

Extensions d'un théorème de D. Dugué et M. Girault

par

PAUL LÉVY

I. Introduction et théorèmes d'analyse

1. Introduction. Dans le chapitre I, nous démontrerons quelques théorèmes sur la classe C_n des fonctions $f(x)$, définies et bornées dans $(0, \infty)$, n fois dérivables, les dérivées d'ordre $< n$ étant continues, et la dérivée d'ordre n étant monotone. On peut supposer $n = 0$; C_0 est simplement la classe des fonctions bornées et monotones. S'il s'agit d'une fonction définie dans $(-\infty, +\infty)$, nous dirons qu'elle appartient à la classe C_n si les conditions indiquées sont vérifiées dans $(0, \infty)$. Si $n > 0$, nous désignerons par C'_n l'ensemble des dérivées des fonctions $f(x) \in C_n$.

Nous démontrerons que, si $n > 0$, et si $f(x) \in C_n$, les produits $x^\nu f^{(\nu)}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) tendent vers zéro aux deux extrémités de l'intervalle $(0, \infty)$ [$f^{(\nu)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre ν de $f(x)$]. Pour $n = 1$, et pour la limite infinie, on remarque l'analogie du résultat obtenu avec le célèbre théorème d'EMILE BOREL sur les séries convergentes dont les termes forment une suite monotone. Nous montrerons aussi que, comme le théorème de BOREL, notre résultat ne peut pas être amélioré: quelle que soit la fonction $\mu(x)$ positive et n'admettant pas de borne inférieure positive au voisinage de la limite considérée (0 ou ∞), $f(x) \in C_n$ n'entraîne pas $x^n f^{(n)}(x) = o[\mu(x)]$.

Dans le chapitre II, nous étudierons la classe Γ_n des fonctions caractéristiques $\varphi(z)$ qui sont réelles, donc paires, et appartiennent à C_n , et la classe Γ'_n des densités de probabilité $f(x)$ telles que $f(x)$ et $f(-x)$ appartiennent à C'_n . La forme générale des fonctions $\varphi(z) \in \Gamma_n$ est, pour n entier > 0 ,

$$(1.1) \quad \varphi(z) = \int_{-0}^{\infty} \omega^n(uz) dH(u),$$

$H(u)$ étant la fonction de répartition d'une variable aléatoire $U \geq 0$, et $\omega(z)$ désignant $1 - |z|$ si $|z| \leq 1$, et 0 si $|z| > 1$. Alors $\varphi(z)$ est la fonction caractéristique du produit UV , V désignant une variable aléatoire indépendante de U dont la fonction caractéristique est $\omega^n(z)$. De même, $g_n(x)$ désignant la fonction égale à $(n+1)(1-x)^n$ dans $(0, 1)$ et nulle en dehors de cet intervalle, la forme générale des fonctions $f(x) \in \Gamma'_n$ est

$$(1.2) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(\frac{x}{u}\right) \frac{dH(u)}{|u|},$$

$H(u)$ désignant ici une fonction de répartition continue à l'origine; n peut être nul. Cette fonction est la densité de probabilité du produit UV' , U ayant la densité de probabilité $g_n(x)$, V' ayant la fonction de répartition $H(u)$, et ces deux variables aléatoires étant indépendantes.

Pour $n = 0$, on retrouve un théorème connu de A. KHINTCHINE. Pour $n = 1$, le théorème relatif à la classe I_1 se réduit au théorème de D. DUGUÉ et M. GIRAULT [I] sur les fonctions caractéristiques de PÓLYA, avec une différence provenant de ce que les fonctions caractéristiques de PÓLYA s'annulent à l'infini, tandis que, pour nos fonctions $\varphi(z)$, la constante $H(+0) = \varphi(\infty)$ peut être $> 0^*$.

Dans le chapitre III, nous considérerons des expressions de la forme

$$(1.3) \quad dE_n[y(x)] = dy^{(n)} + \sum_0^n \frac{a_r y^{(n-r)}}{x^{r+1}} dx,$$

et la condition

$$(1.4) \quad (-x)^{n+1} dE_n[y(x)] \geq 0 \quad (x \neq 0, dx > 0),$$

qui signifie que, d'une part dans $(-\infty, 0)$, d'autre part, dans $(0, \infty)$ l'intégrale de STIELTJES

$$(1.5) \quad \int_{x_0}^{x_1} (-x)^{n+1} dE_n[y(x)] \quad (x_0 x_1 > 0)$$

est une fonction non décroissante de x_1 . D'autre part, nous considérerons la fonction $g(x)$, nulle en dehors de $(0, 1)$ et définie à un facteur constant près dans cet intervalle par l'équation différentielle d'EULER d'ordre $n + 1$

$$(1.6) \quad \frac{dE_n[g(x)]}{dx} = 0,$$

et par les conditions de CAUCHY

$$(1.7) \quad g(1) = g'(1) = \dots = g^{(n-1)}(1) = 0.$$

Nous nous placerons ensuite successivement dans le cas où $g(x)$ est une fonction caractéristique et dans celui où c'est une densité de probabilité, et nous montrerons que, en remplaçant, dans le premier cas, $\omega^n(z)$ par $g(|z|)$ dans la formule (1.1), et dans le second cas, $g_n(x)$ par $g(x)$ dans (1.2), on obtient, dans le premier cas une fonction caractéristique $\varphi(z)$ qui vérifie l'inégalité (1.4), dans le second cas une densité de probabilité $f(x)$ qui vérifie aussi cette inégalité.

Ces résultats semblent comporter une réciproque: on aurait dans les deux cas l'expression générale des fonctions vérifiant les conditions indiquées. On aurait

* Le sentiment de l'analogie entre le théorème de KHINTCHINE et celui de DUGUÉ et GIRAULT a été à l'origine du présent travail. Je profite de l'occasion pour m'excuser d'avoir, dans [2], rappelé le théorème de DUGUÉ et GIRAULT sans en nommer les auteurs. Je savais par une conférence entendue à l'Institut Henri Poincaré que ce théorème n'était pas nouveau, mais je n'ai retrouvé la référence que trop tard.

Je signale aussi que, dans [2], j'ai établi sur la fonction définie par la formule (24) un résultat qui est à rapprocher de celui indiqué par DUGUÉ et GIRAULT à la page 8 de leur mémoire cité. Il y a d'ailleurs dans leur énoncé une certaine ambiguïté; je crois utile de préciser que quand ils parlent d'une fonction $\varphi(t)$ convexe dans $(0, h)$, il faut comprendre qu'il s'agit des valeurs dans $(0, h)$ d'une fonction caractéristique de PÓLYA, ce qui implique de plus $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(h-0) \leq 0$. Leur raisonnement, identique à celui que j'ai indiqué dans [I], n'utilise d'ailleurs pas la convexité, mais seulement le fait, que la fonction paire égale à $\varphi(z)$ dans $(0, h)$ et à $\varphi(h)$ pour $z > h$ soit une fonction caractéristique. J'ai montré par des exemples variés qu'il peut en être ainsi sans que $\varphi(z)$ soit convexe dans $(0, h)$. Mon théorème apparaît donc comme plus général que celui de DUGUÉ et GIRAULT, à cela près que j'avais supposé $\varphi(h) = 0$, restriction qui n'est évidemment pas nécessaire.

ainsi deux théorèmes généralisant les théorèmes fondamentaux du chapitre II. La démonstration est même identique à celle de ces théorèmes du chapitre II, si on peut établir un lemme généralisant les théorèmes du chapitre I. Il s'agirait de démontrer que, dans $(-\infty, 0)$ comme dans $(0, \infty)$, si $y(x)$ est borné et vérifie la condition (I.4), les produits $x^\nu y^{(\nu)}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) s'annulent aux deux extrémités de l'intervalle considéré, ou du moins qu'il en est ainsi dans le cas où $g(|x|)$ et $y(x)$ sont à la fois, soit des fonctions définies positives, soit des fonctions sommables dans $(-\infty, +\infty)$. Cela suffirait pour les applications au Calcul des Probabilités en prenant, dans un cas $y(z) = \varphi(z)$, et dans l'autre, $y'(x) = f(x)$. Je crois ce lemme exact, mais ne l'ai pas démontré.

2. Lemme — On a

$$(2.1) \quad C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_{n-1} \supset C_n.$$

Il suffit de montrer que $f(x) \in C_n$ entraîne $f(x) \in C_{n-1}$. Si en effet $f(x) \in C_n$, $f^{(n)}(x)$ est monotone, et a par suite à l'infini une valeur limite, finie ou infinie. Si cette valeur n'était pas nulle, $|f(x)|$ augmenterait indéfiniment avec x , ce qui est exclu par la définition de C_n . Donc $f^{(n)}(\infty) = 0$. Donc $f^{(n)}(x)$, qui est monotone, a toujours le même signe, c'est-à-dire que $f^{(n-1)}(x)$ est aussi monotone. Les autres propriétés qu'implique la définition de C_{n-1} sont contenues dans celles de C_n . Donc $f(x) \in C_{n-1}$, C.Q.F.D.

Remarques: La dérivée $f'(x)$ est, comme les autres, monotone et tendant vers 0, donc de signe constant. La fonction $f(x)$ est donc aussi monotone; comme elle est bornée, $f(\infty)$ a une valeur finie bien déterminée.

Il peut arriver que $f(x)$ soit constant pour x assez grand; dans ce cas le théorème que nous allons démontrer devient trivial. Nous pouvons donc l'exclure dans nos raisonnements sans que cela soit une restriction au théorème. Les dérivées successives de $f(x)$, jusqu'à $f^{(n)}(x)$, sont donc alternativement positives et décroissantes et négatives et croissantes. Pour ne pas être gêné par les signes, nous poserons

$$(2.2) \quad |f(x) - f(\infty)| = g(x),$$

et désignerons par $(-1)^\nu g_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) les dérivées successives de cette fonction. Les fonctions $g_\nu(x)$ sont donc positives et non croissantes et tendent vers zéro.

3. Introduisons maintenant une fonction $\lambda(x)$ qui, dans un intervalle (a, ∞) , soit positive, non croissante, et vérifie une condition de la forme

$$(3.1) \quad \lambda(x) \geq k \lambda(cx),$$

c et k étant des constantes > 0 et < 1 . Telles sont par exemple les fonctions $x^{-\alpha}$ et $\log^{-\alpha} x$, si $\alpha \geq 0$, et $x^{-\alpha} \log^\beta x$, si $\alpha > 0$, β étant un nombre réel quelconque; le cas $\lambda(x) = 1$ n'est pas exclu.

Si $\lambda(x)$ vérifie ces conditions, il en est de même de $x^{-\alpha} \lambda(x)$; il faut seulement remplacer k par kc^α .

Théorème 1. Si $f(x) \in C_n$, et si $g(x) = o[\lambda(x)]$ ($x \rightarrow \infty$), on a:

$$(3.2) \quad f^{(n)}(x) = o[x^{-n} \lambda(x)] \quad (x \rightarrow \infty).$$

Supposons d'abord $n = 1$. Si $x f'(x)$ n'était pas $o[\lambda(x)]$, il existerait des valeurs arbitrairement grandes de x pour lesquelles on aurait

$$(3.3) \quad x g_1(x) \geq c' \lambda(x),$$

c' étant une constante positive suffisamment petite. On aurait donc

$$\begin{aligned} g(cx) &= \int_{cx}^{\infty} g_1(u) du > \int_{cx}^x g_1(u) du \\ &> (1-c)x g_1(x) \geq (1-c)c' \lambda(x), \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (3.1)

$$(3.4) \quad g(cx) \geq kc'(1-c)\lambda(cx).$$

Cette inégalité devrait être vérifiée pour des valeurs arbitrairement grandes de cx , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $g(x) = o[\lambda(x)]$. Le théorème est ainsi démontré pour $n = 1$.

Nous pouvons maintenant raisonner par récurrence. Supposons donc la formule (3.2) démontrée pour une valeur n . Étant vraie si $f(x) \in C_n$, elle l'est a fortiori si $f(x) \in C_{n+1} \subset C_n$, et dans ce cas $f^{(n)}(x) \in C_1$. Nous pouvons alors appliquer à $f^{(n)}(x)$ le résultat établi d'abord pour $n = 1$; il faut seulement remplacer $\lambda(x)$ par $\lambda_n(x) = x^{-n}\lambda(x)$, ce qui, nous l'avons vu, est légitime. On a ainsi:

$$f^{(n+1)}(x) = o[x^{-(n+1)}\lambda(x)],$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Si, en particulier $\lambda(x) = 1$, comme $g(x) = o(1)$ est vérifié pour toutes les fonctions $f(x) \in C_n$, on voit que:

Corollaire: Si $f(x) \in C_n$, on a:

$$(3.5) \quad x^\nu f^{(\nu)}(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty, \nu = 1, 2, \dots, n).$$

4. a) Nous allons montrer que le théorème 1 est le meilleur possible, c'est-à-dire que:

Théorème 2. Si $\mu(x)$ est une fonction positive, continue, et telle que, au moins pour une suite de valeurs x_n indéfiniment croissante, on ait

$$(4.1) \quad \mu(x_n) = o[\lambda(x_n)] \quad (h \rightarrow \infty)$$

alors les hypothèses $f(x) \in C_n$, $f(x) = o[\lambda(x)]$ ($x \rightarrow \infty$), ne sont pas suffisantes pour que

$$(4.2) \quad f^{(n)}(x) = o[x^{-n}\mu(x)] \quad (x \rightarrow \infty).$$

Pour le montrer, considérons la fonction

$$(4.3) \quad f(x) = \sum_{a_p \geq x} c_p \left(1 - \frac{x}{a_p}\right)^n,$$

où $c_p = \mu(a_p)$, les a_p étant des nombres positifs, choisis parmi les x_n , et croissant assez rapidement pour que $c_{p+1} \leq c_p/2$; cela est possible, puisque $\mu(x_n) = o[\lambda(x_n)] \rightarrow 0$. Désignons par $a(x)$ le premier $a_p \geq x$, et par $c(x)$ le coefficient c_p qui lui correspond. On a:

$$(4.4) \quad c(x) = \mu[a(x)] = o[\lambda[a(x)]] = o[\lambda(x)].$$

La fonction $f(x)$ appartient évidemment à la classe C_n , et de plus

$$(4.5) \quad 0 < f(x) < \sum_{a_p \geq x} c_p < 2c(x) = o[\lambda(x)];$$

de sorte que $f(x)$ vérifie les conditions indiquées dans l'énoncé. Or on a

$$(4.6) \quad |f^{(n)}(x)| = n! \sum_{a_p \geq x} c_p a_p^{-n} > n! c(x) a^{-n}(x),$$

d'où

$$(4.7) \quad |f^{(n)}(a_p - 0)| > n! a_p^{-n} \mu(a_p),$$

ce qui montre que la condition (4.2) n'est pas vérifiée; le théorème 2 en résulte.

b) On ne peut pas non plus améliorer le théorème 1 en rendant les hypothèses moins strictes. Si on remplace la condition $f(x) = o[\lambda(x)]$ par $f(x) = o[\mu_1(x)]$, $\mu_1(x)$ étant une fonction qui ne soit pas $o[\lambda(x)]$, la conclusion (3.2) ne subsiste pas. La démonstration du théorème 2, dans laquelle la condition (3.1) imposée plus haut à $\lambda(x)$ n'intervient pas, subsiste en effet si on remplace $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ par $\mu_1(x)$ et $\lambda(x)$.

On pourrait aussi se demander si le théorème 1 subsiste quand on remplace la condition « $f^{(n)}(x)$ monotone » par « $f^{(n)}(x)$ à variation bornée ». La réponse est encore négative, comme le montre l'exemple de la fonction solution de l'équation différentielle.

$$(4.8) \quad f^{(n)}(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{(1+x)^n} \quad (x > 0)$$

définie par les conditions de CAUCHY

$$(4.9) \quad f(\infty) = f'(\infty) = \dots = f^{(n-1)}(\infty) = 0.$$

Il n'est donc pas possible d'améliorer le théorème 1, ce qui n'exclut pas la possibilité de généralisations dans lesquelles la condition (3.1) préalablement imposée à $\lambda(x)$ serait remplacée par une condition moins restrictive.

5. Nous allons maintenant étudier le comportement de $f^{(n)}(x)$ au voisinage de l'origine, lorsqu'on suppose $f(x)$ continu et n fois dérivable dans $(0, 1)$, les $n - 1$ premières dérivées étant continues et $f^{(n)}(x)$ étant monotone. Nous désignerons par C_n^* l'ensemble des fonctions $f(x)$ vérifiant ces conditions, qui n'impliquent pas que $f(+0)$ soit fini.

La dérivée $f^{(n)}(x)$ étant monotone, a au plus un changement de signe. Il existe donc un intervalle $(0, a_1) \subset (0, 1)$ où son signe est constant, et où par suite $f^{(n-1)}(x)$ est monotone. On en déduit de même qu'il existe un intervalle $(0, a_2) \subset (0, a_1)$ où $f^{(n-2)}(x)$ est monotone, et ainsi de suite. On voit ainsi qu'il existe un intervalle $(0, a)$ où chacune des fonctions $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ est monotone et de signe constant. Quand x tend vers zéro, elles ont des limites, finies ou infinies, mais jamais indéterminées.

Introduisons maintenant, comme au n° 3, une fonction $\lambda(x)$ positive, non croissante, et qui vérifie dans $(0, 1)$ la condition (3.1). Comme $f(0), \lambda(0)$ peut être fini ou infini.

Théorème 3. *Si $f(x) \in C_n^*$ et si $f(x) = o[\lambda(x)]$ ($x \downarrow 0$), on a*

$$(5.1) \quad f^{(\nu)}(x) = o[x^{-\nu} \lambda(x)] \quad (x \downarrow 0; \nu = 1, 2, \dots, n).$$

Comme pour le théorème 1, nous considérerons d'abord le cas $n = 1$. En supposant $f(x)$ monotone, il s'agit de montrer que

$$(5.2) \quad x f'(x) = o[\lambda(x)] \quad (x \downarrow 0).$$

Comme cela est évident si $f'(0)$ est fini, nous pouvons supposer $|f'(0)|$ infini, donc $|f'(x)|$ non croissant. Alors, pour $x \in (0, a)$ on a :

$$(5.3) \quad |f(x) - f(cx)| = \int_{cx}^x |f'(u)| du \geq (1-c)x |f'(x)|.$$

Si l'inégalité (5.2) n'était pas vérifiée, il existerait une constante positive c' et des valeurs arbitrairement petites x_p de x pour lesquelles on aurait :

$$(5.4) \quad x |f'(x)| > c' \lambda(x).$$

Il s'agit de montrer que cela est en contradiction avec l'hypothèse $f(x) = o[\lambda(x)]$.

Supposons d'abord $\lambda(+0)$ fini; $f(x)$ étant monotone, on a, pour $x = x_p$,

$$(5.5) \quad |f(x)| \geq |f(x) - f(cx)| \geq (1-c)x |f'(x)| > c'(1-c)\lambda(x),$$

ce qui, $\lambda(0)$ étant > 0 , est en contradiction avec l'hypothèse.

Si maintenant, $f(0)$ est infini, compte tenu de (3.1), on a

$$(5.6) \quad |f(x) - f(cx)| > c'(1-c)\lambda(x) \geq kc'(1-c)\lambda(cx)$$

de sorte que, ou bien $f(x)$ ne serait pas $o[\lambda(x)]$, ou bien $f(cx)$ ne serait pas $o[\lambda(cx)]$. Dans tous les cas, nous arrivons à un résultat en contradiction avec l'hypothèse.

Le théorème est ainsi établi pour $n = 1$. Comme les fonctions $x^{-\nu}\lambda(x)$ vérifient toutes des conditions de la forme (3.1), k étant seulement changé, on peut raisonner par récurrence, comme pour le théorème 1. Le théorème 3 est ainsi établi dans tous les cas.

Comme pour le théorème 1, on démontre aisément qu'il est le meilleur possible. Il faut seulement noter qu'il reste vrai si on remplace l'hypothèse « $f^{(n)}(x)$ monotone », par « $f^{(n)}(x)$ à variation bornée ». En effet cette hypothèse implique que $f^{(n)}(x)$ soit borné, donc $o(x^{-n})$; mais ce n'est pas une hypothèse qu'on puisse considérer comme moins restrictive que celle de l'énoncé, qui n'implique pas que $f^{(n)}(x)$ soit borné.

Il peut d'ailleurs arriver que $f(x)$ et ses dérivées jusqu'à un certain ordre p soient finis. Dans ce cas, l'application du théorème en remplaçant $f(x)$ par $f^{(p)}(x)$ et n par $n - p$ donne, si $n > p$:

$$(5.7) \quad f^{(n)}(x) = o(x^{p-n}) \quad (x \downarrow 0),$$

ce qui donne une borne supérieure moins élevée que celle donnée par (5.1).

Si nous revenons au cas de l'ensemble C_n , dont les éléments vérifient toujours la condition $f(x) - f(0) = o(1)$ (pour $x \downarrow 0$), nous voyons que

Corollaire: Si $f(x) \in C_n$, on a :

$$f^{(\nu)}(x) = o(x^{-\nu}) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

II. Application au calcul des probabilités

6. La classe Γ_n . Nous désignerons par Γ_n (n entier > 0) la classe des fonctions caractéristiques réelles (donc paires) qui sont des éléments de C_n . Γ_1 est alors la classe des fonctions caractéristiques réelles et convexes dans $(0, \infty)$, donc aussi dans $(-\infty, 0)$. Les fonctions caractéristiques de PÓLYA sont les fonctions $\varphi(z) \in \Gamma_1$, qui vérifient la

condition $\varphi(\infty) = 0$. Mais cette condition n'est pas nécessaire pour que $\varphi(z)$ soit une fonction caractéristique. Pour qu'une fonction $\varphi(z) \in C_1$ soit une fonction caractéristique, il faut et il suffit que $\varphi(0) = 1$, $0 \leq \alpha = \varphi(\infty) \leq 1$. Si en effet $\varphi_0(z)$ est une fonction caractéristique de PÓLYA, et si $0 \leq \alpha \leq 1$, $\varphi(z) = \alpha + (1 - \alpha)\varphi_0(z)$ est une fonction caractéristique $\in \Gamma_1$, et $\varphi(\infty) = \alpha$. D'autre part la limite pour Z infini de sa moyenne dans $(-Z, +Z)$, qui est ici α , est la probabilité de la valeur 0; elle est donc ≥ 0 et ≤ 1 .

Naturellement, on a

$$(6.1) \quad \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_n \supset \Gamma_{n+1} \dots,$$

c'est-à-dire que la condition $\varphi(z) \in \Gamma_n$ est d'autant plus restrictive que n est plus grand.

Théorème 4. *La forme générale des fonctions de la classe Γ_n est*

$$(6.2) \quad \varphi(z) = \int_{-0}^{\infty} \omega^n(uz) dH(u),$$

$H(u)$ étant la fonction de répartition d'une variable aléatoire $U \geq 0$, et $\omega(z)$ désignant $\text{Max}(0, 1 - |z|)$.

Naturellement, la fonction $\omega(z)$ étant paire, on pourrait prendre pour $H(u)$ la fonction de répartition de n'importe quelle variable réelle U ; $\varphi(z)$ ne dépendrait que de la loi de $|U|$. L'avantage de prendre $U = |U| \geq 0$ est qu'on obtient ainsi, pour chaque $\varphi(z) \in \Gamma_n$, une représentation unique. Remarquons encore la probabilité α de $U = 0$ est quelconque dans $[0, 1]$, et que $\varphi(\infty) = \alpha$. Pour $n = 1$, et $\alpha = 0$, ce théorème se réduit à celui de D. DUGUÉ et M. GIRAULT sur les fonctions caractéristiques de PÓLYA.

Vérifions d'abord que (6.2) entraîne bien $\varphi(z) \in \Gamma_n$. On peut d'abord écrire cette formule sous la forme:

$$(6.3) \quad \varphi(z) = \int_{-0}^{1/z} (1 - uz)^n dH(u) \quad (z \geq 0)$$

d'où, par n dérivations

$$(6.4) \quad (-1)^n \varphi^{(n)}(z) = n! \int_0^{1/z} u^n dH(u) \quad (z > 0)$$

et ensuite

$$(6.5) \quad (-1)^n d\varphi^{(n)}(z) = \frac{n!}{z^n} dH\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z) > 0.$$

La fonction $\varphi^{(n)}(z)$ est donc non croissante dans $(0, \infty)$ si n est pair et non décroissante si n est impair. Elle est en tout cas monotone. On sait d'ailleurs que $\omega(z)$ est une fonction caractéristique. Il en est de même de $\omega^n(uz)$, et de $\varphi(z)$. Il en résulte bien que $\varphi(z) \in \Gamma_n$.

Pour démontrer la réciproque, partons de $\varphi(z) \in \Gamma_n$ et définissons $dH(u)$ dans $(+0, \infty)$ par la formule (6.5). Il en résulte bien que $H(u)$ est non décroissant. Il

s'agit maintenant de montrer que $H(u)$, ou, ce qui revient au même, $H(1/z)$ est à variation bornée dans $(+0, \infty)$, c'est-à-dire que

$$\left| \int_0^{\infty} z^n d\varphi^{(n)}(z) \right| < \infty.$$

Or, d'après les théorèmes 1 et 3, $z^\nu \varphi^{(\nu)}(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) s'annule pour $z = 0$ et pour z infini. Alors, n intégrations par parties successives donnent

$$(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} d\varphi^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} d\varphi(z) = c - 1 \quad [c = \varphi(\infty)],$$

et, compte tenu de (6.5):

$$H(\infty) - H(+0) = 1 - H(+0).$$

En prenant $H(-0) = 0$, $H(+0) = c$, et en définissant $dH(u)$ par la formule (6.5), on obtient bien une fonction de répartition, tendant vers 1 quand $u \rightarrow \infty$, et la fonction $\varphi(z)$ définie par (6.2), s'identifie avec celle donnée, ce qui achève la démonstration.

7. Comme D. DUGUÉ et M. GIRAULT l'ont déjà signalé dans le cas où $n = 1$, et $\alpha = 0$, le théorème 4 est lié à la multiplication de deux variables aléatoires U et V_n . On peut prendre pour U n'importe quelle variable aléatoire réelle telle que la fonction de répartition de $|U|$ soit $H(u)$; V_n sera la variable dont la fonction caractéristique est $\omega^n(z)$. Si U et V_n sont indépendants, le produit UV_n est équivalent en loi à $|U|V_n$, et sa fonction caractéristique est la fonction $\varphi(z)$ définie par (6.2).

8. La classe Γ'_n . Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ définie dans $(-\infty, \infty)$ appartient à la classe Γ'_n si elle est une densité de probabilité et si $f(x)$ et $f(-x)$ appartiennent à C'_n , c'est-à-dire si elle est la dérivée d'une fonction de répartition $F(x)$ absolument continue et telle que $F(x)$ et $F(-x)$ appartiennent à C_n ; il suffit ici que l'entier n soit ≥ 0 ; $f(x)$ appartient en tout cas à C_1 , et est donc absolument continu. On a naturellement

$$(8.1) \quad \Gamma'_n \subset \Gamma'_{n-1} \subset \dots \subset \Gamma'_0,$$

Γ'_0 étant la classe des fonctions non négatives, unimodales, le maximum étant réalisé pour $x = 0$, et telles que

$$(8.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Elles s'annulent donc à l'infini, peuvent être discontinues, et le maximum, qui est le plus grand des deux nombres $f(+0)$ et $f(-0)$, peut être infini. Le produit $xf(x)$ tend vers zéro aussi bien à l'origine qu'à l'infini, et si $f(x) \in \Gamma'_n$, il en est de même de $x^{\nu+1}f^{(\nu)}(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

Théorème 5: La forme générale des fonctions $f(x) \in \Gamma'_n$ est

$$(8.3) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(\frac{x}{u}\right) \frac{dH(u)}{|u|} \quad (x \neq 0),$$

$H(u)$ désignant une fonction de répartition continue à l'origine, et $g_n(x)$ la fonction égale dans $(0, 1)$ à $(n + 1)(1 - x)^n$, et nulle en dehors de cet intervalle.

Remarquons d'abord que ce théorème, comme le théorème 4, est lié à la multiplication des variables aléatoires: $g_n(x)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire V'_n ; celle de uV'_n est $\frac{1}{|u|} g_n \frac{x}{u}$, et si U désigne toujours la variable aléatoire dont $F(u)$ est la fonction de répartition, et si U et V'_n sont indépendants, $f(x)$ est la densité de probabilité du produit UV'_n . On remarque aussi, que pour $n = 0$, et compte tenu de cette remarque, le théorème 5 se réduit à un théorème connu de A. KHINTCHINE.

Pour le démontrer, observons d'abord que, quel que soit le signe de x , ε désignant $+1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$, la formule (8.3) peut s'écrire:

$$(8.4) \quad f(x) = (n + 1) \int_x^{\infty} (1 - x/u)^n \frac{dH(u)}{u} \quad (x \neq 0, \varepsilon = \operatorname{sgn} x).$$

Partons d'abord de cette formule. La fonction $f(x)$ est évidemment ≥ 0 , et

$$(8.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dH(u) \int_u^0 dx (1 - x/u)^{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dH(x) = 1.$$

D'autre part, n dérivations successives donnent

$$(8.6) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n (n + 1)! \int_x^{\infty} \frac{dH(u)}{u^{n+1}},$$

et par suite

$$(8.7) \quad x^{n+1} df^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n + 1)! dH(x),$$

et, $H(x)$ étant monotone, $f^{(n)}(x)$ l'est aussi bien dans $(-\infty, 0)$ que dans $(0, \infty)$. Donc $f(x) \in \Gamma'_n$.

Inversement, partons de $f(x) \in \Gamma'_n$, et définissons de $dH(x)$ par la formule (8.7). La fonction $H(x)$ ainsi définie à une constante près est bien non décroissante. D'autre part

$$(8.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dH(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1)!} \left[\int_{-\infty}^0 x^{n+1} df^{(n)}(x) + \int_0^{\infty} x^{n+1} df^{(n)}(x) \right];$$

Par $n + 1$ intégrations par parties, compte tenu de ce que $xf(x), x^2f'(x), \dots, x^{n+1}f^{(n)}(x)$, sont nuls aux limites*, on trouve

$$(8.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dH(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

La fonction $H(x)$ ainsi définie par (8.7) et par $H(-\infty) = 0$, est donc bien une fonction de répartition continue à l'origine. La formule (8.3) définit alors une fonction qui vérifie (8.7) et s'annule pour $x = \pm \infty$ ainsi que ses n premières dérivées. Elle coïncide donc avec la fonction initialement donnée, qui est ainsi représentable par la formule (8.7), C.Q.F.D.

* Pour la première intégration par parties, les discontinuités éventuelles de $x^{n+1}f^{(n)}(x)$ ne nécessitent aucun terme correctif. Elles interviennent en effet de la même manière dans l'intégrale de STEILTJES initiale et dans la partie intégrée.

III. Généralisation

9. Nous nous bornerons d'abord au cas de fonctions $y = f(x)$ définies dans $(0, \infty)$. L'équation (8.7) sera remplacée par l'équation

$$(9.1) \quad dE_n[y] = dy^{(n)} + \sum_0^n \frac{ay^{(n-\nu)}}{x^{\nu+1}} dx = dF(x),$$

où $F(x)$ est à variation bornée dans tout intervalle strictement intérieur à $(0, \infty)$; $y^{(n)}$ et $y^{(\nu)}$ désignent les dérivées de y d'ordres respectifs n et ν . Cette équation est une équation d'EULER d'ordre $n + 1$, écrite sous une forme qui n'implique pas l'existence de la dérivée d'ordre $n + 1$. La différence $y^{(n)} - F(x)$ étant dérivable, $y^{(n)}$ a les mêmes discontinuités que $F(x)$.

On sait que l'équation sans second membre

$$(9.2) \quad \frac{dE_n[y]}{dx} = 0$$

admet des solutions de la forme x^s , les exposants s étant les racines d'une équation algébrique de degré $n + 1$, appelée *équation caractéristique*. Si une racine s est multiple d'ordre h , les fonctions $x^s \log^k x$ ($k = 1, 2, \dots, h - 1$) sont aussi solutions de l'équation (9.2). On a ainsi dans tous les cas $n + 1$ solutions distinctes, dont les combinaisons linéaires constituent la solution générale.

Nous désignerons par $g(x)$ la fonction, nulle en dehors de $(0, 1)$, et définie dans cet intervalle par l'équation (9.2) et les données de CAUCHY

$$(9.3) \quad g(1) = g'(1) = \dots = g^{(n-1)}(1) = 0, \quad (-1)^n g^{(n)}(1 - 0) = c' > 0,$$

où c' est un nombre positif; $g(x)$ est alors positif pour $1 - x > 0$ et très petit. Cette fonction ne vérifie, dans $(0, 1)$, aucune équation d'EULER d'ordre $\leq n$ et sans second membre; en effet, pour une solution d'une telle équation, les n premières conditions (9.3) entraînent $g(x) = 0$ identiquement ce qui n'est pas le cas. Il en résulte que, si s est une racine d'ordre h de l'équation caractéristique, l'expression de $g(s)$ dans $(0, 1)$ contient effectivement un terme en $x^s \log^{h-1} x$, avec un coefficient non nul. Par suite, pour que $g(x)$ soit fini à l'origine, il faut et il suffit que la solution générale de l'équation (9.2) soit finie. De même, pour que $g(x) = o(x^\alpha)$ ($x \downarrow 0$, α nombre réel quelconque), il faut et il suffit que la solution générale soit $o(x^\alpha)$.

Plaçons-nous d'abord dans un intervalle fini $(0, a)$, de manière à éliminer les difficultés qui se présentent si $g(+0)$ n'est pas fini, et posons

$$(9.4) \quad f(x) = \int_0^a g\left(\frac{x}{u}\right) dH(u) = \int_x^a g\left(\frac{x}{u}\right) dH(u) \quad (0 < x \leq a),$$

$H(u)$ étant à variation bornée dans (x, a) , quel que soit $x \in (0, a)$. Nous allons déterminer $H(x)$ de manière que $f(x)$ vérifie l'équation (9.2). Compte tenu des conditions (9.3), les n premières dérivées de $f(x)$ sont

$$(9.5) \quad f^{(\nu)}(x) = \int_x^a g^{(\nu)}\left(\frac{x}{u}\right) \frac{dH(u)}{u^\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n);$$

On a ensuite

$$(9.6) \quad df^{(n)}(x) = dx \int_x^a g^{(n+1)}\left(\frac{x}{u}\right) \frac{d(u)}{u^{n+1}} - (-1)^n \frac{c' dH(x)}{x^n}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $dE_n[f(x)]$, on trouve

$$(9.7) \quad dE_n[f(x)] = dx \int_x^a E\left[g\left(\frac{x}{u}\right)\right] dH(u) - (-1)^n \frac{c' dH(x)}{x^n}.$$

Or $g(x/u)$ est, comme $g(x)$, solution de l'équation (9.2). L'équation (9.1) se réduit donc à :

$$(9.8) \quad c' dH(x) = -(-x)^n dF(x).$$

La fonction $H(x)$, ainsi définie à une constante près, est bien à variation bornée dans tout intervalle $[x, a] \in (0, a]$, et la fonction $f(x)$, définie par la formule (9.4), est la solution de l'équation (9.2) qui s'annule pour $x = a$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n .

Il n'y a rien d'essentiel à changer si x varie de $-a$ à $+a$. Il faudra seulement remplacer $x^s \log^k x$ par $|x|^s \log^k |x|$. Les formules (9.4) et (9.8) deviendront :

$$(9.9) \quad f(x) = \int_{-a}^a g\left(\frac{x}{u}\right) dH(u) \quad [x \in (-a, +a), x \neq 0],$$

la partie utile de l'intervalle d'intégration étant $(-a, x)$ si $x < 0$ et (x, a) si $x > 0$, et

$$(9.10) \quad c' dH(x) = (-x)^{n-1} |x| \cdot dF(x)$$

Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que $dF(x)$ soit de signe constant dans chacun des intervalles $(-a, 0)$ et $(0, a)$ est que $H(x)$ y soit monotone. D'une manière plus précise :

Théorème 6. *La solution générale de l'équation*

$$(9.11) \quad (-x)^{n-1} dE_n[f(x)] \geq 0 \quad [x \in (-a, +a), x \neq 0, dx > 0]$$

s'obtient en prenant pour $H(x)$ une fonction non décroissante dans chacun des intervalles $(-a, 0)$ et $(0, a)$ et finie pour $x = \pm a$, et en ajoutant à la fonction $f(x)$ définie par la formule (9.9) la solution générale de l'équation (9.2).

10. Demandons-nous maintenant si ces résultats subsistent pour a infini. La réponse dépend de la convergence de l'intégrale

$$(10.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{u}\right) dH(u) \quad (x \neq 0),$$

dans laquelle la partie utile de l'intervalle d'intégration se réduit à $(-\infty, x)$ si $x < 0$ et (x, ∞) si $x > 0$. Si cette intégrale est divergente pour $x > 0$ (par exemple), cela n'empêche pas les solutions de l'équation (9.1) d'être prolongeables jusqu'à l'infini [$H(x)$ et $F(x)$ étant toujours liés par la relation (9.10)]. Mais il n'y a pas de solution s'annulant à l'infini ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. Si au contraire l'intégrale a un sens, il en est a fortiori de même de celles qui représentent les dérivées de $f(x)$ jusqu'à l'ordre n , et tous les calculs du n° 9 subsistent : $f(x)$ est la solution de l'équation (9.1) qui s'annule à l'infini ainsi que

ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. Ces remarques peuvent s'appliquer séparément à la convergence à gauche et à la convergence à droite.

On peut distinguer trois cas de convergence. Dans le premier, $H(u)$ ne varie que dans un intervalle fini; alors la convergence est assurée quelle que soit l'équation d'EULER considérée. Comme $F(x)$ ne varie qu'en même temps que $H(x)$, $f(x)$ est solution de l'équation (9.2), en dehors de l'intervalle où cette fonction varie. Dans le second cas $g(x)$ est borné, et la convergence est assurée pourvu que $H(u)$ soit à variation bornée dans (a, ∞) et dans $(-\infty, a)$, quel que soit $a > 0$. Le troisième cas est un cas mixte: $g(x)$ n'est pas borné au voisinage de l'origine; la convergence est tout de même possible pourvu que $H(\infty) - H(u)$ et $H(-u) - H(-\infty)$ tendent vers zéro assez rapidement, pour u infini. Naturellement, ici encore, on peut distinguer la convergence à gauche et la convergence à droite.

Revenons sur le second cas, qui suppose $g(x)$ borné. Nous avons vu qu'il est pour cela nécessaire et suffisant que la solution générale de l'équation (9.2) soit finie au voisinage de l'origine. Il est donc nécessaire et suffisant que toutes les racines de l'équation caractéristique aient leur partie réelle ≥ 0 , et que celles dont la partie réelle serait nulle soient des racines simples. Pour le moment, rien n'exclut les racines complexes.

11. Application aux fonctions caractéristiques. Plaçons-nous dans le cas où, pour une valeur convenable de c' , la fonction $g(|z|)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire V . C'est alors pour $z \geq 0$ la solution de l'équation (9.2) déterminée par les n premières conditions (9.3), et la condition supplémentaire $\varphi(0) = 1$. Si U est une variable aléatoire ≥ 0 et indépendante de V , le produit $X = UV$ a pour fonction caractéristique

$$(11.1) \quad \varphi(z) = \int_{-0}^{\infty} g(u|z|) dH(u) = \int_0^{1/|z|} g(u|z|) dH(u),$$

et, comme au n° 6, on a

$$(11.2) \quad \Pr\{U = 0\} = \Pr\{X = 0\} = \varphi(\infty) = H(+0) \in [0, 1]$$

Ce nombre sera toujours désigné par c .

Supposons d'abord $z > 0$. On a alors

$$(11.3) \quad \varphi^{(v)}(z) = \int_{-\infty}^{1/z} u^v g^{(v)}(uz) dH(u) \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

$$(11.4) \quad d\varphi^{(n)}(z) = (-1/z)^n c' dH(1/z),$$

et par suite

$$(11.5) \quad (-z)^n dE_n[\varphi(z)] = c' dH\left(\frac{1}{z}\right) \leq 0 \quad (z > 0, dz > 0).$$

La fonction $\varphi(z)$, étant paire, vérifie donc quel que soit z une équation différentielle de la forme

$$(11.6) \quad (-z)^{n-1} dE_n[\varphi(z)] = dF(z) \geq 0 \quad (z \neq 0, dz > 0)$$

[$\varphi(z)$ étant pair, cette formule, vraie pour $z > 0$, l'est aussi pour $z < 0$; il y a à l'origine des discontinuités des dérivées qui la rendent dépourvue de sens pour $z = 0$].

Compte tenu de ce que, si U est de signe quelconque, la loi du produit UV ne dépend que de celle de $|U|$, le résultat obtenu peut s'exprimer comme suit:

Théorème 7. *Si, $g(z)$ étant la solution de l'équation (9.2) définie par les conditions (9.3), la fonction caractéristique $\varphi(z)$ d'une variable aléatoire V est réelle (donc paire) et vérifie l'équation (9.2), et si U est une variable aléatoire indépendante de V , la fonction caractéristique $\varphi(z)$ du produit UV vérifie l'inéquation*

$$(11.7) \quad (-z)^{n-1} dE_n[\varphi(z)] \geq 0 \quad (z \neq 0, dz > 0)$$

On ne restreint pas la généralité des fonctions $\varphi(z)$ obtenues en supposant $U \geq 0$.

Nous allons compléter ce théorème par quelques remarques relatives, les unes à ses condition d'application, les autres à la réciproque, que l'analogie avec le théorème 4 rend très vraisemblable, mais que nous n'avons pas démontrée.

12. Remarques sur le théorème 7. a) Donnons d'abord quelques exemples de fonctions $g(|z|)$ qui vérifient les conditions de l'énoncé de ce théorème. Nous connaissons déjà la fonction $\omega^n(z)$ du théorème 4; mais il en faut d'autres pour montrer que le théorème 7 généralise les résultats antérieurement connus. Les exemples les plus simples sont donnés par les formules suivantes, valables pour $z \in [0, 1]$ [cela suffit, $g(z)$ étant nul pour $z > 1$]:

$$(12.1) \quad g_1(z) = 1 - z^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

$$(12.2) \quad g_2(z) = 1 - (a + 1)z^{c/(a+1)} + az^{c/a} \quad (0 < a \leq c \leq a + 1).$$

Ces fonctions sont manifestement solutions d'équations d'EULER sans seconds membres d'ordres respectifs 2 et 3, et ont, pour $z = 1$, des racines d'ordres respectifs 1 et 2; ce sont donc bien les fonctions $g(z)$ relatives à ces équations d'EULER. Ce sont de plus des fonctions convexes au sens de PÓLYA; ce sont donc bien des fonctions caractéristiques.

On remarque que, pour $\alpha = 1$, $g_1(|z|) = \omega(z)$, et, pour $a = 1$, $c = 2$, $g_2(z) = \omega^2(z)$. De plus, $g_1^n(z)$, dans le cas général, et $g_2^n(z)$ dans le cas $a = 1$, sont aussi des fonctions $g(z)$ liées à des équations d'EULER d'ordres respectifs $n + 1$ et $2n + 1$. Mais, dans le cas général, il n'en est pas de même de $g_2^n(z)$, qui n'a au point $z = 1$ qu'une racine d'ordre $2n$, et qui, comprenant plus de $2n + 1$ termes où figurent des puissances de z d'exposants tous différents, ne peut pas être solution d'une équation d'EULER sans second membre d'ordre $2n + 1$. Naturellement, c'est toujours une fonctions caractéristique, solution d'une équation d'EULER, mais ce n'est pas la fonction $g(z)$ liée à cette équation.

Considérons encore la fonction

$$(12.3) \quad g_0(z) = 1 - a^2 z^{a-1/a} + (a^2 - 1)z^a \cos \log z.$$

Pour $a - 1$ positif et assez petit, elle est convexe dans $(0, 1)$; elle admet la racine triple $z = 1$, et est solution d'une équation d'EULER d'ordre 4. Cet exemple montre que les conditions de l'énoncé peuvent être vérifiées pour une équation d'EULER dont l'équation caractéristique, qui est

$$(12.4) \quad (s - 1) \left(s - a + \frac{1}{a} \right) [(s - a)^2 + 1] = 0,$$

admet des racines imaginaires. Malgré les oscillations de $\cos \log z$, le multiplicateur

z^a décroît assez vite pour que le signe de la dérivée seconde soit déterminé par le premier terme non nul de cette dérivée.

b) Nous ne connaissons pas les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $g(|z|)$ relative à une équation d'EULER donnée soit une fonction caractéristique. Nous venons de voir qu'il n'est pas nécessaire que les racines de l'équation caractéristique soient réelles. D'autre part, $g(0) = 1$ implique que la solution générale de l'équation donnée soit finie, c'est-à-dire que les racines de l'équation caractéristique vérifient les conditions énoncées à la fin du n° 10. Ces conditions sont ainsi nécessaires, mais ne sont manifestement pas suffisantes pour que $g(|z|)$ soit une fonction caractéristique.

c) Examinons maintenant la réciproque du théorème 7. Plaçons-nous à cet effet dans le cas où $\varphi(z)$ est une fonction caractéristique, et considérons une fonction caractéristique $f(z)$, qui vérifie l'inégalité (11.7). Il s'agit de savoir si elle est de la forme (11.1).

Définissons alors $H(u) - H(+0)$ par la formule (11.6). C'est une fonction non décroissante, et il s'agit de savoir si elle est bornée et à variation totale ≤ 1 . Or on a

$$(12.5) \quad \int_0^{\infty} dH(u) = - \int_{+0}^{\infty} dH\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{c'} \int_{+0}^{\infty} z^n dE[\varphi_n(z)].$$

Si, par analogie avec les théorèmes 1 et 3, nous admettons que, pour $\nu = 1, 2, \dots, n$, le produit $z^\nu \varphi^{(\nu)}(z)$ s'annule aux extrémités de l'intervalle d'intégration, n intégrations par parties successives donnent

$$(12.6) \quad \int_0^{\infty} dH(u) = \frac{-n!}{c'} \int_0^{\infty} d\varphi(z) = \left(\frac{n!}{c'}\right) [1 - \varphi(\infty)].$$

Or, la constante c' ne dépend manifestement que des coefficients de l'équation d'EULER, et il suffit de partir d'un cas où $\varphi(z)$ est de la forme (11.1) pour s'assurer que $c' = n!$. On obtient donc bien une fonction de répartition en prenant $H(-0) = 0$, $H(+0) = \varphi(\infty)$, et en définissant ensuite la variation de $H(u)$ dans $(0, \infty)$ par la formule (11.6). L'intégrale (11.1) définit alors une fonction qui s'identifie nécessairement avec celle donnée. La différence entre ces deux fonctions est en effet solution de l'équation (9.2), s'annule pour $z = 0$ et ses n premières dérivées s'annulent à l'infini.

Ce raisonnement nous paraît rendre très vraisemblable la réciproque du théorème 4. Mais nous n'avons pas démontré les extensions des théorèmes 1 et 3 qui sont nécessaires pour montrer que, dans les intégrations par parties effectuées, les termes intégrés s'annulent aux limites de l'intervalle d'intégration*.

d) Même si la réciproque du théorème 7 que nous venons de considérer est exacte, cela ne résout pas d'une manière générale le problème de la recherche des fonctions caractéristiques vérifiant des équations de la forme (11.7). Il faut en outre se demander si, dans le cas où $g(|z|)$ n'est pas une fonctions caractéristique,

* Remarquons simplement qu'on peut supposer que $\varphi(z)$ est $n + 1$ fois dérivable, de sorte que le premier membre de l'inéquation (11.7) est celui d'une équation différentielle d'EULER. Un passage à la limite permettrait ensuite d'étendre le résultat obtenu au cas où $\varphi^{(n)}(z)$ est seulement supposé monotone.

il est tout de même possible que, pour certaines déterminations de la fonction de répartition $H(u)$, la fonction $\varphi(z)$ définie par la formule (11.1) soit une fonction caractéristique. Par contre la condition que $g(|z|)$ soit une fonction caractéristique est évidemment nécessaire et suffisante pour que $\varphi(z)$ soit une fonction caractéristique quelle que soit la fonction de répartition $H(u)$.

Remarquons enfin qu'il peut arriver que la formule (11.1) représente une fonction caractéristique sans que la fonction $H(u)$ soit monotone. Ainsi, dans le cas où $g(|z|) = \omega(z)$, nous avons signalé dans [2] que $\omega(2z) - \omega(z)$ est une fonction caractéristique, et que ce n'est qu'un exemple parmi beaucoup d'autres. Mais évidemment, dans les cas de ce genre, la fonction caractéristique $\varphi(z)$ ne vérifie pas la condition (11.7).

13. Application aux densités de probabilité. Le théorème 5 relatif à ces densités se généralise exactement dans les mêmes conditions que le théorème 4 relatif aux fonctions caractéristiques. Il faut ici supposer que $g(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire V' [évidemment $\in (0, 1)$], si on écarte une généralisation simple qui permettrait de donner une probabilité positive à la valeur zéro, la fonction de répartition restant absolument continue dans $(0, 1)$. Nous supposons de plus que, dans $(0, 1)$, $g(x)$ est toujours $< g(+0)$. Dans ces conditions, on a le théorème suivant :

Théorème 8. $H(u)$ désignant une fonction de répartition continue à l'origine, la fonction

$$(13.1) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{u}\right) \frac{dH(u)}{u}$$

(qui est toujours la densité de probabilité d'un produit UV'), est maxima à l'origine, et vérifie l'inéquation

$$(-x)^{n-1} dE_n[f(x)] \geq 0 \quad (x \neq 0, dx > 0)$$

La vérification est immédiate, comme pour le théorème 5.

Pour la réciproque, l'extension de la seconde partie du théorème 5 présente la même difficulté que pour le théorème 7. Il faut démontrer ou admettre que les produits $xf(x), x^2f'(x), \dots, x^{n+1}f^{(n)}(x)$ s'annulent à l'infini.

Ensuite, la réciproque du théorème 8 s'établit par le raisonnement indiqué à propos des théorèmes 5 et 7; il semble inutile de le répéter.

Bibliographie

- [1] DUGUÉ, D., et M. GIRAULT: Fonctions convexes de PÓLYA. Public. de l'Institut de Statistique de l'Univ. de Paris, IV (1955), p. 3—10.
- [2] LÉVY, P.: Quelques problèmes non résolus de la théorie des fonctions caractéristiques. Ann. Mat. pura appl., Serie IV, LIII, p. 315—331 (1961).

38 Avenue Théophile Gautier
Paris 16

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1962)