Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 7, 235–247 (1967)

Mischende Transformationen auf Mannigfaltigkeiten unendlichen Maßes

KLAUS KRICKEBERG

Eingegangen am 5. November 1966

1. Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Häufigkeit oder Seltenheit von mischenden Transformationen in topologischen Maßräumen unendlichen Maßes, wie sie in [5] definiert wurden. Diesem Mischungsbegriff entspricht im Fall eines Raums mit endlichem Maß der Begriff der starken Mischung. Als Analogon zum Satz von ROCHLIN [1, S. 77], der sich auf umkehrbare Transformationen in Räumen endlichen Maßes bezieht, beweisen wir zunächst den Satz 3, wonach auch über Räumen unendlichen Maßes die Menge der mischenden Transformationen von erster Kategorie hinsichtlich der schwachen Topologie im Raum aller maßtreuen Transformationen ist. Zur Konstruktion von Mischungen ziehen wir sodann die Theorie der Markoffschen Ketten heran: Von der Verschiebungstransformation im Raum der Trajektorien einer Markoffschen Kette mit beiderseits unendlichem diskreten Zeitbereich ausgehend, gelangen wir, vermöge geeigneter Isomorphismen, zu Mischungen in allgemeineren topologischen Maßräumen. Das so bewiesene Theorem besagt, daß es sowohl hinreichend viele sehr langsam mischende Automorphismen mit unendlichem ergodischem Index, als auch hinreichend viele mischende Automorphismen mit vorgeschriebenem endlichem ergodischem Index, als auch hinreichend viele sehr schnell mischende Automorphismen (die dann nicht ergodisch sein können) gibt. Eine genauere Interpretation des Theorems findet sich vor seiner Formulierung und nach seinem Beweis. Wesentlich schwächere Sätze dieser Art waren in [5] angekündigt worden.

Es sei bemerkt, daß das von HALMOS herrührende Analogon unseres Theorems im Fall umkehrbarer Transformationen eines Raums endlichen Maßes gewöhnlich so formuliert wird [1, S. 78]: Die Menge der schwach mischenden Transformationen ist hinsichtlich der schwachen Topologie ein dichtes G_δ und damit von zweiter Kategorie. HALMOS beweist jedoch sogar, daß die Menge der stark mischenden Transformationen dicht liegt. Daß die schwach mischenden Transformationen außerdem ein G_δ darstellen, ergibt sich aus ihrer Charakterisierung im Hilbertschen Raum L_2 mittels eines Schlusses, den OXTOBY und ULAM [8] vorher auf ergodische Transformationen angewandt hatten.

2. Seltenheit mischender Transformationen

Die folgenden Definitionen sind in [5] näher erläutert worden. Ein *topologischer Maßraum* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ besteht aus einem vollständig regulären topologischen Raum X, dem sigma-Ring $\mathfrak{F}$ der Borelschen Mengen von X und einem sigma-endlichen straffen Maß μ auf $\mathfrak{F}$. Wie üblich bezeichnen $\mathfrak{L}_1(\mu)$ den Raum der μ-integrierbaren reellen Funktionen auf X und $\|f\| = \int\limits_X |f|\, d\mu$ die Norm in $\mathfrak{L}_1(\mu)$. Insbesondere ist $\|1_A - 1_B\| = \mu(A + B)$, wobei 1_A die Indikatorfunktion von A und $+$ die Bildung der symmetrischen Differenz bedeutet. Eine Teilmenge A von X wird *fast randlos* genannt, wenn ihre Begrenzung das Maß 0 hat, d.h. ihre Indikatorfunktion fast überall stetig ist. Eine fast randlose Menge gehört dem Definitionsbereich der Vervollständigung von μ an, hat also in diesem Sinne ein Maß.

Ein *Homomorphismus* S des topologischen Maßraums $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ in einen anderen, $(X', \mathfrak{F}', \mu')$, ist eine maßtreue und fast überall stetige Abbildung von X in X'. Ein solcher Homomorphismus heißt ein *Isomorphismus* des ersten auf den zweiten Maßraum, wenn es einen Homomorphismus S' von $(X', \mathfrak{F}', \mu')$ in $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ gibt, so daß $S'(S(x)) = x$ für μ-fast alle x aus X und $S(S'(x')) = x'$ für μ'-fast alle x' aus X'. Wir nennen S' dann fast invers zu S.

Sodann sei T ein Endomorphismus des topologischen Maßraums $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, also eine fast überall stetige und maßtreue Transformation von X. Wir sagen, T *mische*, wenn es eine Mengenfolge (H_k) und eine Zahlenfolge (ϱ_n) mit den folgenden Eigenschaften gibt: H_k ist fast randlos, $0 < \mu(H_k) < \infty$ für jedes k, und $\mu(X - \bigcup H_k) = 0$; $0 < \varrho_n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B) \tag{1}$$

für alle fast randlosen Mengen A und B, die in wenigstens einem H_k enthalten sind. Diese Mischungseigenschaft von T ist natürlich invariant gegenüber Isomorphismen. Ferner gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n = \mu(X)$.

Die Folge (ϱ_n) ist asymptotisch eindeutig bestimmt, d.h. erfüllt T die Mischungsdefinition auch mit einem anderen Paar von Folgen (H_k') und (ϱ_n'), so wird $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n'/\varrho_n = 1$. Ist jedoch T mischend in bezug auf die Mengenfolge (H_k) und bildet (H_k') irgendeine andere Folge fast randloser Mengen endlichen und positiven Maßes mit $\mu(X - \bigcup\limits_k H_k') = 0$, so braucht T nicht mischend in bezug auf (H_k') zu sein, wie ein Beispiel von KRENGEL [3] zeigt. Durch Kompaktifikation mittels eines Punktes vom Maße 0 ergibt sich dabei auch, daß die Mischungsgleichung (1) nicht auf alle kompakten fast randlosen Mengen A und B zuzutreffen braucht. Bei den später auftretenden speziellen topologischen Maßräumen werden wir meist ganz bestimmte Folgen (H_k) verwenden.

Es sei $\mathfrak{T}$ der Raum aller maßtreuen Transformationen von $(X, \mathfrak{F}, \mu)$. Die Elemente von $\mathfrak{T}$ sind also im allgemeinen nicht fast überall stetig. Wir versehen $\mathfrak{T}$ mit der *schwachen Topologie* im üblichen Sinne: Ein Netz (T_α) in $\mathfrak{T}$ konvergiert schwach gegen eine Transformation T aus $\mathfrak{T}$, wenn für jede Funktion f aus $\mathfrak{L}_1(\mu)$ gilt

$$\lim_\alpha \|f \circ T_\alpha - f \circ T\| = 0. \tag{2}$$

Dies ist also die sogenannte starke Operatortopologie, wenn wir anstelle der Transformationen T von X die entsprechenden linearen Operatoren $f \to f \circ T$ in $\mathfrak{L}_1(\mu)$ betrachten. Da diese Operatoren die Norm in $\mathfrak{L}_1(\mu)$ erhalten, d.h.

$$\|f \circ T\| = \|f\|,$$

so genügt es, die Gültigkeit der Relation (2) nur bei allen Elementen f einer Menge, deren Linearkombinationen dicht in $\mathfrak{L}_1(\mu)$ liegen, zu fordern. Insbesondere reicht es aus zu verlangen, daß

$$\lim_{\alpha} \mu(T_\alpha^{-1} D + T^{-1} D) = 0 \tag{3}$$

ist für alle Mengen D eines Systems $\mathfrak{D}$ Borelscher Mengen, das die folgenden Eigenschaften hat: $\mathfrak{D}$ ist ein Boolescher Mengenring; jede Menge aus $\mathfrak{D}$ hat ein endliches Maß; zu jedem $A \in \mathfrak{F}$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $D \in \mathfrak{D}$ mit $\mu(A + D) < \varepsilon$, d. h. $\mathfrak{D}$ ist dicht in $\mathfrak{F}$ im Sinne der Topologie der stochastischen Konvergenz [4, S. 473].

Wir erhalten eine mit der schwachen Topologie verträgliche uniforme Struktur in $\mathfrak{T}$, indem wir als Basis des Nachbarschaftsfilters alle Mengen der Form

$$\{(S, T)\colon \|f_i \circ S - f_i \circ T\| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k\}$$

mit $f_i \in \mathfrak{L}_1(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ nehmen. Auch hier wieder reicht es, nur spezielle f_i wie oben zu betrachten. Wir legen allem folgendem diese uniforme Struktur zugrunde.

Im Rest des Kapitels setzen wir voraus, daß X entweder, im Fall $\mu(X) = \infty$, die Halbgerade $[0, \infty]$, oder, im Fall $\mu(X) < \infty$, das halboffene Intervall $[0, \mu(X)]$ sei, versehen mit der natürlichen Topologie, und μ das eindimensionale Lebesguesche Maß. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen und Formulierungen nehmen wir sogar an, daß $\mu(X) = 1$, falls $\mu(X) < \infty$. Unter einem dyadischen Intervall verstehen wir eine in X enthaltene Menge der Form $E_i^k = [(i-1)\, 2^{-k},\ i\, 2^{-k}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots$ Wir bezeichnen durch $\mathfrak{D}$ das System aller Teilmengen von X, die sich als Vereinigung endlich vieler dyadischer Intervalle darstellen lassen. Offenbar hat $\mathfrak{D}$ die oben postulierten Eigenschaften.

Satz 1. *Der Raum $\mathfrak{T}$ ist vollständig, und seine uniforme Struktur läßt sich durch eine Metrik erzeugen.*

Beweis. Der lineare Raum $\mathfrak{L}_1(\mu)$ ist separabel. Um eine Metrik der gewünschten Art zu erhalten, genügt es, eine in $\mathfrak{L}_1(\mu)$ dichte Folge (f_i) zu nehmen, in der kein Element fast sicher verschwindet, und

$$d(S, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|f_i \circ S - f_i \circ T\|}{2^n \|f_i\|}$$

zu setzen.

Es sei nun (T_n) eine Cauchysche Folge in $\mathfrak{T}$, d. h. $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mu(T_n^{-1} A + T_m^{-1} A) = 0$ für jede Borelsche Teilmenge A von X endlichen Maßes. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{L}_1(\mu)$ gibt es zu jedem solchen A eine Borelsche Menge UA, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \mu(UA + T_n^{-1} A) = 0\,. \tag{4}$$

Aus der Maßtreue von T_n folgt unmittelbar, daß

$$\mu(UA) = \mu(A)\,, \tag{5}$$

und hieraus und aus den entsprechenden Eigenschaften von T_n^{-1} ergibt sich

$$U\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U A_i \quad \text{fast überall,} \tag{6}$$

wenn $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) < \infty$ sowie

(7) $$U\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} U A_i \quad \text{fast überall}$$

und

(8) $$U(A_1 - A_2) = U A_1 - U A_2 \quad \text{fast überall,}$$

wenn $A_2 \subseteqq A_1$.

Mit Hilfe geläufiger Schlüsse, die hier der Bequemlichkeit halber kurz dargestellt werden mögen, zeigen wir, daß U durch eine Transformation T aus $\mathfrak{T}$ erzeugt wird in dem Sinne, daß

(9) $$U A = T^{-1} A \quad \text{fast überall}$$

für jedes A aus $\mathfrak{F}$ endlichen Maßes. Hierzu zerlegen wir X für jedes natürliche k in die dyadischen Intervalle E_i^k. Die Gleichung (6)—(8) benutzend, wählen wir sodann sukzessive für $k = 1, 2, \ldots$ Mengen B_i^k mit den folgenden Eigenschaften:

(10) $$B_i^k = U E_i^k \quad \text{fast überall;}$$

die B_i^k, $i = 1, 2, \ldots$ sind paarweise fremd mit der Vereinigung X; die $(k+1)$-te Zerlegung $(B_i^{k+1})_{i=1,2,\ldots}$ entsteht aus der k-ten Zerlegung $(B_i^k)_{i=1,2,\ldots}$ durch Unterteilung. Aus (5) und (10) resultiert

(11) $$\mu(B_i^k) = \mu(E_i^k)\,.$$

Wir definieren zu jedem k eine Abbildung S_k von X in sich, indem wir $S_k x$ für $x \in B_i^k$ als linken Endpunkt von E_i^k erklären. Aus $k \leqq l$ folgt dann $S_l x \in A_i^k$, wenn $x \in B_i^k$, also $|S_l x - S_k x| \leqq \mu(A_i^k)$ und somit $\lim\limits_{k,l\to\infty} \mu|S_l x - S_k x| = 0$. Daher existiert der Grenzwert $Tx = \lim\limits_{k\to\infty} S_k x$ und stellt eine Bairesche Funktion mit Werten in der abgeschlossenen Hülle von X dar.

Bei festem i und k betrachten wir einen Punkt x, für den $Tx \in E_i^k$. Ist Tx vom linken Endpunkt von E_i^k verschieden, so gilt $x \in B_i^k$. Ist Tx jedoch der linke Endpunkt von E_i^k und bezeichnet j_l für $k \leqq l$ den größten Index j mit $E_j^l \subseteqq E_i^k$, so wird $x \in B_{j_l}^l$. Wegen (11) ist aber $\mu\left(\bigcap_{l=k}^{\infty} B_{j_l}^l\right) = 0$, d. h. $x \in B_i^k$ trifft auf fast alle Punkte x mit der Eigenschaft $Tx \in E_i^k$ zu. Ebenso ergibt sich, daß Tx im Fall $\mu(X) = 1$ fast überall Werte annimmt, die kleiner als 1, d. h. in X gelegen sind. Hiernach und nach (10) stellt T, evtl. nach Abänderung in einer Menge vom Maße Null, eine Abbildung von X in sich dar, und $T^{-1} E_i^k = U E_i^k$ fast überall. Auf Grund der Wahl der A_i^k impliziert dies die Behauptung (9) bei beliebigem A aus $\mathfrak{F}$ endlichen Maßes. Aus (5) folgt dann, daß T maßtreu ist, also $T \in \mathfrak{T}$, und (4) und (9) schließen die schwache Konvergenz von (T_n) gegen T in sich, womit die Vollständigkeit von $\mathfrak{T}$ bewiesen ist.

Das folgende Lemma ist ein Analogon zu einem Satz von Halmos [1, S. 67], der sich auf den Fall $\mu(X) = 1$ bezieht.

Lemma 1. *Es sei $\mu(X) = \infty$, es seien $A_1, \ldots, A_n$ paarweise fremde Borelsche Mengen endlichen Maßes, $\varepsilon > 0$ und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ positive dyadische Zahlen derart, daß $|\mu(A_i) - \tau_i| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gibt es paarweise fremde Mengen $D_1, \ldots, D_n$ aus $\mathfrak{D}$ mit $\mu(D_i) = \tau_i$ und $\mu(A_i + D_i) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Wir setzen $\delta = \max_{i=1,\ldots,n} |\mu(A_i) - \tau_i|$ und wählen γ so, daß $0 < 2(2n+1)\gamma < \varepsilon - \delta$. Es seien $D_1'', \ldots, D_n''$ Mengen aus $\mathfrak{D}$, so daß $\mu(A_i + D_i'') < \gamma$. Wir setzen weiter $D_i' = D_i''(X - (D_1'' \cup \cdots \cup D_{i-1}''))$, $i = 1, \ldots, n$. Diese Mengen gehören wieder zu $\mathfrak{D}$, sie sind paarweise fremd, und wegen $\mu(D_i'' \cap D_j'') < 2\gamma$ für $i \neq j$ ist $\mu(D_i' + D_i'') < 2n\gamma$, also

$$\mu(A_i + D_i') < (2n+1)\gamma, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

woraus

$$|\mu(D_i') - \tau_i| < \delta + (2n+1)\gamma \tag{13}$$

folgt.

Wir betrachten zunächst die D_i' mit $\mu(D_i') > \tau_i$. Da die τ_i dyadische Zahlen sind, gibt es dazu Mengen $D_i \in \mathfrak{D}$, so daß $D_i \subseteqq D_i'$ und $\mu(D_i) = \tau_i$. Nach (13) wird

$$\mu(D_i' + D_i) = \mu(D_i' - D_i) = \mu(D_i') - \tau_i < \delta + (2n+1)\gamma,$$

also nach (12):

$$\mu(A_i + D_i) < \delta + 2(2n+1)\gamma < \varepsilon. \tag{14}$$

Sodann betrachten wir ein D_i' mit $\mu(D_i') < \tau_i$. Es sei $D = \bigcup_{j=1}^{n} D_j'$ und E_i eine Menge aus $\mathfrak{D}$, so daß $E_i \subseteqq X - D$ und $\mu(E_i) = \tau_i - \mu(D_i')$. Wir setzen $D_i = D_i' \cup E_i$. Dann wird $D_i \in \mathfrak{D}$, $\mu(D_i) = \tau_i$ und nach (13):

$$\mu(D_i' + D_i) = \mu(D_i - D_i') = \mu(E_i) = \tau_i - \mu(D_i') < \delta + (2n+1)\gamma,$$

was nach (12) wieder (14) impliziert. Ferner sind $D_1, \ldots, D_n$ paarweise fremd.

Sind E und D zwei dyadische Intervalle gleicher Länge, so bezeichne $T_{E,D}$ die monoton wachsende lineare Abbildung von D auf E.

Eine Transformation P von X heißt eine *Permutation*, wenn es paarweise fremde dyadische Intervalle $E_1, \ldots, E_m$ gleicher Länge und eine Permutation σ von $\{1, \ldots, m\}$ gibt, so daß P innerhalb von E_j mit $T_{E_{\sigma(j)}, E_j}$ übereinstimmt und außerhalb von $E_1 \cup \cdots \cup E_m$ gleich der identischen Abbildung ist. Hiernach ist eine Permutation maßtreu, bijektiv und nebst ihrer Umkehrung fast überall stetig, also ein Automorphismus von X.

Satz 2. *Die Permutationen liegen schwach dicht in* $\mathfrak{T}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\mu(X) = \infty$. Es genügt, die Existenz einer Permutation P in einer beliebigen Umgebung einer Transformation T aus $\mathfrak{T}$ der Form $\mathfrak{U} = \{S\colon S \in \mathfrak{T},\ \mu(S^{-1}F_i + T^{-1}F_i) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$ nachzuweisen, wobei die F_i paarweise fremde Mengen aus $\mathfrak{D}$ bilden. Die Mengen $A_i = T^{-1}F_i$ sind paarweise fremd mit $\tau_i = \mu(A_i) = \mu(F_i) < \infty$. Nach dem Lemma gibt es daher disjunkte Mengen $D_1, \ldots, D_n \in \mathfrak{D}$ mit

$$\mu(A_i + D_i) < \varepsilon, \quad \mu(D_i) = \mu(F_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es seien $E_1, \ldots, E_m$ paarweise fremde dyadische Intervalle gleicher Länge derart, daß jedes F_i und jedes D_i die Vereinigung gewisser E_j wird, und es sei $E = E_1 \cup \cdots \cup E_m$. Wegen $\mu(D_i) = \mu(F_i)$ ist bei festem i die Anzahl der in D_i enthaltenen E_j gleich der der in F_i enthaltenen, und wir definieren eine Transformation P innerhalb von D_i, indem wir jedes in D_i enthaltene E_j vermöge eines T_{E_l, E_j}, auf ein in F_i enthaltenes E_l so abbilden, daß die Bilder verschiedener E_j

verschieden sind. Die Anzahl der in keinem D_i enthaltenen E_j ist gleich der der in keinem F_i enthaltenen, und wir erklären P in $E - \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, indem wir jedes E_j der ersten Art auf ein E_l der zweiten Art vermöge T_{E_l, E_j} so abbilden, daß P auch hier injektiv wird. Definieren wir schließlich P außerhalb von E als die identische Abbildung, so ist P eine Permutation. Ferner gilt $P^{-1} F_i = D_i$, also

$$\mu(P^{-1} F_i + T^{-1} F_i) = \mu(D_i + A_i) < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{d. h. } P \in \mathfrak{U}.$$

Im Fall $\mu(X) = 1$ schließen wir ganz analog, indem wir den schon erwähnten Satz von HALMOS anstelle des Lemmas benutzen. Es sei erwähnt, daß das Weak Approximation Theorem in [1, S. 65] insofern schwächer als der gegenwärtige Satz 2, mit $\mu(X) = 1$, ist, als HALMOS den Raum der umkehrbaren Transformationen zugrunde legt, während $\mathfrak{T}$ auch alle nicht umkehrbaren maßtreuen Transformationen enthält. In der Tat folgt aus Satz 2, daß die Automorphismen, also erst recht die umkehrbaren maßtreuen Transformationen, schwach dicht in $\mathfrak{T}$ liegen. Weiter haben wir unmittelbar das

Korollar 1. *Der Raum $\mathfrak{T}$ ist schwach separabel.*

Es gibt nämlich nur abzählbar viele Permutationen.

Eine Transformation T aus $\mathfrak{T}$ heißt *periodisch*, wenn es einen Index $n > 0$ gibt, so daß $T^n = I$, der identischen Abbildung, wird. Eine solche Transformation ist notwendig bijektiv mit $T^{-n} = I$. Da eine mit Hilfe der dyadischen Intervalle $E_1, \ldots, E_m$ definierte Permutation P die Gleichung $P^{m!} = I$ erfüllt, so hat der Satz 2 das

Korollar 2. *Die periodischen Transformationen liegen schwach dicht in $\mathfrak{T}$.*

Nach Satz 1 gilt für $\mathfrak{T}$ der Bairesche Satz [7, S. 320—321], und Mengen erster Kategorie haben die übliche Interpretation als „kleine“ Mengen. Wir beweisen den

Satz 3. *Es sei (H_k) eine Mengenfolge mit den in der Definition einer mischenden Transformation formulierten Eigenschaften. Dann ist die Menge der bezüglich (H_k) mischenden Transformationen von erster Kategorie in $\mathfrak{T}$.*

Beweis. Wieder betrachten wir zuerst den Fall $\mu(X) = \infty$. Es sei $\mathfrak{P}$ die Menge der periodischen Transformationen; P ist also schwach dicht in $\mathfrak{T}$ nach dem Korollar 2. Auf Grund der Eigenschaften der Folge (H_k) gibt es einen Index k derart, daß $0 < \mu(H_k) < \mu(H_{k+1}) < \infty$; zur Abkürzung setzen wir $A = H_k$ und $B = H_{k+1}$. Wir wählen eine Zahl γ so, daß

$$0 < \gamma < \frac{\mu(A)}{\mu(B)} - \frac{\mu(A)^2}{\mu(B)^2}$$

und setzen

$$\mathfrak{M}_l = \left\{T\colon T \in \mathfrak{T}, \quad \mu((T^{-l} B) \cap B) > 0\,, \quad \left| \frac{\mu((T^{-l} A) \cap A)}{\mu((T^{-l} B) \cap B)} - \frac{\mu(A)^2}{\mu(B)^2} \right| \leqq \gamma \right\}.$$

Weiter sei $\mathfrak{N}_n = \bigcap_{l=n}^{\infty} \mathfrak{M}_l$ und $\mathfrak{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n = \liminf_{l \to \infty} \mathfrak{M}_l$. Nach Definition einer bezüglich (H_k) mischenden Transformation gehört jede solche Transformation zu $\mathfrak{N}$. Um den Satz zu beweisen, genügt es daher zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{N}_n$ nirgends dicht in $\mathfrak{T}$ ist. Es sei $\mathfrak{K}_n$ die schwach abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{N}_n$. Wir behaupten, daß

$\mathfrak{P} \cap \mathfrak{K}_n = \emptyset$. In der Tat: ist $T \in \mathfrak{K}_n$ und $n \leqq l$, so gilt nach Definition von $\mathfrak{K}_n$ entweder $\mu((T^{-l}B) \cap B) = 0$ oder gleichzeitig $\mu((T^{-l}B) \cap B) > 0$ und

$$\left| \frac{\mu((T^{-l}A) \cap A)}{\mu((T^{-l}B) \cap B)} - \frac{\mu(A)^2}{\mu(B)^2} \right| \leqq \gamma .$$

Ist aber $T \in \mathfrak{P}$, so gibt es ein l mit $n < l$ und $T^{-l} = I$, also $\mu((T^{-l}B) \cap B) = = \mu(B) > 0$ und

$$\left| \frac{\mu((T^{-l}A) \cap A)}{\mu((T^{-l}B) \cap B)} - \frac{\mu(A)^2}{\mu(B)^2} \right| = \frac{\mu(A)}{\mu(B)} - \frac{\mu(A)^2}{\mu(B)^2} > \gamma .$$

Hieraus folgt $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{K}_n = \emptyset$. Da $\mathfrak{P}$ dicht in $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}_n$ abgeschlossen ist, so liegt daher $\mathfrak{K}_n$ und erst recht $\mathfrak{N}_n$ nirgends dicht in $\mathfrak{T}$.

Zum Fall $\mu(X) = 1$ bemerken wir, daß dort ein Endomorphismus T nach [5] dann und nur dann mischend in bezug auf irgend eine Folge (H_k) ist, wenn er im klassischen Sinne eine stark mischende Transformation darstellt. Nach dem Muster des Beweises des Satzes von Rochlin [1, S. 77] läßt sich sehr leicht zeigen, daß sogar die Menge aller stark mischenden Transformationen, nicht nur die der stark mischenden Endomorphismen, d. h. stark mischenden fast überall stetigen Transformationen, von erster Kategorie in $\mathfrak{T}$ ist. Man beachte, daß im Rochlinschen Satz selbst anstelle von $\mathfrak{T}$ der Raum $\mathfrak{T}_0$ der umkehrbaren maßtreuen Transformationen zugrunde gelegt wird.

Andererseits könnten wir auch in den gegenwärtigen Sätzen 1—3 mit $\mu(X) = \infty$ leicht $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}_0$ ersetzen. Die uniforme Struktur von $\mathfrak{T}_0$ wäre diejenige, die als Basis des Nachbarschaftsfilters das System der Mengen der Form

$$\{(S, T) \colon \|f_i \circ S - f_i \circ T\| < \varepsilon , \quad \|f_i \circ S^{-1} - f_i \circ T^{-1}\| < \varepsilon , \quad i = 1, \ldots, k\}$$

hätte.

3. Häufigkeit mischender Transformationen

Wir betrachten zunächst wieder einen beliebigen topologischen Maßraum $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, setzen jedoch von nun an voraus, daß $\mu(X) = \infty$.

Lemma 2. *Es sei T ein mischender Automorphismus in bezug auf eine Mengenfolge (H_k), B eine fast randlose Teilmenge eines H_k mit $\mu(B) > 0$ und l eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine in B enthaltene fast randlose Menge A positiven Maßes, so daß die Mengen $A, T^{-1}A, \ldots, T^{-l+1}A$ paarweise fremd sind.*

Beweis. Wir setzen

$$C = B \cup TB \cup \cdots \cup T^{l-2}B \tag{15}$$

und behaupten, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C \cap T^{-n}C) = 0 . \tag{16}$$

Sind nämlich l_1 und l_2 feste positive Indizes, so folgt aus (1), aus $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n = \infty$ und aus $\mu(T^{l_1}B \cap T^{-n}T^{l_2}B) = \mu(T^{l_1}(B \cap T^{-n+l_2-l_1}B)) = \mu(B \cap T^{-n+l_2-l_1}B)$, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(T^{l_1}B \cap T^{-n}T^{l_2}B) = 0$ und damit (16).

Als nächstes beweisen wir, daß die Inklusion

$$B \subseteqq \bigcup_{i=1}^{l-1} T^{-i}B \tag{17}$$

unmöglich ist; dabei sei (17), ebenso wie die folgenden Mengenrelationen, bis auf Nullmengen zu verstehen. Hierzu zeigen wir, daß aus (17) folgt

$$C \subseteqq T^{-1} C \,, \tag{18}$$

wobei C die durch (15) definierte Menge sei. Ist nämlich $x \in T^j B$, $j = 0, \ldots, l-3$, so wird $Tx \in T^{j+1} B \subseteqq C$. Ist jedoch $x \in T^{l-2} B$, so können wir $x = T^{l-2} y$ mit $y \in B$ schreiben. Wegen (17) gibt es ein i mit $1 \leqq i \leqq l-1$, so daß $y \in T^{-i} B$. Im Fall $i < l-1$ wird dann $x = T^{l-2} y \in T^{l-2-i} B$ mit $0 \leqq l-2-i \leqq l-3$, also $Tx \in C$, wie gerade vorher bemerkt. Im Fall $i = l-1$ hingegen wird $x = T^{l-2} y \in T^{-1} B$, also $Tx \in B \subseteqq C$. Hiernach ist $Tx \in C$ für jedes $x \in C$, und das bedeutet (18). Daraus wieder folgt $C \subseteqq T^{-1} C \subseteqq T^{-2} C \subseteqq \cdots \subseteqq T^{-n} C$ bei beliebigem n, d. h. $C \cap T^{-n} C = C$ im Widerspruch zu (16) und $\mu(C) > 0$.

Setzen wir schließlich $A = B \cap \big(X - \bigcup_{i=1}^{l-1} T^{-i} B\big)$, so ist A fast randlos, $0 < \mu(A)$ und $A \subseteqq B$. Ferner gilt $A \cap T^{-i} B = \emptyset$, $i = 1, \ldots, l-1$, also erst recht $A \cap T^{-i} A = \emptyset$, $i = 1, \ldots, l-1$, woraus bei beliebigem i und j mit $0 \leqq i < j \leqq l-1$ folgt $T^{-i} A \cap T^{-j} A = T^{-i}(A \cap T^{-(j-i)} A) = \emptyset$.

Bis auf weiteres sei nun wieder $X = [0, \infty[$ und μ das Lebesguesche Maß. Auch $\mathfrak{D}$ habe die frühere Bedeutung. Eine Transformation Q werde eine *zyklische Permutation* genannt, wenn folgendes der Fall ist: es gibt paarweise fremde dyadische Intervalle $G_1, \ldots, G_l$ gleicher Länge und eine zyklische Permutation τ von $\{1, \ldots, l\}$, so daß Q innerhalb von G_k mit $T_{G_{\tau(k)}, G_k}$ übereinstimmt und außerhalb von $G_1 \cup \cdots \cup G_l$ gleich der identischen Abbildung ist.

Lemma 3. *Es seien $E_1, \ldots, E_m$ paarweise fremde dyadische Intervalle gleicher Länge, P eine Permutation, die die E_j permutiert, d. h. mit Hilfe einer Permutation σ von $\{1, \ldots, m\}$ und der Transformationen $T_{E_{\sigma(j)}, E_j}$ wie oben erklärt ist, und $\varepsilon > 0$. Sind dann $G_1, \ldots, G_l$ gleichlange disjunkte dyadische Intervalle einer Länge kleiner als $\varepsilon/2$, so daß jedes E_j die Vereinigung gewisser G_k darstellt und $\bigcup_{j=1}^{m} E_j = \bigcup_{k=1}^{l} G_k$, so gilt bei passender Numerierung der G_k folgendes: die Abbildung*

$$Qx = \begin{cases} T_{G_k, G_{k+1}} x\,, & \text{wenn} \quad x \in G_{k+1}\,,\ k = 1, \ldots, l-1\,, \\ T_{G_l, G_1}\,, & \text{wenn} \quad x \in G_1\,, \\ x & \text{sonst} \end{cases} \tag{19}$$

ist eine zyklische Permutation mit

$$\mu(Q^{-1} E_j + P^{-1} E_j) < \varepsilon\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{20}$$

Beweis (nach Halmos [1, S. 65]). Wir gehen aus von irgend einer Numerierung der G_k. Alle E_j enthalten natürlich dieselbe Anzahl von Intervallen G_k; bei festem j werden wir von einem ersten, zweiten usw. in E_j gelegenen G_k sprechen gemäß ihrer gegebenen Numerierung.

Wir betrachten zunächst den mit $j_1 = 1$ beginnenden Zyklus der Permutation σ. Ist $\sigma(1) = 1$, d. h. führt P das Intervall E_1 in sich über, so möge Q das erste in E_1 enthaltene Intervall G_k auf das zweite abbilden, dieses auf das dritte usw., bis Q das vorletzte in E_1 enthaltene Intervall G_k in das letzte transformiert. Ist hingegen $\sigma(1) \neq 1$, d. h. besteht der mit 1 beginnende Zyklus von σ aus mindestens zwei Zahlen, so möge Q das erste in E_1 enthaltene Intervall G_k auf das erste in $E_{\sigma(1)}$ enthaltene G_k abbilden. Ist auch $\sigma^2(1) \neq 1$, d. h. transformiert P das Intervall $E_{\sigma(1)}$ nicht zurück nach E_1, so möge Q das erste in $E_{\sigma(1)}$ gelegene G_k in das erste in $E_{\sigma^2(1)}$ gelegene weiterbringen. In dieser Weise fahren wir fort bis zum ersten Index q mit $\sigma^q(1) = 1$; dann möge Q das erste in $E_{\sigma^{q-1}(1)}$ enthaltene G_k auf das zweite in E_1 enthaltene abbilden. Dieses wieder werde durch Q in das zweite Teilintervall G_k von $E_{\sigma(1)}$ überführt usw., bis wir schließlich das letzte in $E_{\sigma^{q-2}(1)}$ gelegene G_k auf das letzte in $E_{\sigma^{q-1}(1)}$ gelegene G_k abgebildet haben.

Damit ist der erste Zyklus in den beiden Fällen $\sigma(1) = 1$ und $\sigma(1) \neq 1$ erschöpft. Gibt es keinen weiteren, d. h. ist σ selbst schon zyklisch, so führen wir durch Q das letzte Teilintervall G_k von $E_{\sigma^{q-1}(1)}$ in das erste Teilintervall G_k von E_1 über. Existiert hingegen ein zweiter, etwa mit j_2 beginnender Zyklus, so werde das letzte Teilintervall G_k von $E_{\sigma^{q-1}(1)}$ auf das erste in E_{j_2} enthaltene abgebildet, und von dort gehen wir weiter wie beim ersten Zyklus. Ist endlich r das letzte Element des letzten Zyklus von σ, so werde das letzte in E_r enthaltene G_k in das erste in E_1 transformiert.

Nach Konstruktion unterscheiden sich $P^{-1}E_j$ und $Q^{-1}E_j$ höchstens um zwei der Intervalle G_k, womit (20) bewiesen ist. Eine passende Numerierung der G_k ergibt schließlich das Lemma.

Bedeutet γ eine positive Zahl, so werden wir der Einfachheit halber die Homothetie $x \to \gamma x$ von X ebenfalls durch γ bezeichnen.

Satz 4. *Es sei T_0 ein mischender Automorphismus. Dann liegt die Menge der Automorphismen der Form $T_1 = \gamma^{-1} \circ V' \circ T_0 \circ V \circ \gamma$, wobei γ alle positiven Zahlen und V die Menge aller Automorphismen von X durchläuft und V' eine Fastinverse zu V bildet, schwach dicht in $\mathfrak{T}$. Führen T_0 und eine Fastinverse T_0' beschränkte Mengen in beschränkte über, abgesehen von Nullmengen, so genügt es, nur Automorphismen V und V' mit denselben Eigenschaften zuzulassen.*

Beweis. Es ist klar, daß jede Abbildung T_1 der angegebenen Form einen Automorphismus darstellt. Wir betrachten nun eine Transformation T aus $\mathfrak{T}$ und eine Umgebung von T der Form $\mathfrak{U} = \{T_1 : \mu(T_1^{-1}F_i + T^{-1}F_i) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$ mit paarweise fremden Mengen $F_i \in \mathfrak{D}$. Wie im Beweis des Satzes 2 gezeigt, gibt es paarweise fremde dyadische Intervalle $E_1, \ldots, E_m$ gleicher Länge und eine Permutation P, die die E_j permutiert, so daß jedes F_i die Vereinigung gewisser E_j bildet und

$$\mu(P^{-1}F_i + T^{-1}F_i) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Nach Lemma 3 können wir disjunkte dyadische Intervalle $G_1, \ldots, G_l$ finden, so daß folgendes zutrifft: alle G_k haben dieselbe Länge, die kleiner als $\varepsilon/8\,m$ ist; jedes E_j läßt sich als Vereinigung gewisser G_k schreiben; $\bigcup_{j=1}^{m} E_j = \bigcup_{k=1}^{l} G_k$; die Abbildung (19) ist eine zyklische Permutation mit $\mu(Q^{-1}E_j + P^{-1}E_j) < \varepsilon/4m$, $j = 1, \ldots, m$. Hieraus folgt zunächst $\mu(Q^{-1}F_i + P^{-1}F_i) < \varepsilon/4$, also wegen (21):

$$\mu(Q^{-1}F_i + T^{-1}F_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Nach dem Lemma 2 existiert eine fast randlose Menge A endlichen positiven Maßes, so daß die Mengen $A, T_0^{-1}A, \ldots, T_0^{-l+1}A$ paarweise fremd sind. Natürlich haben sie alle dasselbe Maß; wir setzen $\gamma = \mu(A)/\mu(G_1)$. Da $T_0^{-k+1}A$ fast randlos ist, so läßt sich nach dem Isomorphiesatz in [6] das Intervall $\gamma\, G_k = \{\gamma x: x \in G_k\}$ durch einen Isomorphismus V_k auf $T_0^{-k+1}A$ abbilden, wobei $\gamma\, G_k$ und $T_0^{-k+1}A$ beide mit dem Lebesgueschen Maß versehen werden. Ferner gibt es einen Isomorphismus V_0 von $X - \bigcup_{k=1}^{l} \gamma\, G_k$ auf $X - \bigcup_{k=1}^{l} T_0^{-k+1}A$. Wir definieren einen Automorphismus V von X, indem wir V innerhalb von $\gamma\, G_k$ mit V_k und innerhalb von $X - \bigcup_{k=1}^{l} \gamma\, G_k$ mit V_0 zusammenfallen lassen, und bilden damit den Automorphismus $T_1 = \gamma^{-1} \circ V' \circ T_0 \circ V \circ \gamma$.

Nach (19) wird nun für $k = 1, \ldots, l-1$, abgesehen von Nullmengen,

$$\begin{aligned} T_1^{-1} G_k &= \gamma^{-1}\, V'\, T_0^{-1}\, V\, \gamma\, G_k = \gamma^{-1}\, V'\, T_0^{-1}\, T_0^{-k+1} A \\ &= \gamma^{-1}\, V'\, T_0^{-k} A = G_{k+1} = Q^{-1} G_k . \end{aligned}$$

Stellt F_i die Vereinigung von Intervallen G_k mit $k < l$ dar, so folgt hieraus $T_1^{-1} F_i = Q^{-1} F_i$ und damit wegen (22):

$$\mu(T_1^{-1} F_i + T^{-1} F_i) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Aus $\mu(T_1^{-1} G_l) = \mu(Q^{-1} G_l) = \mu(G_l) < \varepsilon/8\, m < \varepsilon/4$ ergibt sich $\mu(T_1^{-1} G_l + Q^{-1} G_l) < \varepsilon/2$, also $\mu(T_1^{-1} F_i + Q^{-1} F_i) < \varepsilon/2$ auch dann, wenn F_i das Intervall G_l enthält, woraus wegen (22) wieder folgt $\mu(T_1^{-1} F_i + T^{-1} F_i) < \varepsilon$. Somit ist $T_1 \in \mathfrak{U}$.

Nach dem Lemma 2 können wir für A eine beschränkte Menge nehmen. Führen nun T_0 und T_0' beschränkte Mengen bis auf Nullmengen in beschränkte über, so sind die Mengen $A, T_0^{-1}A, \ldots, T_0^{-l+1}A$ bis auf Nullmengen beschränkt. Aus dem Beweis des Isomorphiesatzes in [6] ist leicht zu ersehen, daß V_0 als Isomorphismus gewählt werden kann, der einschließlich seiner Fastinversen beschränkte Mengen bis auf Nullmengen auf beschränkte Mengen abbildet. Dann haben V und V' dieselbe Eigenschaft, und damit ist der Satz bewiesen.

Stellt $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ irgend einen Maßraum mit sigma-endlichem μ dar und ist r eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir durch $X^r = X \times \cdots \times X$ das r-fache cartesische Produkt von Räumen X, durch $\mathfrak{F}^{(r)}$ den Produkt-sigma-Ring des sigma-Rings $\mathfrak{F}$ in jedem Faktor und durch $\mu^{(r)}$ das entsprechende Produktmaß auf $\mathfrak{F}^{(r)}$. Es sei T eine maßtreue Transformation von X. Durch $T^{(r)}(x_1, \ldots, x_r) = (Tx_1, \ldots, Tx_r)$ wird dann eine maßtreue Transformation von X^r erklärt. Wir erinnern an die Definition des ergodischen Index von T im Sinne von Kakutani, geschrieben $\mathrm{ek}T$: dies ist die größte Zahl r derart, daß $T^{(r)}$ ergodisch ist, und zwar $\mathrm{ek}T = 0$, wenn T selbst nicht ergodisch ist, und $\mathrm{ek}T = \infty$, wenn jedes $T^{(r)}$ eine ergodische Transformation bildet. Der ergodische Index bleibt offensichtlich invariant gegenüber Isomorphismen.

Ist T eine Mischung eines topologischen Maßraumes unendlichen Maßes, so bestehen Beziehungen zwischen $\mathrm{ek}T$ und der Wachstumsgeschwindigkeit der zugehörigen Folge (ϱ_n); siehe [9]. Insbesondere folgt aus $\sum_n \varrho_n^{-r} < \infty$, daß $\mathrm{ek}T < r$, und bei einer großen Klasse von mischenden Transformationen gilt die Umkehrung [5, § 4]. Demnach ist also, vage ausgedrückt, $\mathrm{ek}T$ um so kleiner, je schneller (ϱ_n) wächst, d. h. je schneller gemischt wird.

Wir kehren nun zum topologischen Maßraum $X = [0, \infty[$ mit dem Lebesgueschen Maß zurück und beziehen den Begriff einer mischenden Transformation immer auf die spezielle Mengenfolge $H_k = [0, k]$. Mischung in bezug auf die Zahlenfolge (ϱ_n) bedeutet dann also, daß die Mischungsgleichung (1) auf alle beschränkten und fast randlosen, d. h. auf alle im Sinne von Peano-Jordan quadrierbaren Mengen A und B zutrifft.

Theorem. *Es gibt eine Zahlenfolge (ϱ_n) mit den folgenden Eigenschaften: Zu jeder positiven Zahl ϑ existiert eine positive Konstante β, so daß*

$$\varrho_n \leqq \beta n^{\vartheta} \tag{23}$$

für alle n; die Menge der in bezug auf eben diese Folge (ϱ_n) mischenden Automorphismen, die den ergodischen Index ∞ haben, ist schwach dicht in $\mathfrak{T}$.

Zu beliebigem $r = 1, 2, \ldots$ und jeder Zahl η mit $1/(1+r) < \eta < 1/r$ gibt es eine Zahlenfolge (ϱ_n) mit den folgenden Eigenschaften: Zu jeder positiven Zahl ϑ existieren positive Konstanten α und β, so daß

$$\alpha n^{\eta-\vartheta} \leqq \varrho_n \leqq \beta n^{\eta+\vartheta} \tag{24}$$

für alle n; die Menge der in bezug auf eben diese Folge (ϱ_n) mischenden Automorphismen, die den ergodischen Index r haben, ist schwach dicht in $\mathfrak{T}$.

Zu jeder positiven Zahl η gibt es eine Zahlenfolge (ϱ_n) mit den folgenden Eigenschaften:

$$n^{\eta} \leqq \varrho_n \tag{25}$$

für alle n; die Menge der in bezug auf eben diese Folge (ϱ_n) mischenden Automorphismen ist schwach dicht in $\mathfrak{T}$.

Beweis. Hierzu konstruieren wir geeignete Markoffsche Ketten. Es bedeute Z die Menge aller ganzen Zahlen. Wir betrachten den Raum $X^* = Z^Z$ aller Folgen $x = (x_n)_{n \in Z}$ von ganzen Zahlen und versehen ihn mit der Produkttopologie, wobei Z als diskret angesehen werde. Die Menge der elementaren Zylinder

$$A = \{x : x_{n_1} = i_1, \ldots, x_{n_k} = i_k\} \tag{26}$$

mit $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ und $i_l \in Z$ ist eine Umgebungsbasis von X^*, die nur aus randlosen Mengen besteht. X^* bildet einen Polnischen Raum, und daher ist jedes sigma-endliche, auf dem sigma-Ring $\mathfrak{F}^*$ der Borelschen Mengen von X^* definierte Maß straff. Wir setzen $H_k^* = \{x : |x_0| \leqq k\}$; jedes H_k^* ist also randlos, und $\bigcup_k H_k^* = X^*$.

Es sei $\pi = (\pi(i, j))_{i,j \in Z}$ eine stochastische Matrix und $\pi^n = (\pi^n(i, j))_{i,j \in Z}$ die zugehörige Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten in n Schritten. Wir nehmen an, es existiere ein gegenüber π invariantes, strikt positives und unendliches Maß λ auf Z, d. h. eine Folge $(\lambda(j))_{j \in Z}$ mit

$$\lambda(j) = \sum_i \lambda(i) \pi(i, j), \quad \lambda(j) > 0 \quad \text{und} \quad \sum_j \lambda(j) = \infty .$$

Wir fixieren ein solches Maß und erhalten ein Maß μ^* auf $\mathfrak{F}^*$, indem wir bei einem Zylinder der Form (26) definieren

$$\mu^*(A) = \lambda(i_1) \pi^{n_2 - n_1}(i_1, i_2) \ldots \pi^{n_k - n_{k-1}}(i_{k-1}, i_k) .$$

Dabei wird $\mu^*(X^*) = \infty$, während jede Menge H_k^* ein endliches Maß hat. In diesem topologischen Maßraum stellt die Verschiebung $T^*((x_n)_{n\in Z}) = (x_{n+1})_{n\in Z}$ einen Automorphismus, ja sogar einen maßtreuen Homöomorphismus dar.

Wir benutzen nun spezielle Matrizen π und Maße λ. Wie in [2] gezeigt, lassen sich π und λ so wählen, daß zu jedem $\vartheta > 0$ eine Konstante $\beta > 0$ existiert, mit der

$$\beta^{-1} n^{-\vartheta} \leqq \pi^n(0, 0) \tag{27}$$

für alle n; dabei ist $\mathrm{ek}\, T^* = \infty$. Ebenfalls nach [2] können π und λ bei gegebenem $r = 1, 2, \ldots$ und η mit $1/(1+r) < \eta < 1/r$ so bestimmt werden, daß zu jedem $\vartheta > 0$ positive Konstanten α und β existieren mit

$$\beta^{-1} n^{-\eta-\vartheta} \leqq \pi^n(0, 0) \leqq \alpha^{-1} n^{-\eta+\vartheta} \tag{28}$$

für alle n; dabei ist $\mathrm{ek}\, T^* = r$. In [5, § 5] wurde bewiesen, daß T^* in beiden Fällen mischend in bezug auf die Mengenfolge (H_k^*) und die Zahlenfolge $\varrho_n = (\pi^n(0, 0))^{-1}$ ist, wodurch (27) in (23) und (28) in (24) übergeht.

Als cartesisches Produkt mit s Faktoren einer klassischen Irrfahrt wurden π und λ in [5, § 5] so konstruiert, daß T^* in bezug auf (H_k^*) mischend mit $\varrho_n = (\pi n)^{s/2}$ wird. Durch passende Wahl von s zu gegebenem $\eta > 0$ erhalten wir (25).

In allen diesen Beispielen gilt bei festem i jede der Ungleichungen $\pi(i, j) > 0$ und $\pi(j, i) > 0$ nur für endlich viele j. Nach Definition von μ^* führen daher T^* und T^{*-1} jede Menge H_k^* bis auf eine Nullmenge in eine Teilmenge einer geeigneten Menge H_l^* über. Weiter ist μ^* atomfrei.

Wie in [5] gezeigt, gibt es nun zu jeder Wahl von π und λ, bei der μ^* keine Atome hat, einen Isomorphismus S von $(X^*, \mathfrak{F}^*, \mu^*)$ auf $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, so daß $SH_k = [0, \mu^*(H_k^*)]$. Wegen $\lim_{k\to\infty} \mu^*(H_k^*) = \infty$ ist also eine Teilmenge von X dann und nur dann beschränkt, d.h. in einem H_l enthalten, wenn sie in einer der Mengen SH_k^* enthalten ist. In unseren drei Beispielen bildet daher $T_0 = S \circ T \circ S'$ einen mischenden Automorphismus von $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ in bezug auf (H_k) vom selben ergodischen Index und zur selben Folge (ϱ_n) gehörig wie T^*. Außerdem führen T_0 und T_0' beschränkte Mengen in beschränkte über, abgesehen von Nullmengen.

Es sei schließlich V irgendein Automorphismus von X, der ebenso wie V' beschränkte Mengen bis auf Nullmengen auf beschränkte abbildet, und $\gamma > 0$. Dann stellt $T_1 = \gamma^{-1} \circ V' \circ T_0 \circ V \circ \gamma$ einen in bezug auf (H_k) mischenden Automorphismus von X mit dem gleichen ergodischen Index und der gleichen Folge (ϱ_n) wie T_0 dar. Das Theorem resultiert nun aus Satz 4.

Wir bemerken, daß der erste Teil des Theorems offenbar hinreichend viele sehr langsam mischende und sein letzter Teil hinreichend viele sehr schnell mischende Automorphismen liefert. Aus (23) folgt $\sum_n \varrho_n^{-r} = \infty$ für alle r. Aus (24) ergibt sich $\sum_n \varrho_n^{-r} = \infty$ und $\sum_n \varrho_n^{-r-1} < \infty$. Aus (25) resultiert $\sum_n \varrho_n^{-1} < \infty$, wenn $\eta > 1$, d.h. diese Automorphismen sind dann nicht ergodisch.

Es ist klar, daß das Theorem ebenso wie auf den darin zugrunde gelegten speziellen Maßraum $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ auch auf jeden dazu isomorphen topologischen Maßraum $(X', \mathfrak{F}', \mu')$ zutrifft. An die Stelle der Mengenfolge $H_k = [0, k]$ tritt dabei die Folge (H_k') der Bilder der H_k vermöge eines Isomorphismus S von X auf X'.

Nach [6] gilt das Theorem also für jeden Raum der folgenden Gestalt: X' ist ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis, und jeder Punkt x' von X' besitzt eine abgeschlossene Umgebung, die einer geeigneten kompakten Teilmenge eines, von x' abhängigen, endlichdimensionalen euklidischen Raumes homöomorph ist; μ' ist ein atomfreies Radonsches Maß mit $\mu'(X') = \infty$. Wie der Beweis des Isomorphiesatzes in [6] zeigt, läßt sich S im Fall einer unberandeten Mannigfaltigkeit X' so wählen, daß die H_k' sich von kompakten Mengen nur um Nullmengen unterscheiden und umgekehrt jede kompakte Menge in einem H_k' enthalten ist, abgesehen höchstens von einer Nullmenge. Interpretiert man im Theorem die Mischungseigenschaft im Sinne einer Mischung in bezug auf eben diese Folge (H_k'), so trifft dann bei den so mischenden Automorphismen die Gleichung (1) wieder auf alle quadrierbaren, d. h. relativ kompakten und fast randlosen Mengen A und B zu.

Die eben beschriebenen topologischen Räume X' sind lokal kompakt und in jedem Punkt von endlicher Dimension. Andererseits benutzten wir schon im Beweis des Theorems, daß dem Raum $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ auch viele nicht lokal kompakte und überall unendlichdimensionale topologische Maßräume isomorph sind, nämlich alle Räume der dort zu Anfang beschriebenen Form $(X^*, \mathfrak{F}^*, \mu)$, soweit sie keine Atome enthalten. Das Theorem gilt also für alle solche Räume, wobei Mischung zu interpretieren ist als Mischung in bezug auf die Folge (H_k^*).

Dieselben Bemerkungen treffen sinngemäß auf die Sätze 1—4 und die beiden Corollare zu Satz 2 zu.

Zusatz bei der Korrektur (23. 3. 1967): Einen vollständigen Überblick über alle in Frage kommenden Maßräume enthält die demnächst erscheinende Arbeit von W. Böge, K. Krickeberg und F. Papangelou: Über die dem Lebesgueschen Maß isomorphen topologischen Maße.

Literatur

1. Halmos, P. R.: Lectures on ergodic theory. The Mathematical Society of Japan 1956.
2. Kakutani, S., and W. Parry: Infinite measure preserving transformations with „mixing". Bull. Amer. math. Soc. **69**, 752—756 (1963).
3. Krengel, U.: On the global limit behaviour of Markov chains and of general nonsingular Markov processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb **6**, 302—316 (1966).
4. Krickeberg, K : Stochastische Konvergenz von Semimartingalen. Math. Z. **66**, 470—486 (1957).
5. — Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure. Erscheint in Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability.
6. — Ein Isomorphiesatz über topologische Maßräume. Erscheint in Math. Nachr.
7. Kuratowski, C.: Topologie I. 2ième éd. Warszawa-Wrocław: Monografie Matematyczne 1948.
8. Oxtoby, J. C., and S. M. Ulam: Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. Ann. of Math. II. Ser. **42**, 874—920 (1941).
9. Papangelou, F.: Strong ratio limits, R-recurrence and mixing properties of discrete parameter Markov processes. Erscheint in Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.

Institut f. angew. Mathematik
der Universität Heidelberg