq 2\int \mu(da) \sum_{n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{Z}^\nu} N_{n_1}(a) \ldots N_{n_p}(a) \exp\left[-\tfrac{1}{8}((n_1^2+1) + \cdots + (n_p^2+1))\right],$$

woraus die Behauptung wegen ($\bar{\mathscr{R}}$2) folgt.

(b) Die Abschätzungen im allgemeinen Fall (Lemma 1, Lemma 2) beruhen auf der Aussage von Lemma 3 (I) über die logarithmische Fluktuation einer stationären μ-Lösung von (G^c), die mit Hilfe einer Idee von Lanford [4] bewiesen wird.

Schritt 2. Die folgenden Überlegungen (im einzelnen: Lemma 3), die auf Abschätzungen über den „Einzugsbereich" eines Würfels im Lauf der Zeit [0, 1] beruhen (Schritt 1), werden gemeinsam für (*a*) und (*b*) durchgeführt: Sei $K \in \mathscr{W}$ fest; f, g seien (genügend glatte) Funktionen auf $\mathscr{M}$, deren Werte nur von den Partikeln in K abhängen (d.h.: $f = f \circ X_K$, $g = g \circ X_K$). Dann gilt (G wie in Definition 3):

$$\int \mu(da)\, f(a)\, G\, g(a) = \int \mu(da)\, g(a)\, G f(a).$$

Zum Beweis wird

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int \mu(da)\, Q(d\omega)\, f(a)\left[g(x(t; a, \omega)) - g(a)\right] = \int \mu(da)\, f(a)\, G\, g(a)$$

gezeigt, indem man g nach Bemerkung 2 in eine Taylorreihe entwickelt; die Anzahl der Partikeln, über die dabei summiert wird, ist nach oben beschränkt durch $\bar{U}(a, \omega)$. Die Behauptung folgt aus Abschätzungen, die auf der Aussage von Schritt 1 beruhen, und mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes.

Schritt 3 (vgl. den Beweis des Satzes 1 (I)). Durch geeignete Wahl von f und g wird aus dem in Schritt 2 Gezeigten gefolgert: $\pi^{(K)}(x)\, c(\zeta, x) - D_\zeta\, \pi^{(K)}(x) = 0$ für alle $(\zeta, x) \in \mathscr{M}_K^*$ mit $d(\zeta, K^c) > R$. Beweisskizze im allgemeinen Fall ((*a*) ist nicht einfacher): Angenommen, es gibt einen Punkt $(\xi, z) \in \mathscr{M}_K^*$ mit $d(\xi, K^c) > R$, so daß $\pi^{(K)}(z)\, c(\xi, z) - D_\xi\, \pi^{(K)}(z) \neq 0$. U_1 sei eine offene Kugel um ξ so, daß $d(U_1, K^c) > R$ ist. Die Funktionen f, g können in Abhängigkeit von (ξ, z) folgendermaßen gewählt werden:

(i) Aus Schritt 2 kann gefolgert werden:

$$\int \mu(da)\, f(a)\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta\in a\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta\, g(a)\rangle + \Delta_\zeta\, g(a)]$$
$$= \int \mu(da)\, g(a)\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta\in a\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta\, f(a)\rangle + \Delta_\zeta\, f(a)].$$

(ii) Aus der Reichweitenbedingung (D_2) und $d(U_1, K^c) > R$ folgt: die Integranden in (i) hängen nur von a_K ab; aus $(\mathscr{T}2)$ und (i) ergibt sich:

$$\int \Lambda^{(k)}(dx)\, \pi^{(K)}(x)\, f(x)\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta\in x\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, x), D_\zeta\, g(x)\rangle + \Delta_\zeta\, g(x)]$$
$$= \int \Lambda^{(K)}(dx)\, \pi^{(K)}(x)\, g(x)\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta\in x\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, x), D_\zeta\, f(x)\rangle + \Delta_\zeta\, f(x)].$$

(iii) Durch partielle Integration in (ii) kann ein Widerspruch gefolgert werden; dazu sind f, g so konstruiert, daß für $f(x) \neq 0$ genau ein ausgezeichnetes Partikel $\zeta\in x$ mit $\zeta\in U_1$ existiert und daß die Integration in (ii) im wesentlichen nur über die Konfigurationen $x\in\mathscr{M}_K$ erstreckt zu werden braucht, die die gleiche Partikelanzahl wie z haben (bis auf einen kleinen Fehler, den die Partikeln verursachen, die nahe am Rand von K liegen); dieser Schluß ist durch den indirekten Ansatz möglich.

Schritt 4. Seien $K, L\in\mathscr{W}$, $|L| \geqq |K| + 2R$. Man kann nachrechnen, daß für alle $B\in\mathfrak{B}_K$ μ-f.s. gilt:

$$\mu(B\,|\,X_{L-K}, N(K))(a) = \{\mu(\{x\colon N(K)(x) = N(K)(a)\}\,|\,X_{L-K})\}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \int_B \Lambda^{(K)}(dx)\, 1_{\{N(K)(x) = N(K)(a)\}}(x)\, \frac{\pi^{(L)}(x\, a_{L-K})}{\pi^{(L-K)}(a_{L-K})}.$$

(a) Wenn c konstant ist, erhält man mit Schritt 3 für alle $(\zeta, x)\in\mathscr{M}_K^*$, $a\in\mathscr{M}$:

(1) $c = D_\zeta(\log \pi^{(L)}(x\, a_{L-K}))$, also

$$\frac{\pi^{(L)}(x\, a_{L-K})}{\pi^{(L-K)}(a_{L-K})} = \bar{Z}_{K, L; N(K)(x), a_{L-K}} \cdot \exp\Big(\sum_{\zeta\in x} \langle c, \zeta\rangle\Big)$$

mit einem Normierungsfaktor $\bar{Z}_{K, L; N(K)(x), a_{L-K}}$.

In Abschnitt 4c wird gezeigt, daß für μ-fast alle $a\in\mathscr{M}$ der Grenzwert $\lim_{L\uparrow\mathbb{R}^\nu} \bar{Z}_{K, L; N(K)(x), a_{L-K}}$ existiert, also nur von $K, N(K)(x), a_{K^c}$ abhängt. Daraus kann dann gefolgert werden (im einzelnen s. Abschnitt 4c): es gibt einen Normierungsfaktor $Z_{K, N(K)(a), a_{K^c}}$, so daß für alle $B\in\mathfrak{B}_K$ gilt:

$$\mu\{B\,|\,\mathfrak{G}_K\}(a) = \int_B \Lambda_\rho^{(K)}(dx)\, Z^{-1}_{K, N(K)(a), a_{K^c}}\, 1_{\{N(K)(x) = N(K)(a)\}}(x) \cdot 1,$$

woraus mit Definition 2 und Bemerkung 1 folgt, daß μ ein kanonisches Gibbs-Maß zum Potential 0 ist (bezüglich Λ_ρ). Es ist bekannt (siehe z.B. [2] oder [6]), daß μ dann eine Mischung von Prozessen $\Lambda_{r\rho}$ $(r>0)$ ist; damit ist die Behauptung gezeigt.

(b) Anstelle (1) in (a) erhält man im allgemeinen Fall aus Schritt 3:

$$D_\zeta(\log \pi^{(K)}(x\, a_{L-K})) = c(\zeta, x\, a_{L-K})$$
$$= D_\zeta\Big[-\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\eta,\,\xi\in x\\ \eta\in x\setminus\xi}} \Psi(\eta-\xi) - \sum_{\substack{\eta\in x\\ \xi\in a_{L-K}}} \Psi(\eta-\xi)\Big]$$

für alle $(\zeta, x)\in\mathscr{M}_K^*$ und $a\in\mathscr{M}$.

Wie in (a) skizziert, folgt die zweite Aussage des Satzes.

3. Ein Hilfssatz über den infinitesimalen Generator

a) Abschätzungen über den Einzugsbereich einer kompakten Menge

In Teil I ist gezeigt worden (Lemma 3 (I), Bemerkung 5):

Lemma 1. *Sei c eine D-Funktion, $\mu\in\mathscr{R}(c)$, $x(t)$ eine μ-Lösung von (G^c). Dann existieren alle Momente (bezüglich $\mu\otimes Q$) der Variablen*

$$S(a,\omega) := \sup_i \max_{0\le t\le 1} \frac{1}{\log_+(a_i)} |x_i(t;a,\omega)-a_i|,$$

$$T(a,\omega) := \sup_i \max_{0\le t\le 1} \frac{|\omega_i(t)|}{\log_+(a_i)}.$$

Definition 7. Sei c eine D-Funktion, $\mu\in\mathscr{R}(c)$, $x(t)$ eine μ-Lösung von (G^c). Seien $L\in\mathfrak{C}_0$, $a\in\mathscr{M}$, $\omega\in\Omega$. $L'(a,\omega)$ sei die kleinste Kugel, die alle die $a_j\in a$ enthält, für die gilt: es gibt ein $a_i\in L$ so, daß $\inf_{0\le t\le 1} |x_i(t;a,\omega)-x_j(t;a,\omega)|\le R$, d.h. daß das in $a_i\in L$ startende Partikel mit dem in a_j startenden Partikel im Lauf der Zeit $t\in[0,1]$ in Wechselwirkung treten kann. $L'(a,\omega)$ ist also der „Einzugsbereich" der Menge L im Zeitintervall $[0,1]$.

Lemma 2. *Sei c eine D-Funktion, $\mu\in\mathscr{R}(c)$, $K\in\mathscr{W}$; $x(t)$ sei eine fest gewählte reversible μ-Lösung, der Einzugsbereich einer Menge werde bezüglich $x(t)$ betrachtet (Definition 7): dann gilt; Zu $(a,\omega)\in\mathscr{M}\times\Omega$ gibt es Kugeln $\bar K(a,\omega)$ bzw. $\bar{\bar K}(a,\omega)$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $\bar S(a,\omega)$ bzw. $\bar{\bar S}(a,\omega)$ mit folgenden Eigenschaften;*

(i) *Für $a_i\notin\bar K(a,\omega)$ und alle $t\in[0,1]$ gilt; die Verbindungsstrecke zwischen a_i und $x_i(t;a,\omega)$ trifft K nicht*

(ii) $\bar K'(a,\omega)\subset\bar{\bar K}(a,\omega)$

(iii) *Alle Momente (bezüglich $\mu\otimes Q$) der folgenden Variablen existieren:*
$V(a) := N(K)(a)$,
$\bar V(a,\omega) := N(\bar K(a,\omega))(a)$, $\bar{\bar V}(a,\omega) := N(\bar{\bar K}(a,\omega))(a)$,
$\bar S(a,\omega)$, $\bar{\bar S}(a,\omega)$
$((a,\omega)\in\mathscr{M}\times\Omega)$.

Beweis. Es wird eine Variable $\bar{S}(a,\omega)$ angegeben, so daß $\bar{S}$ von beliebig hoher Ordnung bezüglich $\mu\otimes Q$ integrierbar ist und (i) und $K'(a,\omega)\subset K_{\bar{S}(a,\omega)}$ gelten; eine ganz ähnliche Rechnung (die weggelassen wird) liefert eine von beliebig hoher Ordnung integrierbare Variable $\bar{\bar{S}}$ mit $K'_{\bar{S}}\subset K_{\bar{\bar{S}}}$.

Nach Lemma 1 gibt es eine Konstante λ so, daß alle Partikeln $a_i\in a\in\mathcal{M}$, die in K starten, im Zeitintervall $[0,1]$ innerhalb der Kugel mit Radius $\lambda S(a,\omega)$ bleiben (ohne Einschränkung kann $S\geqq 1$ angenommen werden). Setze

$$\bar{S}(a,\omega):=\max\{r\in\mathbb{R}: r-S(a,\omega)\sqrt{r}\leqq\lambda S(a,\omega)+R\},$$

also

$$(\sqrt{\bar{S}}-\tfrac{1}{2}S)^2\leqq\lambda S+\tfrac{1}{4}S^2+R,$$
$$\bar{S}\leqq[(\lambda S+\tfrac{1}{4}S^2+R)^{1/2}+\tfrac{1}{2}S]^2\in\mathcal{L}^p(\mu\otimes Q)\qquad\text{für alle } p\in\mathbb{N} \text{ nach Lemma 1.}$$

Aus $a_i\notin K_{\bar{S}}$ folgt:

$$\begin{aligned}\min_{0\leqq t\leqq 1}|x_i(t;a,\omega)|&\geqq|a_i|-\max_{0\leqq t\leqq 1}|x_i(t;a,\omega)-a_i|\geqq|a_i|-S(a,\omega)\log_+(a_i)\\&\geqq|a_i|-S(a,\omega)\sqrt{|a_i|}\geqq\lambda S(a,\omega)+R\end{aligned}$$

nach Definition von $\bar{S}(a,\omega)$; daraus ergeben sich Behauptung (i) und die Beziehung $K'(a,\omega)\subset K_{\bar{S}(a,\omega)}$, (iii) folgt aus $\bar{V}\leqq|a|\bar{S}^{\nu}$, $\bar{\bar{V}}\leqq|a|\bar{\bar{S}}^{\nu}$ und ($\mathcal{T}$ 1a).

b) *Eine notwendige Bedingung für Reversibilität*

Definition 8. Sei $K\in\mathfrak{C}_0$; $\mathcal{D}_K$ sei die Menge aller Funktionen $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f=f\circ X_K$,

(ii) f ist zweimal stetig differenzierbar.

(iii) $\|f\|<\infty$, wobei $\|f\|$ definiert ist als die kleinste Zahl mit $|f(\emptyset)|\leqq\|f\|$ ($\emptyset$ sei die Konfiguration, die keine Partikeln enthält), $\max\{|f(a)|, |D_\zeta f(a)|, |D^2_{\zeta\zeta}f(a)|, |D^2_{\zeta\eta}f(a)|\}\leqq\|f\|^{N(K)(a)}$ für alle $(\zeta,a)\in\mathcal{M}^*$ und $(\zeta,\eta,a)\in\mathcal{M}^{**}$.

Lemma 3. *Sei c eine D-Funktion, $\mu\in\mathcal{R}(c)$, $K\in\mathcal{W}$, G wie in Definition 3.*

Dann gilt für alle $f,g\in\mathcal{D}_K$:

$$\int\mu(da)\,f(a)\,G\,g(a)=\int\mu(da)\,g(a)\,G\,f(a).$$

Beweis. Mit E_μ bzw. E_Q werde der Erwartungswert bezüglich μ bzw. Q bezeichnet; $x(t)$ sei eine reversible μ-Lösung; die Bezeichnungen aus Definition 7, Lemma 1 und Lemma 2 (K', $\bar{K}$ etc.) werden übernommen. Es genügt, zu zeigen:

(a) $\displaystyle\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[E_Q f(x(t;a))-f(a)]=Gf(a)\quad\mu\text{-f.s.},$

(b) es gibt eine Funktion $h\in\mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$|g(a)|\max_{0\leqq t\leqq 1}\frac{1}{t}|E_Q f(x(t;a))-f(a)|\leqq h(a)\quad\mu\text{-f.s.}$$

Für $a=\{a_1, a_2, \ldots\}$ und $\zeta=a_i$ werde definiert:

$$\zeta(t; a, \omega) := x_i(t; a, \omega); \quad \omega_\zeta(t) := \omega_i(t),$$

$$h_\zeta(t; a, \omega) := \frac{1}{2}\int_0^t ds\, c(\zeta(s; a, \omega), x(s; a, \omega)), \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Wenn bei festem t, a, ω gearbeitet wird, werden im folgenden (ebenso wie bei $\omega_\zeta(t)$ die Variable t) die Argumente weggelassen. Seien $a\in\mathscr{M}$ und eine Funktion $\rho: \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ gegeben; wenn der Zusammenhang klar ist, wird einfach $\sum_\zeta \rho(\zeta)$ anstelle $\sum_{\zeta\in a} \rho(\zeta)$ geschrieben.

Nach Bemerkung 2 gilt folgende Taylorentwicklung:

$$f(x(t; a, \omega)) = f(a) + S_1 + S_2 + R(t)$$

mit

$$S_1 := \sum_{\zeta\in K} \left\{ \tfrac{1}{2} t \langle D_\zeta f(a), c(\zeta, a)\rangle + \tfrac{1}{2} \langle D_\zeta f(a), \int_0^t ds\, [c(\zeta(s), x(s)) - c(\zeta, a)]\rangle + \langle D_\zeta f(a), \omega_\zeta\rangle \right\},$$

$$S_2 := \sum_{\zeta, \eta\in K} \{\tfrac{1}{2} \langle D^2_{\zeta\eta} f(a)\, h_\zeta, h_\eta\rangle + \langle D^2_{\zeta\eta} f(a)\, h_\zeta, \omega_\eta\rangle + \tfrac{1}{2} \langle D^2_{\zeta\eta} f(a)\, \omega_\zeta, \omega_\eta\rangle\}$$

und $|R(t)| \leqq R_1 + R_2 + R_3$, wobei die R_i folgendermaßen definiert sind:

$$M(t) := \max\{|D^2_{\zeta\eta} f(b) - D^2_{\zeta\eta} f(a)| : \zeta, \eta\in \bar{K}(a, \omega);\ b\in\mathscr{M} \text{ ist von der Form } \{\xi + k_\xi : \xi\in a_{\bar{K}(a,\omega)}\} \text{ mit } |k_\xi| \leqq |h_\xi| + |\omega_\xi| \quad \text{für alle } \xi\in a_{\bar{K}(a,\omega)}\},$$

$$R_1(t) := M(t) \sum_{\zeta, \eta\in\bar{K}(a, \omega)} |\langle h_\zeta, h_\eta\rangle|,$$

$$R_2(t) := M(t) \sum_{\zeta, \eta\in\bar{K}(a, \omega)} |\langle h_\zeta, \omega_\eta\rangle|,$$

$$R_3(t) := M(t) \sum_{\zeta, \eta\in\bar{K}(a, \omega)} |\langle \omega_\zeta, \omega_\eta\rangle|.$$

Die Anzahl der Summanden in S_1 bzw. S_2 ist gleich $V(a)$ bzw. $V^2(a)$, weil $f(a)$ nur von den Punkten $\zeta\in a_K$ abhängt; weil $V(a)$ nicht von ω abhängt, kann man S_1, S_2 wie üblich behandeln. M und die Summen in den Restgliedern hängen von $\bar{K}(a, \omega)$ ab, so daß man hier genauer mit Hilfe von Lemma 2 abschätzen muß: Setze $\bar{M}(t) := g(a)\, M(t)$; $\bar{R}_i(t)$ sei analog zu $R_i(t)$ definiert, indem man $M(t)$ durch $\bar{M}(t)$ ersetzt $(1 \leqq i \leqq 3)$.

Vorbemerkung. Es ist $\max_{0\leqq t\leqq 1} \bar{M}(t) \in \mathscr{L}^p(\mu\otimes Q)$ für alle $p\in\mathbb{N}$ (woraus mit dem Satz von Lebesgue auch $\lim_{t\downarrow 0} E_Q \max_{0\leqq s\leqq t} \bar{M}(s) = 0$ μ-f.s. folgt), weil für $f\in\mathscr{D}_K$ gilt:

$$|D^2_{\zeta\eta} f(a)| \leqq \|f\|^{N(K)(a)} \quad \text{bzw.} \quad |D^2_{\zeta\zeta} f(a)| \leqq \|f\|^{N(K)(a)}$$

für alle $(\zeta, \eta, a) \in \mathscr{M}^{**}$ bzw. $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^{*}$, also

$$\max_{0 \leqq t \leqq 1} |\overline{M}(t)| \leqq 2 \, \|g\|^{N(K)(a)+1} \, \|f\|^{N(K)(a)} \, \bar{V}^2(a, \omega),$$

so daß aus ($\mathscr{T}$ 1 b) und Lemma 2 die Behauptung folgt.

Es ist zu zeigen:

(a) $E_\mu \left(\max_{0 \leqq t \leqq 1} \frac{1}{t} E_Q \bar{R}_1(t) \right) < \infty,$

(b) $E_\mu \left(\max_{0 \leqq t \leqq 1} \frac{1}{t} E_Q \bar{R}_2(t) \right) < \infty,$

(c) $E_\mu \left(\max_{0 \leqq t \leqq 1} \frac{1}{t} E_Q \bar{R}_3(t) \right) < \infty.$

Die weiteren erforderlichen Abschätzungen können dann analog zu den folgenden Abschätzungen (a), (b), (c) durchgeführt werden:

(a) $|\langle h_\zeta, h_\eta \rangle| \leqq t^2 \left(\max_{0 \leqq s \leqq t} |c(\zeta(s), x(s))| \right) \left(\max_{0 \leqq s \leqq t} |c(\eta(s), x(s))| \right);$

für $\zeta \in \bar{K}$ folgt wegen Lemma 2 (ii) $(\bar{K}' \subset \bar{\bar{K}})$ und Definition 4, (D 3): für alle $s \leqq 1$ ist $|c(\zeta(s), x(s))| \leqq D \cdot \bar{\bar{V}}(a, \omega)$. Daraus folgt: $\sum_{\zeta, \eta \in \bar{K}} |\langle h_\zeta, h_\eta \rangle| \leqq t^2 \, \bar{V}^2(a, \omega) \cdot D^2 \cdot \bar{\bar{V}}^2(a, \omega)$, so daß zusammen mit der Vorbemerkung aus Lemma 2 die Behauptung (a) folgt.

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad |\langle h_\zeta, \omega_\eta \rangle| &\leqq t \cdot \left(\max_{0 \leqq s \leqq t} |c(\zeta(s), x(s))| \right) \left(\max_{0 \leqq s \leqq t} |\omega_\eta(s)| \right) \\
&\leqq t \cdot D \bar{\bar{V}}(a, \omega) \max_{0 \leqq t \leqq 1} |\omega_\eta(t)| \qquad (\zeta \in a_{\bar{K}}) \\
&\leqq t \cdot D \bar{\bar{V}}(a, \omega) \cdot T(a, \omega) \log_+ (\eta) \qquad \text{(Lemma 1)} \\
&\leqq t \cdot D \bar{\bar{V}}(a, \omega) \cdot T(a, \omega) \cdot \bar{S}(a, \omega),
\end{aligned}$$

weil $\eta \in \bar{K}$ und mit den Bezeichnungen von Lemma 2 $\bar{S}$ der Radius von $\bar{K}$ ist.

Also ist $\sum_{\zeta, \eta \in \bar{K}} |\langle h_\zeta, \omega_\eta \rangle| \leqq t \cdot \bar{V}^2 \cdot D \bar{\bar{V}} \cdot T \cdot \bar{S}$, so daß wie in (a) die Behauptung (b) folgt.

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad & E_\mu \left\{ \max_{0 \leqq t \leqq 1} \frac{1}{t} E_Q \{ \overline{M}(t) \sum_{\zeta, \eta \in \bar{K}(a, \omega)} |\langle \omega_\zeta(t), \omega_\eta(t) \rangle| \} \right\} \\
&\leqq E_\mu \left\{ (E_Q (\max_{0 \leqq t \leqq 1} \overline{M}(t)^2))^{1/2} \cdot \max_{0 \leqq t \leqq 1} \left\{ E_Q \left(\sum_{\zeta, \eta \in \bar{K}(a, \omega)} \left| \left\langle \frac{\omega_\zeta(t)}{\sqrt{t}}, \frac{\omega_\eta(t)}{\sqrt{t}} \right\rangle \right| \right)^2 \right\}^{1/2} \right\}.
\end{aligned}$$

Man kann nicht sofort schließen, daß

$$E_Q \left(\sum_{\zeta, \eta \in \bar{K}(a, \omega)} \left| \left\langle \frac{\omega_\zeta(t)}{\sqrt{t}}, \frac{\omega_\eta(t)}{\sqrt{t}} \right\rangle \right| \right)^2$$

von t unabhängig ist, weil der Summationsbereich $(\zeta, \eta \in \bar{K}(a, \omega))$ von ω abhängt; es sind weitere Abschätzungen erforderlich. Es genügt (Cauchy-Schwarzsche

Ungleichung), zu zeigen:

$$E_\mu\left\{\max_{0\le t\le 1} E_Q\left(\sum_{\zeta,\eta\in\bar K(a,\omega)}\left|\left\langle\frac{\omega_\zeta(t)}{\sqrt{t}},\frac{\omega_\eta(t)}{\sqrt{t}}\right\rangle\right|\right)^2\right\}<\infty.$$

Dazu kann abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
&E_Q\left(\sum_{\zeta,\eta\in\bar K}\left|\left\langle\frac{\omega_\zeta(t)}{\sqrt{t}},\frac{\omega_\eta(t)}{\sqrt{t}}\right\rangle\right|\right)^2\leqq\\
&\quad\leqq E_Q\left(\bar V^2(a,\omega)\sum_{\zeta,\eta\in a}1_{\bar K(a,\omega)}(\zeta)\,1_{\bar K(a,\omega)}(\eta)\left|\left\langle\frac{\omega_\zeta(t)}{\sqrt{t}},\frac{\omega_\eta(t)}{\sqrt{t}}\right\rangle\right|^2\right)\\
&\quad\leqq\sum_{\zeta,\eta\in a}\{\textstyle\int Q(d\omega)\,1_{\bar K(a,\omega)}(\zeta)\,1_{\bar K(a,\omega)}(\eta)\,\bar V^4(a,\omega)\}^{1/2}\cdot\\
&\qquad\cdot\max(\{E_Q|\langle\omega_1(1),\omega_1(1)\rangle|^4\}^{1/2},\{E_Q|\langle\omega_1(1),\omega_2(1)\rangle|^4\}^{1/2}),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Faktor unabhängig von t, a, ζ und η ist.

Es bleibt zu zeigen:

$$\int\mu(da)\sum_{\zeta,\eta\in a}\{\int_{\substack{\bar K(a,\omega)\ni\zeta\\ \bar K(a,\omega)\ni\eta}}Q(d\omega)\,\bar V^4(a,\omega)\}^{1/4}<\infty.$$

Zu jedem $i\in\mathbb{N}$ gibt es eine meßbare Abbildung $t_i\colon\mathscr{M}\to\mathbb{R}^\nu\cup\{\infty\}$ so, daß für alle $K\in\mathfrak{C}_0$ und $a\in\mathscr{M}$ gilt:

$N(K)(a)=\#\{i\colon t_i(a)\in K\}$ (numeriere die Partikeln in a z.B. nach Polarkoordinaten durch und setze $t_i(a)=\infty$, falls $N(\mathbb{R}^\nu)(a)<i$).

Es ist zu zeigen:

$$\sum_{i,j\ge 1}\int\mu(da)\{\int_{\substack{\bar K(a,\omega)\ni t_i(a)\\ \bar K(a,\omega)\ni t_j(a)}}Q(d\omega)\,\bar V^4(a,\omega)\}^{1/2}<\infty;$$

mit zweimaliger Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j\ge 1}\int\mu(da)\{\int_{\substack{\bar K(a,\omega)\ni t_i(a)\\ \bar K(a,\omega)\ni t_j(a)}}Q(d\omega)\,\bar V^4(a,\omega)\}^{1/2}\\
&\quad\leqq 2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\{\iint_{\substack{\bar K(a,\omega)\ni t_i(a)\\ \bar K(a,\omega)\ni t_j(a)}}\mu(da)\,Q(d\omega)\,\bar V^4(a,\omega)\}^{1/2}\\
&\quad\leqq 2\sum_{n\ge 1}n\{\iint_{\bar V(a,\omega)\ge n}\mu(da)\,Q(d\omega)\,\bar V^4(a,\omega)\}^{1/2}\\
&\quad\leqq 2\sum_{n\ge 1}n(\mu\otimes Q\{\bar V\geqq n\})^{1/4}\cdot(\textstyle\iint\mu(da)\,Q(d\omega)\,\bar V^8(a,\omega))^{1/4};
\end{aligned}$$

nach Lemma 2 ist $\sum_{n\ge 1}\mu\otimes Q\{\bar V^{10}\geqq n\}<\infty$; weil $(\mu\otimes Q\{\bar V^{10}\geqq n\})_{n=1,2,\dots}$ eine fallende Folge ist, gilt $\lim_{n\to\infty}n\;\mu\otimes Q\{\bar V^{10}\geqq n\}=0$, insbesondere $\mu\otimes Q\{\bar V^{10}\geqq n\}\leqq\frac{1}{n}$ für fast alle n, also auch

$$\mu\otimes Q\{\bar{V}\geqq n\}=\mu\otimes Q\{\bar{V}^{10}\geqq n^{10}\}\leqq\frac{1}{n^{10}}\qquad\text{für fast alle } n.$$

Deshalb folgt aus

$$\sum_{n\geqq 1} n(\mu\otimes Q\{\bar{V}\geqq n\})^{1/4}\leqq\text{const.}\sum_{n\geqq 1} n\cdot\left(\frac{1}{n^{10}}\right)^{1/4}=\text{const.}\sum_{n\geqq 1}\frac{1}{n^{3/2}}<\infty$$

die Behauptung. Damit ist Lemma 3 gezeigt.

4. Beweis des Satzes

Es soll gezeigt werden: Sei c eine D-Funktion, $\mu\in\mathscr{R}(c)$. Dann gilt für alle $K\in\mathscr{W}$, $(\zeta,x)\in\mathscr{M}_K^*$ mit $d(\zeta,K^c)>R$:

(1) $c(\zeta,x)\,\pi^{(K)}(x)-D_\zeta\,\pi^{(K)}(x)=0.$

Wegen der Stetigkeit von $c,\pi^{(K)}$ und $(\zeta,x)\to D_\zeta\,\pi^{(K)}(x)$ genügt es, (1) für alle $(\zeta,x)\in\mathscr{M}_K^*$ zu zeigen, für die gilt: $N(\partial K)(x)=0$; wenn $\zeta\in x,\eta\in x\setminus\zeta$, dann ist $\eta\neq\zeta$.

Sei $(\xi,z)\in\mathscr{M}_K^*$ ein fester Punkt mit $d(\xi,K^c)>R$, $N(\partial K)(z)=0$, $z=\{z_1,\dots,z_n\}$ mit $z_i\neq z_j$ für $i\neq j$, $z_1=\xi$. Sei l eine feste natürliche Zahl mit $1\leqq l\leqq\nu$, $F:\mathscr{M}_K^*\to\mathbb{R}$ sei die l. Komponente der Funktion $(\zeta,x)\mapsto c(\zeta,x)\,\pi^{(K)}(x)-D_\zeta\,\pi^{(K)}(x)$. Die Annahme $F(\xi,z)>\varepsilon>0$ wird zu einem Widerspruch geführt:

a) Definition von f und g

Funktionen von $\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}$ werden mit ρ,σ bzw. τ,β bezeichnet, daraus werden Funktionen auf $\mathscr{M}$ konstruiert, die mit f,g,h bezeichnet werden.

U_1 sei eine offene Kugel um ξ mit

(2) $d(U_1,K^c)>R,$

(3) $\zeta\notin U_1,\quad$ wenn $\zeta\in z\setminus\xi.$

Eine Umgebung von z (in der vagen Topologie auf $\mathscr{M}_K$) werde definiert durch

(4) $U:=\{x\in\mathscr{M}_K: N(K)(x)=n,\ \max_{\zeta\in x_{U_1}} F(\zeta,x)>\varepsilon\}.$

Es gibt zweimal stetig differenzierbare Funktionen $\rho_1,\dots,\rho_n$ und $\bar{\rho}_1,\dots,\bar{\rho}_n$ auf $\mathbb{R}^\nu$ mit folgenden Eigenschaften ($1\leqq i,j\leqq n$):

(5a) $0\leqq\rho_i\leqq 1,\ 0\leqq\bar{\rho}_i\leqq 1,\ \rho_i(z_i)=1,$

(5b) wenn $\rho_i(x)>0$, dann ist $\bar{\rho}_i(x)=1\quad(x\in\mathbb{R}^\nu),$

(5c) $\operatorname{supp}\bar{\rho}_i\subset\mathring{K}$; $\operatorname{supp}\bar{\rho}_1\subset U_1$, $\operatorname{supp}\bar{\rho}_i\cap U_1=\emptyset\quad$ für $i\neq 1,$

(5d) $\operatorname{supp}\bar{\rho}_i\cap\operatorname{supp}\bar{\rho}_j=\emptyset\quad(i\neq j),$

(5e) $\left\{x\in\mathscr{M}_K: N(K)(x)=n,\ \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{\zeta\in x}\rho_i(\zeta)\right)>0\right\}\subset U.$

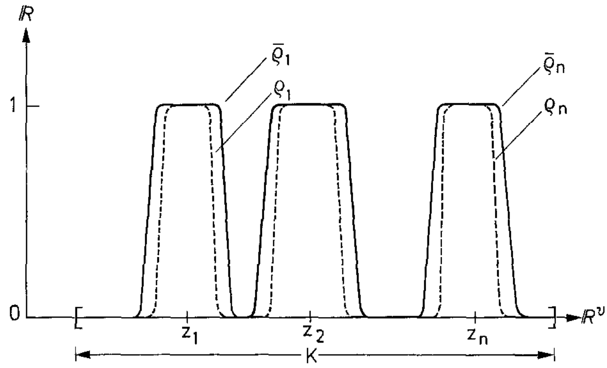

Abb. 1

Sei $\beta\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

(6a) $0 \leqq \beta \leqq 1$,

(6b) $\beta(x)=0$ für $|x-1|>\frac{1}{2}$ und $\beta(x)=1$ für $|x-1|<\frac{1}{4}$.

Siehe Abb. 2.

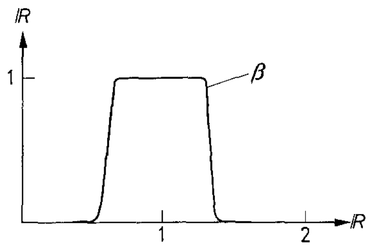

Abb. 2

Definiere $h\colon \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ durch

(7) $h(a) := \prod_{i=1}^{n} [(\beta(\sum_{\zeta \in a} \bar{\rho}_i(\zeta))) \cdot (\sum_{\zeta \in a} \rho_i(\zeta))]$; dann gilt:

(8a) $h(a)=0$, wenn $N(\operatorname{supp} \rho_i)(a) \neq 1$ für ein i mit $1 \leqq i \leqq n$

(8b) $|h(a)| \leqq 1$ für alle $a \in \mathscr{M}$,

(8c) auf $\{a : h(a)>0\}$ gibt es genau einen Punkt $v(a) \in a$, der den kleinsten Abstand zu ξ hat

(8d) für alle $x \in \mathscr{M}_K$ mit $N(K)(x)=n$ und $h(x)>0$ gilt $F(v(x), x) > \varepsilon$ (Folgerung aus (5e), $v(x)$ wie in (8c)).

Definition von δ:

(9) $\delta := \int_{N(K)(x)=n} \Lambda^{(K)}(dx) \max_{\zeta \in x,\, \zeta \in U_1} F(\zeta, x)\, h^2(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} (\sum_{\zeta \in x} \rho_i(\zeta))^2.$

Aus (8c), (8d) und (7) folgt:

$$(10)\quad \delta = \int_{N(K)(x)=n} \Lambda^{(K)}(dx)\, F(v(x), x)\, h^2(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\zeta \in x} \rho_i(\zeta)\Big)^2$$

$$\geqq \varepsilon \int_{N(K)(x)=n} \Lambda^{(K)}(dx)\, h^2(x) \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\zeta \in x} \rho_i(\zeta)\Big)^2 > 0.$$

Definition von L:

Aus Definition 4 (D3) und ($\mathscr{T}$2c) folgt

$$|F(\zeta, x)| \leqq D \cdot N(K)(x) \cdot C_K^{N(K)(x)} + C_K^{N(K)(x)} \qquad \text{für alle } (\zeta, x) \in \mathscr{M}_K^*,$$

also $\int \Lambda^{(K)}(dx) \max_{\zeta \in x} |F(\zeta, x)| < \infty$. Deshalb kann man einen Würfel $L \in \mathscr{W}$ mit folgenden Eigenschaften finden:

$$(11\text{a})\quad \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{supp} \bar{\rho}_i \subset \mathring{L} \subset L \subset \mathring{K},$$

$$(11\text{b})\quad \int_{N(K-L)(x)>0} \Lambda^{(K)}(dx) \max_{\zeta \in x} |F(\zeta, x)| < \delta.$$

Es gibt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion σ auf $\mathbb{R}^\nu$ mit folgenden Eigenschaften (s. Abb. 3):

$$(12\text{a})\quad 0 \leqq \sigma \leqq 1,$$

$$(12\text{b})\quad \{x: \sigma(x) = 0\} \subset \mathring{K}, \quad \sigma(x) = 1 \qquad \text{für } x \notin K,$$

$$(12\text{c})\quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x) \qquad \text{für } x \in L.$$

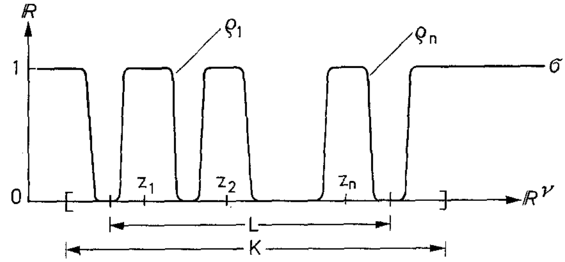

Abb. 3

Es gibt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\tau: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$, so daß gilt

$$(13)\quad \tau(\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \text{falls } |\zeta| \leqq |L| \\ +\text{constant}, & \text{falls } \zeta \geqq |K| \\ -\text{constant}, & \text{falls } \zeta \leqq -|K|. \end{cases}$$

Definition von $f, g\colon \mathscr{M} \to \mathbb{R}$:

(14) $f(a) := h(a) \cdot \prod_{\zeta \in a} \sigma(\zeta)$,

(15) $g(a) := f(a) \cdot \tau(p(\sum_{\zeta \in a} \zeta \cdot \bar{\rho}_1(\zeta)))$, wobei $p\colon \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ die Projektion in die l. Koordinate ist.

Die Funktionen f und g haben folgende Eigenschaften:

(16) Mit v wie in (8c) folgt

$$g(a) = \begin{cases} f(a) \cdot p(v(a)), & \text{falls } f(a) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(17) $f, g \in \mathscr{D}_K$

(18) $D_\zeta f(a) = D_\zeta g(a) = 0$ für alle $(\zeta, a) \in \mathscr{M}^*$ mit $\zeta \in \partial K$.

(19) Sei $(\zeta, x) \in \mathscr{M}_K^*$, $f(x) > 0$; die k. Komponente eines Vektors $(1 \leqq k \leqq \nu)$ werde mit dem oberen Index (k) bezeichnet. Dann gilt mit (13a) und (16):

$$\text{(19a)} \quad D_\zeta^{(k)} g(x) = \begin{cases} (D_\zeta^{(k)} f(x)) \cdot p(v(x)), & \text{falls } \zeta \neq v(x) \text{ oder } k \neq l \\ (D_\zeta^{(l)} f(x)) \cdot p(v(x)) + f(x), & \text{falls } \zeta = v(x) \text{ und } k = l. \end{cases}$$

(19b) $\Delta_\zeta g(x) = (\Delta_\zeta f(x)) \cdot p(v(x))$, falls $\zeta \neq v(x)$,

(20) $f(a) = 0$ für $N(L)(a) > n$ $(a \in \mathscr{M})$ (Folgerung aus (8a), (12c) und (14)).

(21) Für $x \in \mathscr{M}_K$ mit $N(K)(x) = n$ ist $f^2(x) = h^2(x) \prod_{i=1}^{n} (\sum_{\zeta \in x} \rho_i(\zeta))^2$ (folgt aus (8a), (12c) und (14))

(22) $|f(a)| \leqq 1$ für $a \in \mathscr{M}$.

b) Ein Widerspruch zur Annahme $F(\xi, z) > 0$

Nach Lemma 3 gilt:

$$\text{(23)} \quad \int \mu(da)\, f(a) \tfrac{1}{2} \sum_{\zeta \in a} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta g(a) \rangle + \Delta_\zeta g(a)]$$
$$= \int \mu(da)\, g(a) \tfrac{1}{2} \sum_{\zeta \in a} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta f(a) \rangle + \Delta_\zeta f(a)].$$

Aus (16), (19a) und (19b) folgt:

$$\text{(24)} \quad \int \mu(da)\, f(a) \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta \in a \\ \zeta \notin U_1}} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta g(a) \rangle + \Delta_\zeta g(a)]$$
$$= \int \mu(da)\, g(a) \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\zeta \in a \\ \zeta \notin U_1}} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta f(a) \rangle + \Delta_\zeta f(a)].$$

(23) und (24) ergeben

$$(25)\quad \int \mu(da)\, f(a) \sum_{\substack{\zeta\in a\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta\, g(a)\rangle + \Delta_\zeta\, g(a)]$$
$$= \int \mu(da)\, g(a) \sum_{\substack{\zeta\in a\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, a), D_\zeta\, f(a)\rangle + \Delta_\zeta\, f(a)].$$

Wegen (2) und Definition 4 (D2) ist die Funktion $a \mapsto \sum_{\substack{\zeta\in a\\ \zeta\in U_1}} \langle c(\zeta, a), D_\zeta\, f(a)\rangle$ $\mathfrak{B}_K$-meßbar. Aus (25) und ($\mathcal{T}$ 2a) folgt deshalb

$$(26)\quad \int \Lambda^{(K)}(dx)\, \pi^{(K)}(x)\, f(x) \sum_{\substack{\zeta\in x\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, x), D_\zeta\, g(x)\rangle + \Delta_\zeta\, g(x)]$$
$$= \int \Lambda^{(K)}(dx)\, \pi^{(K)}(x)\, g(x) \sum_{\substack{\zeta\in x\\ \zeta\in U_1}} [\langle c(\zeta, x), D_\zeta\, f(x)\rangle + \Delta_\zeta\, f(x)].$$

Sei $m\in\mathbb{N}$ gegeben, $x=(x_1, \ldots, x_m)\in K^m$; f, g werden als Funktionen auf K^m aufgefaßt vermöge $f(x_1, \ldots, x_m) := f\{x_1, \ldots, x_m\}$, entsprechend sei

$$c(x_i, x) := c(x_i, \{x_1, \ldots, x_m\}),\ D_{x_i}\, f(x) := D_{x_i}\, f\{x_1, \ldots, x_m\};$$

dx_i sei das Lebesgue-Maß auf K ($1\leq i\leq m$). Wie beim Beweis von (25) aus (23) und (24) folgt:

$$(27)\quad \int_{K^m} dx_1 \ldots dx_m\, \pi^{(K)}(x) \{ f(x) \sum_{i:\, x_i\in U_1} [\langle c(x_i, x), D_{x_i}\, g(x)\rangle + \Delta_{x_i}\, g(x)]$$
$$- g(x) \sum_{i:\, x_i\in U_1} [\langle c(x_i, x), D_{x_i}\, f(x)\rangle + \Delta_{x_i}\, f(x)]\}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{K^m} dx_1 \ldots dx_m\, \pi^{(K)}(x) \{ f(x) [\langle c(x_i, x), D_{x_i}\, g(x)\rangle + \Delta_{x_i}\, g(x)]$$
$$- g(x) [\langle c(x_i, x), D_{x_i}\, f(x)\rangle + \Delta_{x_i}\, f(x)]\}.$$

Die letzte Zeile kann mit (18), (19a) und partieller Integration (vgl. den Beweis von Satz 1 (I)) umgeformt werden zu

$$(28)\quad \sum_{i=1}^{m} \int_{K^m} dx_1 \ldots dx_m \langle \pi^{(K)}(x)\, c(x_i, x) - D_{x_i}\, \pi^{(K)}(x),\, f(x)\, D_{x_i}\, g(x) - g(x)\, D_{x_i} f(x)\rangle$$
$$= \int_{K^m \cap \{f(x)>0\}} dx_1 \ldots dx_m\, F(v(x), x)\, f^2(x).$$

Aus (26), (27), (28) folgt:

$$(29)\quad 0 = \int \Lambda^{(K)}(dx)\, F(v(x), x)\, f^2(x).$$

Aus (20), (21), (29) ergibt sich

$$(30)\quad 0=\int_{\{N(K)=n\}} \Lambda^{(K)}(dx)\, F(\nu(x), x)\, h^2(x) \prod_{i=1}^{n} (\sum_{\zeta\in x} \rho_i(\zeta))^2 + \\ + \int_{\{N(K)>n\}} \Lambda^{(K)}(dx)\, F(\nu(x), x)\, f^2(x) = \\ = \int_{\{N(K)=n\}} \Lambda^{(K)}(dx) \max_{\substack{\zeta\in x\\ \zeta\in U_1}} F(\zeta, x)\, h^2(x) \prod_{i=1}^{n} (\sum_{\zeta\in x} \rho_i(\zeta))^2 + \\ + \int_{\substack{\{N(K)>n\}\\ \{N(K-L)>0\}}} \Lambda^{(K)}(dx)\, F(\nu(x), x)\, f^2(x).$$

Nach (9) ist der erste Summand gleich δ, der Betrag des zweiten nach (22) und (11b)

$$\leqq \int_{\{N(K-L)>0\}} \Lambda^{(K)}(dx) \max_{\zeta\in x} |F(\zeta, x)| < \delta.$$

Dies ist ein Widerspruch, also $F(\xi, z)=0$ gezeigt.

c) Beweis des Satzes

Sei $K\in\mathscr{W}$; definiere $U_K\colon \mathscr{M}_K \to \mathbb{R}$ durch $U_K(x) = -\log \pi^{(K)}(x)$. Nach Abschnitt 4b gilt für alle $(\zeta, x)\in\mathscr{M}_K^*$ mit $d(\zeta, K^c)>R$:

$$c(\zeta, x)\, \pi^{(K)}(x) - D_\zeta\, \pi^{(K)}(x) = 0,$$

also

$$c(\zeta, x) = -D_\zeta(-\log \pi^{(K)}(x)) = -D_\zeta\, U_K(x),$$

womit Aussage (1) des Satzes bewiesen ist.

Sei c durch eine S-Funktion Ψ definiert, $\mu\in\mathscr{R}(c)$; seien $K, L_0, L\in\mathscr{W}$, $K\subset L_0\subset L$ mit $|L_0|\geqq|K|+2R$; für disjunkte Mengen $A, B\in\mathfrak{C}$, $x\in\mathscr{M}_A$, $y\in\mathscr{M}_B$ bezeichne $x\,y$ die Konfiguration, die genau die Partikeln von x und von y enthält. Nach ($\mathscr{T}$ 2a) gilt für alle $B\in\mathfrak{B}_K$ und μ-fast alle $a\in\mathscr{M}$:

$$(1)\quad \mu(B\,|\,X_{L-K}, N(K))(a) = \{\mu(\{x\colon N(K)(x)=N(K)(a)\}\,|\,X_{L-K})(a)\}^{-1}\cdot \\ \cdot \int_{B\cap\{N(K)(x)=N(K)(a)\}} \Lambda^{(K)}(dx) \frac{\pi^{(L)}(x\, a_{L-K})}{\pi^{(L-K)}(a_{L-K})}.$$

Seien $(\zeta, x)\in\mathscr{M}_K^*$ und $a\in\mathscr{M}$ gegeben; aus $d(\zeta, L^c)>R$ folgt $D_\zeta(\log \pi^{(L)}(x\, a_{L-K})) = c(\zeta, x\, a_{L-K}) = -D_\zeta[\frac{1}{2} \sum_{\substack{\xi\in x\\ \eta\in x\setminus\xi}} \Psi(\xi-\eta) + \sum_{\substack{\xi\in x\\ \eta\in a_{L-K}}} \Psi(\xi-\eta)]$; also gibt es einen Faktor $\bar{Z}_{K, L, N(K)(x); a_{L-K}}$, der von $K, L, N(K)(x)$ und a_{L-K} abhängt, mit

$$\pi^{(L)}(x\, a_{L-K}) = \bar{Z}_{K, L, N(K)(x); a_{L-K}} \exp[-U_K(x) - W_K(x\,|\,a_{L-K})],$$

demnach gilt mit einem Normierungsfaktor $Z_{K, L, N(K)(x); a_{L-K}}$

$$(2)\quad \frac{\pi^{(L)}(x\, a_{L-K})}{\pi^{(L-K)}(a_{L-K})} = Z_{K, L, N(K)(x); a_{L-K}} \exp[-U_K(x) - W_K(x\,|\,a_{L-K})];$$

zur Berechnung von $Z_{K,L,N(K)(x);a_{L-K}}$: sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben;

$$\begin{aligned}\mu(\{N(K)=n\}\,|\,X_{L-K})(a) &= \int_{\{N(K)=n\}} \Lambda^{(K)}(dx)\,\frac{\pi^{(L)}(x\,a_{L-K})}{\pi^{(L-K)}(a_{L-K})}\\ &= \int_{\{N(K)=n\}} \Lambda^{(K)}(dx)\, Z_{K,L,N(K)(x);a_{L-K}} \exp[-U_K(x)-W_K(x\,|\,a_{L-K})]\\ &= Z_{K,L,n,a_{L-K}} \cdot A^{-1}_{K,n;a_{L_0-K}}\end{aligned}$$

mit

$$A^{-1}_{K,n;a_{L_0-K}} := \int_{\{N(K)=n\}} \Lambda^{(K)}(dx) \exp[-U_K(x)-W_K(x\,|\,a_{L-K})],$$

so daß folgt:

$$Z_{K,L,n;a_{L-K}} = A_{K,n;a_{L_0-K}}\;\mu(\{N(K)=n\}\,|\,X_{L-K})(a). \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) und $\lim_{L\uparrow\mathbb{R}^\nu} \mu(\{N(K)=n\}\,|\,X_{L-K})\,(a) = \mu(\{N(K)=n\}\,|\,\mathfrak{B}_{K^c})(a)$ μ-f.s. folgt nach Bemerkung 1: μ ist kanonisches Gibbs-Maß zum Potential Ψ. Damit ist alles gezeigt.

Literatur

1. Debes, H., Kerstan, J., Liemant, A., Matthes, K.: Verallgemeinerung eines Satzes von Dobrushin III. Math. Nachr. **50**, 99–139 (1971)
2. Georgii, H.O.: Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems. Commun. math. Phys. **48**, 31–51 (1976)
3. Gurevich, B.M., Suhov, Ju.M.: Stationary Solutions of the Bogoliubov Hierarchy Equations in Classical Statistical Mechanics 1. Commun. math. Phys. **49**, 63–96 (1976)
4. Lanford, O.E. III: Time Evolution of Large Classical Systems. In: Dynamical Systems, Theory and Applications. Lecture Notes in Physics **38**, 1–111. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
5. Lang, R.: Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung. I. Existenz. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **38**, 55–72 (1977)
6. Nguyen, X.X., Zessin, H.: Martin-Dynkin Boundary of Mixed Poisson Processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **37**, 191–200 (1977)
7. Preston, C.J.: Random Fields. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
8. Ruelle, D.: Superstable Interactions in Classical Statistical Mechanics. Commun. math. Phys. 18, 127–159 (1970)

Eingegangen am 8. August 1976

Nachtrag bei der Korrektur

1. Die Konstante A in der Aussage von Lemma 2 (Teil I, S. 63) hängt von t_0 ab.
2. Die Frage in Bemerkung 3 (Teil I, S. 62) kann positiv beantwortet werden (Mitteilung von Prof. H. Rost).