Probab. Th. Rel. Fields 77, 29–47 (1988)

Probability Theory and Related Fields

Un critère sur les petites boules dans le théorème limite central

M. Ledoux[1] et M. Talagrand[2]

[1] Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire associé au C.N.R.S., Université Louis Pasteur, F-67084 Strasbourg, France

[2] Equipe d'Analyse, associée au C.N.R.S., Université de Paris VI, F-75230 Paris, France, et Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH, 43210 USA

Summary. We show that a Banach space valued random variable X such that $\lim_{t\to\infty} t^2\ \mathbb{P}\{\|X\|>t\}=0$ satisfies the central limit theorem if and only if the following criterion on small balls is fulfilled:

$$\text{for each } \varepsilon>0, \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}>0.$$

Along the line of ideas used in the proof of this characterization, we present in addition a result obtained with J. Zinn on an almost sure randomized central limit theorem: if (and only if) $\mathbb{E}\|X\|^2<\infty$, in order that X satisfy the central limit theorem, it is necessary and sufficient that for almost every ω the sequence $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i X_i(\omega)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converges in distribution, where $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ denotes an orthogaussian sequence independent of $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Introduction et résultats préliminaires

Soit B un espace de Banach (réel). Par variable aléatoire à valeurs dans B, nous entendons une application mesurable X d'un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans B muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}$, telle que l'image de $\mathbb{P}$ par X définisse une mesure de Radon sur $\mathscr{B}$; de façon équivalente, X prend presque sûrement ses valeurs dans un sous-espace séparable de B. Pour tout entier $n\geqq 1$, on pose $S_n=X_1+\ldots+X_n$ où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de copies indépendantes de X. La variable aléatoire X est dite vérifier le théorème limite central (TLC) si la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie étroite sur $(B, \mathscr{B})$ vers une mesure de Radon gaussienne. Une variable aléatoire réelle X vérifie le TLC si et seulement si $\mathbb{E}X=0$ et $\mathbb{E}X^2<\infty$. D'après le critère de Prohorov, pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans B vérifie le TLC, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K de B tel que l'on ait

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}}\in K\right\}\geqq 1-\varepsilon.$$

Comme il est bien connu, ce critère s'interprète de façon équivalente de diverses manières; par exemple, si (et seulement si) pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble fini $A\subset B$ tel que l'on ait

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{d\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, A\right)<\varepsilon\right\}\geq 1-\varepsilon \tag{1}$$

où $d(x, A)=\inf\{\|x-y\|;\ y\in A\}$, alors X vérifie le TLC. La même propriété (1) lorsque A est un sous-espace de dimension finie de B caractérise également la propriété de limite centrale, si du moins la variable X la vérifie scalairement ou, autrement dit en vertu du TLC sur la droite, si X est faiblement centrée et faiblement de carré intégrable (i.e. pour tout f du dual de B, $\mathbb{E} f(X)=0$ et $\mathbb{E} f^2(X)<\infty$). (Pour ces propriétés, ainsi qu'une description générale du TLC, cf. par exemple [AG].)

L'esprit général de ces diverses conditions caractérise le TLC à partir de propriétés sur les grandes boules de l'espace. Le propos de ce travail va être de décrire une caractérisation du TLC à partir d'un critère portant sur les petites boules, en présence d'une condition nécessaire sur la loi de la norme de la variable considérée. Il est aisé de constater que si X vérifie le TLC, pour tout $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}>0. \tag{2}$$

En effet, si G désigne la variable aléatoire gaussienne centrée limite de la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, par définition,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}\geqq \mathbb{P}\{\|G\|<\varepsilon\}.$$

Or, il est bien connu que pour une mesure de Radon gaussienne centrée, toute boule centrée à l'origine a une masse positive [DHJS]. Pour la commodité du lecteur, nous indiquons une rapide démonstration de ce fait. Notons tout d'abord que pour tout $\varepsilon>0$ et tout x de B,

$$(\mathbb{P}\{\|G-x\|<\varepsilon\})^2\leqq \mathbb{P}\{\|G\|<\sqrt{2}\,\varepsilon\}; \tag{3}$$

en effet, si G' désigne une copie indépendante de G, par symétrie et indépendance,

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}\{\|G-x\|<\varepsilon\})^2 &= \mathbb{P}\{\|G-x\|<\varepsilon\}\ \mathbb{P}\{\|G'+x\|<\varepsilon\}\\ &\leqq \mathbb{P}\{\|(G-x)+(G'+x)\|<2\varepsilon\}\\ &= \mathbb{P}\{\|G\|<\sqrt{2}\,\varepsilon\}\end{aligned}$$

car $G+G'$ suit la loi de $\sqrt{2}\,G$. Supposons alors l'existence d'un réel $\varepsilon_0>0$ pour lequel $\mathbb{P}\{\|G\|<\varepsilon_0\}=0$. G étant de Radon, il existe une suite (x_n) dans B telle que

$$\mathbb{P}\left\{\exists n: \|G-x_n\|<\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\right\}=1.$$

Mais alors, par (3),

$$1 \leqq \sum_n \mathbb{P}\left\{\|G-x_n\|<\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\right\}=0$$

fournissant ainsi une contradiction. Il est à noter que cette propriété, pour une mesure gaussienne centrée raisonnable, de charger toute boule centrée à l'origine est en fait essentiellement équivalente à être de Radon comme le montrent, par exemple, certains des arguments cités à la fin de cette introduction.

Ainsi, si X vérifie le TLC, l'événement $\{\|S_n/\sqrt{n}\|<\varepsilon\}$ se réalise avec une probabilité supérieure à $\alpha>0$, α pouvant cependant être très petit. Il est d'un intérêt théorique de savoir si la condition a priori trés faible (2) entraîne réciproquement le TLC. Le résultat quelque peu surprenant de cet article est une réponse positive à cette question, en présence de la condition $\lim_{t\to\infty} t^2\,\mathbb{P}\{\|X\|>t\}=0$, nécessaire pour que X vérifie le TLC. Ceci avait été établi précédemment par le second auteur, qui a introduit le problème [T], pour des variables X satisfaisant $\mathbb{E}\|X\|^2<\infty$, une condition d'intégrabilité qui n'est toutefois pas nécessaire en général pour le TLC. Dans [L], le résultat est obtenu dans certains espaces de Banach. Le théorème s'énonce:

Théorème 1. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach B; pour que X vérifie le* TLC, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies*:

(i) $\lim_{t\to\infty} t^2\,\mathbb{P}\{\|X\|>t\}=0$;

(ii) *pour tout* $\varepsilon>0$, $\quad \alpha(\varepsilon)=\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}>0.$

La condition sur les petites boules (ii) est à comparer à certaine caractérisation du TLC basée sur des inégalités de concentration que décrit la proposition suivante. La première partie de celle-ci nous sera précieuse par la suite. La suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un réel A tel que l'on ait

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<A\right\}\geqq 1-\varepsilon.$$

Proposition 2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans B.*

(i) *Pour que la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée en probabilité, il faut et il suffit qu'il existe un réel A tel que l'on ait*

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<A\right\}>0. \tag{4}$$

(ii) *Pour que X vérifie le* TLC, *il faut et il suffit qu'il existe un compact K de B tel que l'on ait*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}}\in K\right\}>0. \tag{5}$$

Démonstration. Comme nous l'avons annoncé, la preuve repose sur une inégalité de concentration pour sommes de variables aléatoires indépendantes; nous faisons usage de l'inégalité semble-t-il la plus précise due à M. Kanter [K], mais d'autres moins précises comme celle de L. Le Cam [LC] font également l'affaire pour ce qui nous concerne. Nous nous contentons de la preuve de la partie (i); en remplaçant la norme par la jauge du compact supposé convexe K, (ii) s'établit de la même façon. Supposons tout d'abord X symétrique. Fixons un entier $n\geqq 1$ et notons que si $Y, Y_1, \ldots, Y_m$ désignent des copies indépendantes de $S_n/\sqrt{n}$, $\sum_{i=1}^{m} Y_i/\sqrt{m}$ a même loi que $S_{mn}/\sqrt{mn}$. En vertu de (4.1) de [K],

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_{mn}}{\sqrt{mn}}\right\|<A\right\}&=\mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m} Y_i\right\|<A\sqrt{m}\right\}\\ &\leqq\frac{3}{2}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}\{\|Y_i\|>A\sqrt{m}\}\right)^{-1/2}\\ &=\frac{3}{2}(1+m\,\mathbb{P}\{\|Y\|>A\sqrt{m}\})^{-1/2}.\end{aligned}$$

Si $\alpha>0$ vérifie $\mathbb{P}\{\|S_k/\sqrt{k}\|<A\}\geqq\alpha$ pour tout $k\geqq k_0$ assez grand, il s'ensuit que pour tout $m\geqq k_0$,

$$m\,\mathbb{P}\{\|Y\|>A\sqrt{m}\}\leqq\frac{9}{4\alpha^2}-1.$$

Cette borne est obtenue indépendamment de n; ainsi, pour tout $m\geqq k_0$,

$$\sup_n \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|>A\sqrt{m}\right\}\leqq\frac{1}{m}\left(\frac{9}{4\alpha^2}-1\right).$$

Il s'ensuit immédiatement que la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité. Il est aisé de vérifier à partir de cette estimation que l'on a aussi

$$M=\sup_n \mathbb{E}\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\infty. \tag{6}$$

Si X vérifiant (4) n'est pas symétrique, désignons par X' une copie indépendante de X; alors, la variable aléatoire symétrique $X-X'$ vérifie également (4), avec peut-être $2A$ au lieu de A. On déduit alors en particulier de (6) que $\mathbb{E}\|X-X'\|<\infty$, et donc $\mathbb{E}\|X\|<\infty$. En vertu de la loi des grands nombres, $S_n/n\to\mathbb{E}X$ presque sûrement et nécessairement $\mathbb{E}X=0$ par comparaison avec

(4). L'inégalité de Jensen sur la propriété (6) montre alors que la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L_1, donc aussi en probabilité. Ceci établit (i) et conclut la démonstration de la proposition 2.

Au vu de la proposition précédente, l'effort consenti pour établir le théorème 1 va paraître important; il est possible qu'une démonstration plus directe existe. Il appert cependant que le rôle joué par la condition (i) est crucial; si, comme le montre la démonstration de la proposition 2, (4), et donc également la condition plus forte des petites boules (ii), entraîne que $\sup_{t>0} t^2\, \mathbb{P}\{\|X\|>t\}<\infty$, nous donnons un exemple en fin d'article montrant que (i) ne peut être éliminée en général. Cette condition (i) est en fait liée au comportement de la fonction

$$\alpha(\varepsilon)=\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}$$

pour les grandes valeurs de ε. Ceci est illustré dans le lemme élémentaire suivant duquel nous déduirons plus loin une démonstration directe de la nécessité de (i) pour que X vérifie le TLC (établie en [AAG, PZ]). Ce lemme peut aussi être démontré à partir d'une version des inégalités de Kanter; nous préférons suivre [J] et utiliser les inégalités de Borel-Cantelli et de Lévy.

Lemme 3. *Supposons X symétrique et telle que $\alpha(\varepsilon_0)>3/4$ pour un $\varepsilon_0>0$. Alors, pour tout $\varepsilon>\varepsilon_0$,*

$$\limsup_{t\to\infty} t^2\, \mathbb{P}\{\|X\|>t\}\leqq 12\varepsilon^2(1-\alpha(\varepsilon)).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon>\varepsilon_0$; notons que d'aprés le TLC en dimension finie (et la proposition 2), $\alpha(\varepsilon)<1$ (si du moins X n'est pas dégénérée). Il existe un entier $n_0=n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n\geqq n_0$,

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}\geqq\frac{3}{2}\alpha(\varepsilon)-\frac{1}{2}.$$

D'après les inégalités de Lévy pour variables symétriques,

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leqq n}\|X_i\|>\varepsilon\sqrt{n}\}\leqq 2\,\mathbb{P}\{\|S_n\|>\varepsilon\sqrt{n}\}\leqq 3-3\alpha(\varepsilon),$$

et donc, par indépendance,

$$1-(1-\mathbb{P}\{\|X\|>\varepsilon\sqrt{n}\})^n\leqq 3-3\alpha(\varepsilon).$$

Comme $\operatorname{Log}(1-x)\leqq -x$ pour tout réel $x<1$, on a

$$n\,\mathbb{P}\{\|X\|>\varepsilon\sqrt{n}\}\leqq -\operatorname{Log}(3\alpha(\varepsilon)-2)=-\operatorname{Log}[1-3(1-\alpha(\varepsilon))].$$

De plus, $\operatorname{Log}(1-x)\geqq -2x$ lorsque $0<x<3/4$, et donc, pour tout $n\geqq n_0$, nous avons obtenu

$$n\,\mathbb{P}\{\|X\|>\varepsilon\sqrt{n}\}\leqq 6(1-\alpha(\varepsilon)).$$

Il existe un réel $t_0(\varepsilon)$ tel que si $t \geqq t_0(\varepsilon)$ on puisse trouver un entier $n \geqq n_0$ vérifiant $\varepsilon\sqrt{n} \leqq t < \varepsilon\sqrt{n+1}$; d'après ce qui précède,

$$t^2\,\mathbb{P}\{\|X\|>t\} \leqq \varepsilon^2(n+1)\,\mathbb{P}\{\|X\|>\varepsilon\sqrt{n}\} \leqq 12\varepsilon^2(1-\alpha(\varepsilon))$$

ce qui démontre le lemme.

Si nous suivons un argument de G. Pisier [P1], déjà employé lors de la démonstration de la proposition 2, consistant à remplacer X par $S_n/\sqrt{n}$ pour chaque n dans l'argument précédent, celui-ci fournit une autre démonstration, plus simple, du fait, établi dans la proposition 2, que si la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité, elle l'est aussi dans L_p pour tout $p<2$.

Comme nous l'avons annoncé, il découle immédiatement de ce lemme que si X vérifie le TLC, alors $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\,\mathbb{P}\{\|X\|>t\}=0$. En effet, dans ce cas $\alpha(\varepsilon) \geqq \mathbb{P}\{\|G\|<\varepsilon\}$ où G désigne la gaussienne limite, et donc, pour ε suffisament grand,

$$\limsup_{t\to\infty} t^2\,\mathbb{P}\{\|X\|>t\} \leqq 12\varepsilon^2\,\mathbb{P}\{\|G\|\geqq\varepsilon\}.$$

En vertu des propriétés d'intégrabilité des vecteurs gaussiens [F], $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \varepsilon^2\,\mathbb{P}\{\|G\|\geqq\varepsilon\}=0$; l'affirmation précédente est ainsi établie, au moins dans le cas symétrique, le cas général s'en déduisant par symétrisation.

La démonstration du théorème 1 repose sur les récentes idées développées dans le cadre du calcul des probabilités dans les espaces de Banach: randomisation, inégalités de concentration gaussiennes ou dérivées d'origine isopérimétrique, arguments de martingales. Leur utilisation dans cette étude du critère des petites boules dans le TLC est similaire à celle faite récemment pour la loi du logarithme itéré [LT2] et fournit ainsi une illustration supplémentaire des divers progrès. Le théorème 1 n'est pas le seul exemple d'application de ces méthodes au TLC: une discussion avec J. Zinn a permis d'établir le résultat suivant dont le cadre de démonstration s'intègre à cet article; nous remercions J. Zinn de nous avoir permis d'inclure ce résultat à cette rédaction; $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y désigne une suite de variables normales centrées réduites indépendantes définie sur un espace probabilisé indépendant de celui supportant les X_i.

Théorème 4. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach B; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathbb{E}\|X\|^2<\infty$ *et X satisfait au* TLC;

(ii) *pour presque tout ω, la suite* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i X_i(\omega)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge étroitement dans B (vers une même limite, celle de la gaussienne limite de la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$).*

Ce théorème affirme donc que pour les variables aléatoires de carré intégrable en norme, la propriété de limite centrale est équivalente à la convergence d'une familles de suites de lois gaussiennes. Sa démonstration est évidente sur la droite en vertu de la loi des grands nombres pour les carrés, et, comme nous le verrons, s'établit de façon analogue dans ce cadre général par l'intermédiaire d'une version adaptée de cette même loi des grands nombres. Il est à noter que l'équivalence précédente se généralise à d'autres suites que la suite orthogaussienne (sauf peut-être pour l'identification des limites), plus précisément les suites $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables réelles indépendantes de même loi telles que $\mathbb{P}\{|\xi_i|>0\}>0$ et ξ_i appartient à l'espace de Lorentz $L_{2,1}$. Ceci résulte immédiatement de la démonstration produite jointe à quelques arguments cités par ailleurs dans l'article; nous nous contentons de l'énoncé gaussien qui est probablement le plus naturel.

Avant de passer aux démonstrations, il nous faut mentionner que la condition des petites boules contient le caractère prégaussien de la variable considérée. On dit que X est prégaussienne si elle est faiblement centrée et faiblement de carré intégrable et s'il existe une variable gaussienne de même structure de covariance (comme c'est le cas par exemple si elle vérifie le TLC). Il est clair tout d'abord, en raison du TLC en dimension finie, que si la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité, $\mathbb{E}f(X)=0$ et $\mathbb{E}f^2(X)<\infty$ pour tout élément f du dual B' de B. Cette bornitude en probabilité entraîne en fait que l'ensemble de L_2 formé des $f(X)$ où f parcourt la boule unité B'_1 de B' est un GB ensemble au sens de [D], et donc en particulier relativement compact. En effet, le TLC en dimension finie définit un processus gaussien $(G_f)_{f\in B'_1}$ de même covariance que X qui, par (6), vérifie

$$\mathbb{E}\sup_{f\in B'_1}|G_f|\leqq\sup_n\mathbb{E}\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|<\infty.$$

X est prégaussienne si l'ensemble précédent est GC et c'est d'ores et déjà le cas lorsque la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité dans les espaces de Banach ne contenant pas de copie isomorphe de c_0 [PZ]. Mais c'est toujours le cas sous la condition plus forte des petites boules (ii) du théorème 1. En effet, dans le cadre où nous sommes et pour lequel nous pouvons supposer en particulier B séparable puisque X est de Radon, le processus gaussien $(G_f)_{f\in B'_1}$ n'admet que des discontinuités non aléatoires [IN]; comme il vérifie $\mathbb{P}\{\sup_{f\in B'_1}|G_f|<\varepsilon\}>0$ pour tout $\varepsilon>0$ d'après (ii) et le TLC en dimension finie, il ne peut en avoir et il est ainsi à trajectoires continues. Or, ce processus a même structure de covariance que $(\sum_i g_i\, f(\mathbb{E}(X h_i)))_{f\in B'_1}$ où (h_i) est une base orthonormale de $L_2(\Omega,\sigma(X),\mathbb{P})$; comme limite des sommes partielles, il définit donc un vecteur aléatoire à valeurs dans B et il s'ensuit que X est prégaussienne.

Il nous reste à signaler, avant de passer enfin aux démonstrations des théorèmes, qu'il existe des variables aléatoires prégaussiennes bornées presque sûrement telles que $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée en probabilité mais ne vérifiant pas le TLC [MP]. Joint à la proposition 2 et aux observations précédentes, ceci situe exactement la nature de la caractérisation que nous obtenons dans le théorème 1. Notons également que les théorèmes précédents s'étendent sans peine au cadre plus général des processus empiriques tel que celui décrit par exemple en [GZ].

2. Démonstration du résultat principal

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 1. La nécessité a été établie au cours de la discussion précédente. Nous démontrons la suffisance en rappelant pour commencer que X vérifiant (ii) est nécessairement faiblement centrée et faiblement de carré intégrable; en outre, l'ensemble des $f(X)$ où f parcourt B'_1 est relativement compact dans L_2. Nous retenons également, de la proposition 2, que la condition des petites boules entraîne la bornitude en probabilité de la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et que celle-ci est équivalente à une bornitude dans L_1 (i.e. (6) est satisfaite). En procédant comme lors de la démonstration de la proposition 2, il est aisé de constater qu'il suffit de traiter le cas d'une variable X symétrique, ce que nous supposons dans la suite. En particulier εX a même loi que X où ε est une variable de Rademacher indépendante de X. Soient $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ respectivement des suites de variables indépendantes de Rademacher et uniformes sur $[-1, +1]$, supposées indépendantes des X_i. On désignera par $\mathbb{E}_X$ et $\mathbb{E}_\lambda$ les intégrations partielles respectivement par rapport à la suite (X_i) et par rapport aux suites (ε_i) et (ρ_i).

Soit $\varepsilon>0$, arbitraire mais fixé. Pour tout entier n et tout $i=1, \ldots, n$, on pose

$$u_i = u_i(n) = \frac{X_i}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_i\| \leqq c\sqrt{n}\}}$$

où $c=c(\varepsilon)>0$ est à préciser ultérieurement. Pour tout sous-espace F de dimension finie de B, on désigne par T l'application quotient $B\to B/F$ et on note, sans risque de confusion, la norme de B/F comme celle de B; donc $\|T(x)\|=d(x, F)$ pour tout x de B. Nous nous proposons de montrer qu'il existe T dépendant uniquement de $\varepsilon>0$ tel que l'on ait

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\| \leqq 4\varepsilon\right\} > 1-\alpha(\varepsilon) \tag{7}$$

où $v_i=v_i(n)=T(u_i)$, $i=1, \ldots, n$. En effet, $\|T\|\leqq 1$, (i) et la condition des petites boules (ii) entraînent que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\| < \varepsilon\right\} \\
&\geqq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|T\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\| < \varepsilon\right\} - \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\exists i \leqq n\colon \|X_i\| > c\sqrt{n}\} \\
&\geqq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\| < \varepsilon\right\} - \limsup_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}\{\|X\| > c\sqrt{n}\} \\
&\geqq \alpha(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Par intersection entre (7) et cette estimation, on constate alors que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\| \leqq 5\varepsilon;$$

par une nouvelle application de la propriété (i) similaire à la précédente, il s'ensuit que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left\|T\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right\| > 5\sqrt{\varepsilon}\right\} \leqq \sqrt{\varepsilon}.$$

Comme il est décrit dans l'introduction, une telle propriété d'approximation uniforme par un sous-espace de dimension finie assure que X vérifie le TLC.

Il nous faut par conséquent établir l'assertion (7). A cet effet, il suffit de montrer que:

(8) pour tout T, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| - \mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| > \varepsilon\right\} = 0;$

(9) il existe $T = T(\varepsilon)$ tel que $\displaystyle\sup_n \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| > 3\varepsilon\right\} < \alpha(\varepsilon).$

La démonstration de (8) repose sur l'argument de V. Yurinskii [Y] tel qu'il a été utilisé dans [LT2]. Pour tout n, on peut écrire

$$\mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} d_i$$

où $d_i = (\mathbb{E}_X^{\mathscr{F}_i} - \mathbb{E}_X^{\mathscr{F}_{i-1}})\left(\mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j\right\|\right)$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathscr{F}_i$ désignant la tribu engendrée par les variables $X_1, \ldots, X_i$ ($\mathscr{F}_0$ la tribu triviale) et $\mathbb{E}_X^{\mathscr{F}_i}$ l'espérance conditionnelle suivant cette tribu. L'observation de Yurinskii, qui découle aisément de l'indépendance, indique que

$$d_i = (\mathbb{E}_X^{\mathscr{F}_i} - \mathbb{E}_X^{\mathscr{F}_{i-1}})(f_i), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

où

$$f_i = \mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j\right\| - \mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \varepsilon_j v_j\right\|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Bien entendu $0 \leqq f_i \leqq \|v_i\|$, $i = 1, \ldots, n$. L'observation essentielle que nous retenons de [LT2], Lemma 3.5, assure que

$$\mathbb{E} f_i \leqq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j v_j\right\|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Par la proposition 2, M introduit en (6) est fini. Du principe de contraction (cf. e.g., [HJ]), nous déduisons

$$\mathbb{E} f_i \leqq \frac{M}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Les diverses estimations précédentes peuvent alors être utilisées de la façon suivante: pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbb{E}\, d_i^2 \leqq \mathbb{E} f_i^2 \leqq \mathbb{E}(\|v_i\|^{3/2} f_i^{1/2})$$
$$\leqq (\mathbb{E}\|v_i\|^3)^{1/2} (\mathbb{E} f_i)^{1/2} \leqq \left(\frac{M}{n}\, \mathbb{E}\|u_i\|^3\right)^{1/2}.$$

On conclut alors aisément la démonstration de (8) par une simple utilisation de l'inégalité de Tchebitcheff et de l'orthogonalité des différences de martingales d_i:

$$\mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\right\| - \mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\right\| > \varepsilon\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} d_i^2$$
$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot n \left(\frac{M}{n}\, \mathbb{E}\left(\frac{\|X\|^3}{n^{3/2}}\, I_{\{\|X\| \leqq c\sqrt{n}\}}\right)\right)^{1/2}$$
$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(3M \int_0^c n t^2\, \mathbb{P}\{\|X\| > t\sqrt{n}\}\, dt\right)^{1/2}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après (i) et le théorème de convergence dominée.

Il reste à montrer (9). L'idée principale va consister à appliquer conditionnellement une inégalité de concentration d'origine isopérimétrique. Malheureusement, une telle inégalité n'est pas connue à ce jour pour les moyennes de Rademacher* et il nous faut tout d'abord régulariser ces dernières afin d'être en mesure d'utiliser une observation de G. Pisier [P2]. Pour $a \in]0, 1[$ à fixer ensuite en fonction de $\varepsilon > 0$, définissons la suite de variables aléatoires (η_i) en posant pour tout i:

$$\eta_i = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{avec probabilité } 1-a, \\ \rho_i & \text{avec probabilité } a. \end{cases}$$

Les probabilités

$$\mathbb{P}\left\{\left|\mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\right\| - \mathbb{E}_\lambda\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i v_i\right\|\right| > \varepsilon\right\}$$

et

$$\mathbb{P}\left\{\left|\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^n \eta_i v_i\right\|\right| > \varepsilon\right\}$$

sont toutes deux majorées en vertu de l'inégalité du triangle, de l'inégalité $\|T\| \leqq 1$ et du principe de contraction par

$$\frac{1}{\varepsilon}\, \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \eta_i)\, v_i\right\| \leqq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\, \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \eta_i)\, X_i\right\|.$$

* Ceci vient d'être établi par le second auteur; la démonstration qui suit s'en trouve donc simplifiée.

D'aprés [GZ], Lemma 2.9, (cf., également [LT1]), la randomisation par les $\varepsilon_i - \eta_i$ est contrôlée pour tout n à partir de M par

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \eta_i) X_i \right\| \leqq 2 \|\varepsilon_1 - \eta_1\|_{2,1} M$$

où $\|\cdot\|_{2,1}$ désigne la "norme" de l'espace de Lorentz $L_{2,1}$, i.e.,

$$\|\varepsilon_1 - \eta_1\|_{2,1} = \int_0^\infty (\mathbb{P}\{|\varepsilon_1 - \eta_1| > t\})^{1/2}\, dt.$$

Il est clair que l'on peut choisir $a = a(\varepsilon) > 0$ suffisament petit de sorte que $\|\varepsilon_1 - \eta_1\|_{2,1} \leqq \varepsilon\, \alpha(\varepsilon)/8M$. Ainsi, pour vérifier (9), il suffit de prouver l'existence de T vérifiant

$$\sup_n \mathbb{P} \left\{ \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \right\| > \varepsilon \right\} < \alpha(\varepsilon)/2. \tag{10}$$

L'observation de G. Pisier [P2], pp. 181–182, peut à présent être appliquée aux η_i, conditionnellement aux v_i; en effet, la loi des η_i peut être réalisée comme l'image de la loi gausienne standard par l'application lipschitzienne de constante de Lipschitz proportionnelle à $1/a$ définie par $\left[\frac{1}{a}(2\Phi(x) - 1) \wedge 1\right] \vee (-1)$, Φ désignant la fonction de répartition de la loi gaussienne standard. Comme décrit en [P2], les inégalités gaussiennes entraînent alors l'existence d'une constante numérique $C > 0$ telle que l'on ait, pour tout entier n,

$$\mathbb{P}_\lambda \left\{ \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i \right\| > \varepsilon \right\} \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{C}{a^2} \sup_{\|f\| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} f^2(v_i) \tag{11}$$

où les f parcourent la boule unité du dual de B/F pour un F à choisir. En intégrant par rapport à $\mathbb{P}_X$, il nous faut donc contrôler $\mathbb{E} \sup_{\|f\| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} f^2(v_i)$. Or, en recentrant, il vient, pour tout n,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\|f\| \leqq 1} \sum_{i=1}^{n} f^2(v_i) \right) \leqq \sup_{\|f\| \leqq 1} \mathbb{E} f^2(T(X)) + 2\mathbb{E}\left(\sup_{\|f\| \leqq 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f^2(v_i) \right| \right).$$

D'après le théorème de comparaison pour les sommes de Rademacher [LT3], Theorem 5, et la troncation définissant les v_i, le second terme du membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par $12cM$; on choisit $c = c(\varepsilon) > 0$ de sorte que

$$12cM < a^2 \varepsilon^2 \alpha(\varepsilon)/4C.$$

Par ailleurs, la relative compacité des $f(X)$ dans L_2 lorsque f parcourt B_1', qui découle de (ii) comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, permet de choisir un sous-espace F de dimension finie de B tel que si T est l'application quotient associée, on ait

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \mathbb{E} f^2(T(X)) < a^2 \varepsilon^2 \alpha(\varepsilon)/4C.$$

Ces deux choix appliqués à (11) fournissent alors (10) et donc la conclusion. Le théorème 1 est démontré.

3. Démonstration du théorème 4

Nous conservons les notations précédentes, en étendant le symbole $\mathbb{E}_\lambda$ à l'intégration partielle par rapport à la suite orthogaussienne (g_i) indépendante de (X_i) ($\mathbb{P}_\lambda$ pour la probabilité). Il est clair que (ii) implique le TLC. Cette condition (ii) entraîne également $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$ puisque si la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \; X_i(\omega)/\sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi, en particulier, d'après les propriétés d'intégrabilité des variables gaussiennes et l'inégalité de Jensen

$$\sup_n \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}_\lambda \|g_n X_n(\omega)\| \leqq \sup_n \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i X_i(\omega) \right\| < \infty.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \sup_n \left\| \frac{X_n(\omega)}{\sqrt{n}} \right\| < \infty \right\} = 1$$

ce qui équivaut à dire que $\mathbb{E}\|X^2\| < \infty$ d'après le lemme de Borel-Cantelli.

L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est bien entendu la partie délicate de la démonstration. Elle se décompose en deux étapes, la première formée du lemme suivant qui exprime une extension vectorielle d'une loi des grands nombres pour des carrés.

Lemme 5. *Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach B telle que $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$, presque sûrement,*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i X_i \right\| \leqq 4 \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i X_i \right\|.$$

Démonstration. Soit $4M$ le membre de droite de l'inégalité que l'on se propose d'établir, supposé fini. En vertu du lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_n \mathbb{P}\left\{ \sup_{2^{n-1} \leqq k \leqq 2^n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{k} g_i X_i \right\| > 2(2M + 5\varepsilon) \right\} < \infty. \tag{12}$$

D'après les inégalités de Lévy, pour tout entier n,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{2^{n-1}<k\leqq 2^n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{k} g_i X_i \right\| > 2(2M+5\varepsilon)\right\}$$

$$\leqq 2\mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{2^n} g_i \frac{X_i}{\sqrt{2^n}} \right\| > 2M+5\varepsilon\right\}.$$

Soit, pour tout n et $i=1, \ldots, 2^n$,

$$u_i = u_i(n) = \frac{X_i}{\sqrt{2^n}} I_{\{\|X_i\| \leqq \varepsilon\sqrt{2^n}\}}.$$

Comme $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$,

$$\sum_n \mathbb{P}\left\{\exists i=1, \ldots, 2^n : u_i \neq \frac{X_i}{\sqrt{2^n}}\right\} < \infty.$$

Ainsi, (12) sera vérifiée dès que

$$\sum_n \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{2^n} g_i u_i \right\| > 2M+5\varepsilon\right\} < \infty.$$

En vertu de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen [HJ], pp. 164–165, plus précisément sa démonstration, nous constatons que

$$\mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{2^n} g_i u_i \right\| > 2M+5\varepsilon\right\} \leqq \left(\mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{2^n} g_i u_i \right\| > M+2\varepsilon\right\}\right)^2$$

où il est utilisé que $\|u_i\| \leqq \varepsilon$, $i=1, \ldots, 2^n$. Par la définition de M et le principe de contraction, il suffit finalement de montrer que

$$\sum_n \left(\mathbb{P}\left\{\mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{2^n} g_i u_i \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{2^n} g_i u_i \right\| > \varepsilon\right\}\right)^2 < \infty.$$

Or, ceci s'établit en suivant exactement le raisonnement conduisant à (8): cette somme est majorée, à une constante près, par

$$\frac{M}{\varepsilon^4} \sum_n 2^n \mathbb{E}\left(\frac{\|X\|^3}{2^{3n/2}} I_{\{\|X\| \leqq \varepsilon\sqrt{2^n}\}}\right)$$

$$= \frac{M}{\varepsilon^4} \mathbb{E}\left(\|X\|^3 \sum_n \frac{1}{\sqrt{2^n}} I_{\{\sqrt{2^n} \geqq \|X\|/\varepsilon\}}\right)$$

qui est finie sous $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$. Le lemme est ainsi démontré.

Nous concluons maintenant la démonstration du théorème. Si G désigne la variable gaussienne limite de la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, il existe, pour tout entier

$k \geqq 1$, un sous-espace de dimension finie F_k de B tel que si T_k est l'application quotient $B \to B/F_k$, on ait

$$\mathbb{E}\| T_k(G)\| < \frac{1}{4k};$$

comme $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$, F_k peut être choisi pour satisfaire également

$$\mathbb{E}\| T_k(X)\|^2 < \frac{1}{k^3}. \tag{13}$$

Pour tout k, $T_k(X)$ vérifie le TLC dans B/F_k de gaussienne limite $T_k(G)$; d'après [GZ], Lemma 2.9, la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\, T_k(X_i)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également étroitement vers cette limite $T_k(G)$. Ces suites étant bornées dans tous les L_p, $p<2$ (d'après la démonstration de la proposition 2 ou le commentaire faisant suite à celle du lemme 3), il y a convergence des moments et nous avons donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} g_i\, T_k(X_i)\right\| = \mathbb{E}\| T_k(G)\| < \frac{1}{4k} \tag{14}$$

pour tout k, ainsi que le résultat homologue pour X. Pour tout $k \geqq 1$, désignons alors par Ω_k^1 l'événement presque sûr du lemme 5 appliqué à $T_k(X)$ dans B/F_k, et Ω_0^1 celui correspondant à X elle-même. Posons en outre

$$\Omega_k^2 = \left\{\omega\in\Omega\colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| T_k(X_i(\omega))\|^2 = \mathbb{E}\| T_k(X)\|^2\right\}.$$

Soit $\Omega_0 = \Omega_0^1 \cap \bigcap_{k\geqq 1} (\Omega_k^1 \cap \Omega_k^2)$; bien entendu $\mathbb{P}(\Omega_0)=1$, et Ω_0 est indépendant de de la suite gaussienne $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Nous montrons que pour tout ω de Ω_0, la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\, X_i(\omega)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement. Comme elle est déjà bornée en probabilité puisque $\omega\in\Omega_0^1$, il nous suffit de montrer (cf. e.g., [AG], p. 23) qu'il existe, pour tout $\varepsilon>0$, un sous-espace F de dimension finie de B d'application quotient associée T et un entier n_0 tels que pour tout $n \geqq n_0$, on ait

$$\mathbb{P}_\lambda\left\{\left\| T\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} g_i\, X_i(\omega)\right)\right\| \leqq \varepsilon\right\} \geqq 1-\varepsilon.$$

On peut bien entendu supposer ε de la forme $2/k$ où k est un entier $\geqq 1$. Choisissant alors $T = T_k$, $\omega\in\Omega_k^1$ et (14) déterminent un entier n_1 tel que pour tout $n \geqq n_1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i\, T_k(X_i(\omega))\right\| > \frac{2}{k}\right\} \\
&\quad \leqq \mathbb{P}_\lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i\, T_k(X_i(\omega))\right\| - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i\, T_k(X_i(\omega))\right\| > \frac{1}{k}\right\}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer à cette dernière probabilité l'inégalité de concentration gaussienne d'origine isopérimétrique ([B], [P2], p. 176); elle permet de majorer cette probabilité par

$$\exp\left(-\frac{k^{-2}}{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|T_k(X_i(\omega))\|^2}\right).$$

Comme $\omega\in\Omega_k^2$, par (13), pour $n\geqq n_2\geqq n_1$ assez grand, cette quantité est estimée par

$$\exp\left(-\frac{k^{-2}}{2k^{-3}}\right)=\exp\left(-\frac{k}{2}\right)\leqq\frac{2}{k}.$$

La conclusion s'ensuit. (A noter qu'il n'est pas nécessaire d'invoquer l'inégalité de concentration isopérimétrique lors du dernier argument: la technique de martingale de Yurinskii déjà utilisée antérieurement fait aussi l'affaire ici.)

Pour se convaincre que les suites $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i X_i(\omega)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\omega\in\Omega_0$ convergent toutes vers la même loi limite, supposons pour simplifier B séparable (ce qui nous est permis car X est de Radon). Désignons par $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans B_1' pour la topologie faible. Si G désigne la loi gaussienne limite de la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, le théorème sur $\mathbb{R}$, dont la preuve est évidente, indique que pour tout j, il existe un événement Ω_j de probabilité 1 et indépendant de (g_i) tel que pour tout ω de Ω_j

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} g_i f_j(X_i(\omega))\to\mathcal{N}(0,\mathbb{E}f_j^2(X))=f_j(G)\qquad\text{en loi.}$$

Si l'on remplace alors Ω_0 par $\Omega_0\cap\bigcap_j\Omega_j$, toujours de probabilité pleine, et si G_ω désigne la limite de la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\ X_i(\omega)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il est clair par densité que toutes les G_ω pour $\omega\in\Omega_0$ suivent la même loi que G. L'assertion est établie et le théorème démontré.

4. Un exemple

Nous construisons dans ce paragraphe un exemple montrant que la condition (i) sur la fonction de répartition de la norme de la variable X ne peut être supprimée dans le théorème 1 en général; autrement dit, nous construisons une variable aléatoire X, à valeurs dans l'espace de Banach c_0 des suites réelles tendant vers 0, vérifiant le critère des petites boules mais telle que $\limsup_{t\to\infty} t^2\,\mathbb{P}\{\|X\|>t\}>0$.

Sur l'intervalle [0, 1], soit, pour tout entier $l\geqq 1$, une partition $\mathscr{A}_l$ de $[2^{-l}, 2^{-(l-1)}[$ en q_l ensembles de même mesure $(A_{l,q})_{q\leqq q_l}$. On définit une variable aléatoire X sur $[0, 1] \times \{-1, +1\}$, muni de sa probabilité produit naturelle $d\omega \times (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1})$, à valeurs dans c_0 en posant: si $\omega \in A_{l,q}$

$$X(\omega, \pm 1) = \pm \sqrt{2^l}\, e_{q_1 + \ldots + q_{l-1} + q}$$

où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la base canonique de c_0. Il est clair que

$$\mathbb{P}\{\|X\| > \sqrt{2^l}\} = \frac{1}{2^l}$$

pour tout entier l de sorte que $\limsup_{t \to \infty} t^2\, \mathbb{P}\{\|X\| > t\} > 0$ et X ne vérifie pas le TLC. Nous nous proposons de montrer que X vérifie cependant le critère des petites boules. Une réalisation d'une suite de copies indépendantes de X peut être obtenue en considérant $\Omega = ([0, 1] \times \{-1, +1\})^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité produit et en définissant les X_i comme les applications coordonnées: si $\omega = ((\omega_i), (\varepsilon_i)) \in \Omega$, $X_i(\omega) = X(\omega_i, \varepsilon_i)$. Le problème est de trouver une suite (q_l), croissant suffisament vite, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geqq n_0(\varepsilon)$ assez grand on ait

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\| < \varepsilon\right\} > \alpha(\varepsilon) > 0.$$

Comme nous allons le voir, le choix de $q_l \geqq l^2$ pour tout l (par exemple) répond à notre attente. Soit n un entier fixé, plus grand que $n_0(\varepsilon) = 2\varepsilon_0^{-2}$ où nous avons posé $\varepsilon_0 = 10^{-2}\varepsilon$ pour soulager les notations. Désignons par $k \geqq 1$ le plus grand entier tel que l'on ait $2^k \leqq \varepsilon_0^2 n$. Posons

$$B = \left\{(\omega_i) : \forall i \leqq n,\ \omega_i \geqq \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Clairement

$$\mathbb{P}(B) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n \geqq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{\varepsilon_0^{-2} \cdot 2^{k+1}} \geqq \exp(-4\varepsilon_0^{-2}) = \beta(\varepsilon) > 0.$$

Posons en outre

$$C = \left\{(\omega_i) : \forall l \leqq k,\ \forall A \in \mathscr{A}_l,\ \operatorname{Card}\{i \leqq n : \omega_i \in A\} \leqq 4 \max\left(1, \frac{K(\varepsilon)\, n}{2^l \sqrt{q_l}}\right)\right\}$$

où $K(\varepsilon) \geqq 1$ est à déterminer en fonction de ε. Nous montrons d'abord que $\mathbb{P}(B \cap C) > \gamma(\varepsilon) > 0$ indépendamment de n. A cet effet, nous faisons usage de l'inégalité binomiale usuelle, telle que décrite par exemple dans le paragraphe 4.7 de [GZ], pour obtenir:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C^c) &\leqq \sum_{l \leqq k} \sum_{A \in \mathscr{A}_l} \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n I_{\{\omega_i \in A\}} > 4 \max\left(1, \frac{K(\varepsilon)\, n}{2^l \sqrt{q_l}}\right)\right\} \\ &\leqq \sum_l \left(\frac{e}{4K(\varepsilon)}\right)^4 \frac{1}{q_l} \leqq 2\left(\frac{e}{4K(\varepsilon)}\right)^4.\end{aligned}$$

La constante $K(\varepsilon)$ peut ainsi être choisie pour que $\mathbb{P}(C^c) < \beta(\varepsilon)/2$ de sorte que $\mathbb{P}(B \cap C) > \beta(\varepsilon)/2$.

L'observation de base est alors la suivante: si $(\omega_i) \in B \cap C$, pour que $\|S_n/\sqrt{n}\| < \varepsilon$ il faut et il suffit que

$$\forall l \leqq k, \ \forall A \in \mathscr{A}_l, \ |\sum_{i \in I_A} \varepsilon_i| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}$$

où $I_A = \{i \leqq n : \omega_i \in A\}$ a un cardinal plus petit que $4 \max\left(1, \frac{K(\varepsilon)\, n}{2^l \sqrt{q_l}}\right)$. En vertu du point précédent et du théorème de Fubini, il va suffire de montrer que, conditionnellement en $(\omega_i) \in B \cap C$,

$$\mathbb{P}\left\{\forall l \leqq k, \forall A \in \mathscr{A}_l : |\sum_{i \in I_A} \varepsilon_i| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}\right\} > \delta(\varepsilon) > 0,$$

c'est-à-dire par indépendance

$$\Pi = \prod_{l \leqq k} \prod_{A \in \mathscr{A}_l} \mathbb{P}\left\{|\sum_{i \in I_A} \varepsilon_i| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}\right\} > \delta(\varepsilon) > 0.$$

Un élément (ω_i) de $B \cap C$ est donc fixé. Comme $|\sum_{i \in I_A} \varepsilon_i| \leqq \operatorname{Card} I_A$ et $\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{2^l} > 4$, il suffit de considérer dans les produits précédents les A de $\mathscr{A}_l$, $l \leqq k$, pour lesquels

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}} \leqq \operatorname{Card} I_A \leqq \frac{4K(\varepsilon)\, n}{2^l \sqrt{q_l}}. \tag{15}$$

D'aprés l'inégalité de Berry-Esseen (cf. par exemple [H], p. 6), pour tout A de $\mathscr{A}_l$, $l \leqq k$,

$$\mathbb{P}\left\{|\sum_{i \in I_A} \varepsilon_i| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}\right\} \geqq 2 \int_0^a e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\operatorname{Card} I_A}}$$

où $a = \varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{2^l}\sqrt{\operatorname{Card} I_A}$. Si $a \geqq 1$, la partie gauche de (15) et le choix de ε_0 montrent immédiatement que la probabilité précédente est plus grande que 1/4, alors que pour $a \leqq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{|\sum_{i \in I_A} \varepsilon_i| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}\right\} &\geqq \frac{2a}{\sqrt{2\pi e}} - \frac{2}{\sqrt{\operatorname{Card} I_A}} \\
&\geqq \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Card} I_A}} \left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}\sqrt{2^l}} - 2\right) \\
&\geqq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{3\sqrt{2^l}\sqrt{\operatorname{Card} I_A}} \geqq \frac{\varepsilon}{6\sqrt{K(\varepsilon)}} q_l^{1/4}
\end{aligned}$$

où cette fois nous avons employé la partie droite de (15). Ainsi, dans tous les cas, pour tout A de $\mathscr{A}_l$, $l \leqq k$,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i\in I_A}\varepsilon_i\right|<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}\right\}\geqq\min\left(\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{6\sqrt{K(\varepsilon)}}q_l^{1/4}\right).$$

Nous allons utiliser cette minoration lorsque $l\in L=\{m\leqq k\colon q_m\leqq 10^2 K(\varepsilon)^2\varepsilon^{-4}\}$. Le choix de L est motivé par l'estimation sous-gaussienne usuelle qui montre que, sur L^c,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i\in I_A}\varepsilon_i\right|<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{2^l}}\right\}&\geqq 1-2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2^{l+1}\operatorname{Card} I_A}\right)\\ &\geqq 1-2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8K(\varepsilon)}\sqrt{q_l}\right)\\ &\geqq\exp\left[-4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8K(\varepsilon)}\sqrt{q_l}\right)\right]\end{aligned}$$

car $1-x\geqq\exp(-2x)$ si $0<x<3/4$ et

$$2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8K(\varepsilon)}\sqrt{q_l}\right)<\frac{3}{4}$$

quand $l\in L^c$. Il résulte de ces calculs que nous avons obtenu la minoration:

$$\Pi\geqq\prod_{l\in L}\left[\min\left(\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{6\sqrt{K(\varepsilon)}}q_l^{1/4}\right)\right]^{q_l}\prod_{l\in L^c}\exp\left[-4q_l\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8K(\varepsilon)}\sqrt{q_l}\right)\right].$$

Pour constater que $\Pi>\delta(\varepsilon)>0$, il suffit de noter que si $q_l\geqq l^2$ pour tout l,

$$\sum_l q_l\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8K(\varepsilon)}\sqrt{q_l}\right)<\infty;$$

ceci borne inférieurement le second produit dans l'inégalité précédente; le premier ne fait pas problème puisque fini. La conclusion s'ensuit.

Remerciements. Nous remercions vivement J. Zinn de nous avoir proposé et incité d'inclure dans cette rédaction le théorème 4 obtenu lors du séjour du premier auteur à l'Université Texas A & M durant le second semestre de 1986.

Références

[AAG] de Acosta, A., Araujo, A., Giné, E.: On Poisson measures, Gaussian measures, and the central limit theorem in Banach spaces. Adv. Probab., New York: Dekker 1978

[AG] Araujo, A., Giné, E.: The central limit theorem for real and Banach space valued random variables. New York: Wiley 1980

[B] Borell, C.: The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. Invent. Math. **30**, 207–216 (1975)

[D] Dudley, R.M.: The size of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. J. Funct. Anal. **1**, 290–330 (1967)

[DHJS] Dudley, R.M., Hoffmann-Jørgensen, J., Shepp, L.: On the lower tail of Gaussian seminorms. Ann. Probab. **7**, 319–342 (1979)

[F] Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'été de Probabilités de St-Flour 1974, Lect. Notes Math. **480**, 1–96 (1975)

[GZ] Giné, E., Zinn, J.: Some limit theorems for empirical processes. Ann. Probab. **12**, 929–989 (1984)

[H] Hall, P.: Rates of convergence in the central limit theorem. Res. Notes Math. Pitman: Boston (1982)

[HJ] Hoffmann-Jørgensen, J.: Sums of independent Banach space valued random variables. Stud. Math. **52**, 159–186 (1974)

[IN] Ito, K., Nisio, M.: On the oscillation functions of Gaussian processes. Math. Scand. **22**, 209–223 (1968)

[J] Jain, N.C.: Central limit theorem in a Banach space. Probability in Banach spaces. Lect. Notes Math. **526**, 113–130, (1976)

[K] Kanter, M.: Probability inequalities for convex sets. J. Multivariate Anal. 6, 222–236 (1978)

[LC] Le Cam, L.: Remarques sur le théorème limite central dans les espaces localement convexes. Les Probabilités sur les structures algébriques, 233–249, C.N.R.S., Paris (1970)

[L] Ledoux, M.: On the small balls condition in the central limit theorem in uniformly convex spaces. Geometrical and statistical aspects of Probability in Banach spaces, Lect. Notes Math. **1193**, 44–52 (1986)

[LT1] Ledoux, M., Talagrand, M.: Conditions d'intégrabilité pour les multiplicateurs dans le TLC banachique. Ann. Probab. **14**, 916–921 (1986)

[LT2] Ledoux, M., Talagrand, M.: Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. Ann. Probab. A paraître

[LT3] Ledoux, M., Talagrand, M.: Limit theorems for empirical processes. Preprint (1986)

[MP] Matsak, J.K., Plitchko, A.N.: The central limit theorem in Banach spaces with an unconditional basis. Communication faite à la Conférence Bernoulli, Tachkent (1986)

[P1] Pisier, G.: Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975–76, exposés 3 et 4, Ecole Polytechnique, Paris (1976)

[P2] Pisier, G.: Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. Probability and Analysis, Lect. Notes Math. **1206**, 167–241 (1986)

[PZ] Pisier, G., Zinn, J.: On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p $(2 \leqq p < \infty)$. Z. Warscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **41**, 289–304 (1978)

[T] Talagrand, M.: Solution du problème de Glivenko-Cantelli. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **298**, 213–216 (1984)

[Y] Yurinskii, V.V.: Exponential bounds for large deviations. Theor. Probab. Appl. **19**, 154–155 (1974)

Received March 3, 1987