Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 146—153 (1962)

Asymptotische Verteilungen der Zeit ersten Durchganges im periodischen Falle

Von

PETR MANDL

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit homogenen Markowschen Prozessen auf dem Intervalle (A, ∞) (der Fall $A = -\infty$ wird nicht ausgeschlossen), deren Trajektorien stetig sind und deren Dichte der Übergangswahrscheinlichkeit den Kolmogorowschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{(x,y)}^{(t)} = a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{(x,y)}^{(t)} + b(x) \frac{\partial}{\partial x} f_{(x,y)}^{(t)}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} f_{(x,y)}^{(t)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} a(y) f_{(x,y)}^{(t)} - \frac{\partial}{\partial y} b(y) f_{(x,y)}^{(t)}$$

genügt, wo die Koeffizienten $a(x) > 0$ und $b(x)$ in dem Intervalle (A, ∞) stetige Funktionen von x sind.

Es wird vorausgesetzt, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert ein solches $X > A$ und $R > 0$, daß

$$a(x + R) = a(x), \quad b(x + R) = b(x)$$

für $x \geqq X$ ist.

2. Von beliebiger Lage $x \in (A, \infty)$ ausgehend, erreicht der Prozeß mit Wahrscheinlichkeit Eins jede Lage $y > x$.

Es werden asymptotische Verteilungen für den Zeitpunkt, in welchem der Prozeß zum erstenmal den Wert Z annimmt, für $Z \to \infty$ abgeleitet.

Für

$$x \in \langle X + (k-1)R, X + (k+1)R \rangle$$

und $k = 1, 2, \ldots$ bezeichne $F_k^+(t, x)$ $[F_k^-(t, x)]$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß ausgehend von x die Lage $X + (k+1)R$ $[X + (k-1)R]$ früher als die Lage $X + (k-1)R$ $[X + (k+1)R]$ erreicht und die dazu notwendige Zeit kürzer als t sein wird.

Ferner sei

$$\varphi_k^+(s, x) = \int_0^\infty e^{ist} \, d F_k^+(t, x), \quad \varphi_k^-(s, x) = \int_0^\infty e^{ist} \, d F_k^-(t, x).$$

Es ist bekannt [1], daß die Funktionen $\varphi_k^+(s, x)$, $\varphi_k^-(s, x)$ die Lösungen der Gleichung

$$a(x)\varphi'' + b(x)\varphi' + is\varphi = 0 \tag{1}$$

sind und die Bedingungen

$$\varphi_k^+(X + (k-1)R) = 0, \quad \varphi_k^+(X + (k+1)R) = 1,$$
$$\varphi_k^-(X + (k-1)R) = 1, \quad \varphi_k^-(X + (k+1)R) = 0, \qquad \text{erfüllen.}$$

Aus der Voraussetzung 1. folgt, daß

$$\varphi_{k+1}^{+}(s, x+R) = \varphi_k^{+}(s, x), \quad \varphi_{k+1}^{-}(s, x+R) = \varphi_k^{-}(s, x)$$

ist. Wir bezeichnen für $k = 1, 2, \ldots$ mit $p = \varphi_k^{+}(0, X + kR) = \varphi_1^{+}(0, X + R)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ausgehend von $X + kR$ die Lage $X + (k+1)R$ früher als die Lage $X + (k-1)R$ erreicht wird, $q = \varphi_1^{-}(0, X + R) = 1 - p$.

Ferner sei

$$F^{+}(t) = p^{-1} F_k^{+}(t, X + kR) = p^{-1} F_1^{+}(t, X + R)$$

die Verteilungsfunktion der zum Übergange von der Lage $X + kR$ in die Lage $X + (k+1)R$ notwendigen Zeit unter der Bedingung, daß die Lage $X + (k+1)R$ früher als die Lage $X + (k-1)R$ erreicht wurde. Analog sei

$$F^{-}(t) = q^{-1} F_k^{-}(t, X + kR) = q^{-1} F_1^{-}(t, X + R).$$

$F^0(t)$ sei die Verteilungsfunktion der Zeit, welche zum Übergange von der Lage X in die Lage $X + R$ notwendig ist.

Die charakteristischen Funktionen, welche diesen Verteilungsfunktionen entsprechen, werden mit $\varphi^{+}(s)$, $\varphi^{-}(s)$ und $\varphi^{0}(s)$ bezeichnet.

Es gilt

$$\varphi^{+}(s) = p^{-1} \varphi_1^{+}(s, X + R), \quad \varphi^{-}(s) = q^{-1} \varphi_1^{-}(s, X + R).$$

Man kann also aus der Gleichung (1) die Eigenschaften der Funktionen $\varphi^{+}(s)$, $\varphi^{-}(s)$ und die Ausdrücke für die im weiteren vorkommenden Momente ableiten. Aus (1) ergibt sich, daß $\varphi^{+}(s)$ und $\varphi^{-}(s)$ Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen. Man kann auch die Wahrscheinlichkeit p berechnen. Es ist

$$p = \frac{1}{1 + e^{-\beta}}, \quad \text{mit } \beta = \int_X^{X+R} b(s)\, a(s)^{-1}\, ds. \tag{2}$$

Es sei für $k = 1, 2, \ldots n$ $\psi_k^n(s)$ die charakteristische Funktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zeit, in welcher der Prozeß, von der Lage $X + kR$ ausgehend, zum erstenmal den Wert $Z = X + nR$ annimmt. Aus dem Markowschen Charakter des Prozesses folgt, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zeit, unter der Bedingung, daß der Wert $X + (k-1)R$ früher als der Wert $X + (k+1)R$ angenommen wurde, für $k = 2, 3, \ldots n - 1$ die charakteristische Funktion $\varphi^{-}(s)\psi_{k-1}^n(s)$ und für $k = 1$ $\varphi^{-}(s)\varphi^{0}(s)\psi_1^n(s)$ besitzt. Analog ist für $k = 1, 2, \ldots n - 1$ die charakteristische Funktion der Verteilung unter der Bedingung, daß früher der Wert $X + (k+1)R$ angenommen wurde, gleich $\varphi^{+}(s)\psi_{k+1}^{(n)}(s)$. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\psi_1^n(s) = [q\,\varphi^{-}(s)\,\varphi^{0}(s)]\,\psi_1^n(s) + [p\,\varphi^{+}(s)]\,\psi_2^n(s), \\ &\psi_k^n(s) = [q\,\varphi^{-}(s)]\,\psi_{k-1}^n(s) + [p\,\varphi^{+}(s)]\,\psi_{k+1}^n(s) \\ &\text{für } k = 2, \ldots, n-1, \\ &\psi_n^n(s) \equiv 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Man sieht leicht, daß durch dieses System die Funktionen $\psi_k^n(s)$ für $k=1,2,\ldots,n$ eindeutig bestimmt sind. Die Lösung des Systems (3) ist von der Form

$$\psi_k^n(s) = c_1(s)\,\omega_1(s)^k + c_2(s)\,\omega_2(s)^k.$$

Hier sind $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$ die Wurzel der Gleichung

$$[p\,\varphi^+(s)]\,\omega^2 - \omega + [q\,\varphi^-(s)] = 0.$$

Die Koeffizienten $c_1(s)$ und $c_2(s)$ werden aus der ersten und der letzten Gleichung in (3) bestimmt.

Es ist

$$\omega_1(s) = \frac{1 + [1 - 4\,p\,q\,\varphi^+(s)\,\varphi^-(s)]^{\frac{1}{2}}}{2\,p\,\varphi^+(s)},$$

$$\omega_2(s) = \frac{1 - [1 - 4\,p\,q\,\varphi^+(s)\,\varphi^-(s)]^{\frac{1}{2}}}{2\,p\,\varphi^+(s)}.$$

Wenn wir zur Abkürzung

$$P = p\,\varphi^+(s), \quad Q = q\,\varphi^-(s), \quad R = 1 - q\,\varphi^-(s)\,\varphi^0(s)$$

setzen, so bekommen wir für ψ_k^n den Ausdruck

$$\begin{aligned}(4)\qquad \psi_k^n = {} & [(\omega_1^{n-1} - Q\,\omega_1^{n-2})\,(R\,\omega_2 - P\,\omega_2^2) - (\omega_2^{n-1} - Q\omega_2^{n-2})\,(R\,\omega_1 - P\,\omega_1^2)]^{-1}\cdot \\ & \cdot [P(R\,\omega_2 - P\,\omega_2^2)\,\omega_1^k - P(R\,\omega_1 - P\,\omega_1^2)\,\omega_2^k].\end{aligned}$$

Beim Studium der asymptotischen Verteilung werden wir von der Formel (4) ausgehen und drei Fälle $\beta > 0$, $\beta < 0$ und $\beta = 0$ unterscheiden.

1. $\beta > 0$. Aus der Relation (2) folgt, daß in diesem Falle $p > \frac{1}{2}$ ist. Es ist für $s \to 0$:

$$P \to p, \quad R \to p, \quad Q \to q,$$

$$\omega_1(s) \to 1, \quad \omega_2(s) \to \tfrac{q}{p} < 1.$$

Das Symbol $\sim$ zwischen zwei Größen soll bezeichnen, daß der Quotient dieser Größen gegen Eins strebt.

Wir haben für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\psi_k^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) e^{-i\frac{s\sqrt{n}\,\mu}{\sigma}} &\sim \frac{p\,e^{-\frac{is\sqrt{n}\mu}{\sigma}}}{{\omega_1}^{n-1} - Q\,{\omega_1}^{n-2}} \sim \omega_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{-n} e^{-\frac{is\sqrt{n}\mu}{\sigma}} \\ &= \left[\left\{1 - \frac{\omega_1'(0)}{\omega_1^2(0)}\,\frac{s}{\sqrt{n}\,\sigma} + \frac{1}{2}\left[2\,\frac{[\omega_1'(0)]^2}{\omega_1^3(0)} - \frac{\omega_1''(0)}{\omega_1^2(0)}\right]\frac{s^2}{n\,\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right. \\ &\qquad \left.\left\{1 - \frac{i\,s\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} - \frac{1}{2}\,\frac{s^2\,\mu^2}{n\,\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]^n.\end{aligned}$$

Daraus sehen wir, daß für

$$(5)\qquad i\,\mu = -\frac{\omega_1'(0)}{\omega_1^2(0)} = -\,\omega_1'(0),$$

$$(6)\qquad \sigma^2 = -\left\{2\,\frac{[\omega_1'(0)]^2}{\omega_1^3(0)} - \frac{\omega_1''(0)}{\omega_1^2(0)}\right\} - \mu^2 = \omega_1''(0) - [\omega_1''(0)]^2,$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \psi_k^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) e^{-\frac{is\sqrt{n}\,\mu}{\sigma}} = e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Also die Grenzverteilung ist die Normalverteilung.

Wir führen jetzt einige Bezeichnungen ein, die auch im weiteren benutzt werden.

Es sei

$$\mu_+ = \int_0^\infty t\,dF^+(t), \quad \mu_- = \int_0^\infty t\,dF^-(t),$$

$$\hat{F}(t) = p F^+(t) + q F^-(t).$$

$\hat{F}(t)$ ist die Verteilungsfunktion der Zeit, welche von der Ausgangslage $X + kR$ zur Erreichung entweder der Lage $X + (k-1)R$ oder der Lage $X + (k+1)R$ notwendig ist. Die Momente dieser Verteilung seien

$$\varepsilon = \int_0^\infty t\,d\hat{F}(t) = p\,\mu_+ + q\,\mu_-,$$

(7)

$$\Delta^2 = \int_0^\infty (t-\varepsilon)^2\,d\hat{F}(t).$$

Wenn man die Ableitungen in (5) und (6) ausrechnet, so bekommt man nach einigen Umformungen

(8) $$\mu = \frac{\varepsilon}{p-q},$$

(9) $$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{p-q} + \frac{pq}{(p-q)^3}(\mu_+ + \mu_-)^2 - \frac{pq}{p-q}(\mu_+ - \mu_-)^2.$$

2. $\beta < 0$. In diesem Falle ist $p < \frac{1}{2}$ und für $s \to 0$ $\omega_1(s) \to \frac{q}{p} > 1$, $\omega_2(s) \to 1$. Hier werden wir voraussetzen, daß $\mu_0 = \int_0^\infty t\,dF_0(t) < \infty$ ist. Wir setzen

$$\frac{q}{p} = \tau, \quad H(s) = R(s) - P(s)\,\omega_2(s).$$

Man ersieht leicht, daß man schreiben kann

$$H(s) = H'(0)\,s + o(s) = -i\left[\frac{q}{q-p}\,\varepsilon + q\,\mu_0\right] s + o(s) = -\,i H_1 s + o(s).$$

Hier wurde die Voraussetzung $\mu_0 < \infty$ benutzt.

Für $n \to \infty$ haben wir

$$\begin{aligned}\psi_k^n(\tau^{-n} s) &\sim [\omega_2^{n-2} p^2 \tau(1-\tau) - (\tau - q)\,\omega_1^{n-2}(R - P\,\omega_2)]^{-1} \cdot \\ &\cdot p^2 \tau(1-\tau) = q(q-p)\left[\omega_2^{n-2} q(q-p) + \frac{q^2}{p}\,\omega_1^{n-2}(R - P\,\omega_2)\right]^{-1} = \\ &= q(q-p)\left[q(q-p) - i\,\frac{q^2}{p\,\tau^2}\left(\frac{\omega_1}{\tau}\right)^{n-2}(H_1 s + o(1))\right]^{-1},\end{aligned}$$

denn es ist $\omega_2(s\,\tau^{-n})^{n-2} \to 1$. Da auch

$$\left(\frac{\omega_1(s\,\tau^{-n})}{\tau}\right)^{n-2} \to 1$$

ist, so sehen wir, daß für

(10) $$K = \frac{q-p}{p}\left[\frac{\varepsilon}{q-p} + \mu_0\right]^{-1}$$

gilt $$\lim_{n\to\infty} \psi_k^n\left(K\left(\tfrac{p}{q}\right)^n s\right) = (1 - is)^{-1}.$$

Die Grenzverteilung ist in diesem Falle die Exponentialverteilung.

3. $\beta = 0$. Unter dieser Bedingung ist $p = \frac{1}{2}$. Wir werden voraussetzen, daß ein solches $\delta > \frac{1}{2}$ existiert, daß

(11) $$\int_0^\infty t^\delta dF_0(t) < \infty$$

ist. Es ist nicht schwer nachzuweisen, daß man hat $\varphi_0(s) = 1 + O(|s|^\delta)$, wenn (11) erfüllt ist.

Wir haben für $s \to 0$

$$\omega_1(s) = 1 - \gamma s^{1/2} + o(|s|^{1/2})$$
$$\omega_2(s) = 1 + \gamma s^{1/2} + o(|s|^{1/2}),$$

wo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\sqrt{\mu_+ + \mu_-}$, $s^{1/2} = \sqrt{s}$ für $s > 0$, $s^{1/2} = i\sqrt{|s|}$ für $s < 0$ ist.

Unter der Voraussetzung (11) kann man schreiben

$$R - P\omega_1 = \tfrac{1}{2}\gamma s^{1/2} + o(|s|^{1/2}),$$
$$R - P\omega_2 = -\tfrac{1}{2}\gamma s^{1/2} + o(|s|^{1/2}).$$

Für $n \to \infty$ haben wir, wo wir die durch (7) eingeführte Bezeichnung benutzen:

$$\psi_k^n\left(\frac{s}{\varepsilon n^2}\right) \sim [\tfrac{1}{2}\omega_1^n(R - P\omega_2) - \tfrac{1}{2}\omega_2^n(R - P\omega_1)]^{-1}.$$
$$(\tfrac{1}{2}(R - P\omega_2) - \tfrac{1}{2}(R - P\omega_1)) =$$
$$= \left[\left(1 - \frac{\gamma s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \cdot \left(-\frac{\gamma s^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\varepsilon}n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 + \frac{\gamma s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{\gamma s^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\varepsilon}n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^{-1} \cdot \left[\left(-\frac{\gamma s^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\varepsilon}n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{\gamma s^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\varepsilon}n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \sim$$
$$\sim 2\left[\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{s^{\frac{1}{2}}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{s^{\frac{1}{2}}}{n}\right)^n\right]^{-1}.$$

Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \psi_k^n\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon n^2}\right) = 2\left[e^{(1-i)\sqrt{s}} + e^{-(1-i)\sqrt{s}}\right]^{-1} = \frac{1}{\cos\sqrt{2is}}.$$

Die charakteristische Funktion auf der rechten Seite bezeichnen wir mit $\varphi(s)$ und wir suchen nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t)$, welche dieser charakteristischen Funktion entspricht.

Es ist

$$\varphi(s) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)(1-i)\sqrt{s}}.$$

Die Reihe kann man Glied für Glied invertieren, nämlich: $e^{-(2n+1)(1-i)\sqrt{s}}$ ist die charakteristische Funktion der Verteilung der Zeit, welche für den Übergang von der Null nach $(2n+1)$ bei der freien Brownschen Bewegung notwendig ist. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte ist gleich

$$\frac{2n+1}{\sqrt{2\pi}\, t^{\frac{3}{2}}} \exp - \frac{(2n+1)^2}{2t}.$$

Man bekommt also für $f(t)$ den Ausdruck

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)\, e^{\frac{-(2n+1)^2}{2t}},$$

das ist

$$V(t) = \int_0^t f(y)\, dy = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Phi\left(\frac{2n+1}{\sqrt{t}}\right) \tag{12}$$

wo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Durch unmittelbare Berechnung für die Brownsche Bewegung mit einer abstoßenden Schranke bekommt man die Beziehung

$$V(t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, e^{-\frac{[(2k+1)\pi]^2 t}{8}}. \tag{13}$$

Die bewiesenen Behauptungen fassen wir später in einem Satz zusammen. Zuerst aber beseitigen wir einige Einschränkungen in den Voraussetzungen. Die Grenzbeziehungen bleiben für beliebige Verteilung der Anfangslagen gültig. Um sich davon zu überzeugen, bezeichnen wir mit $G(t; F, Z)$ die Verteilungsfunktion der Zeit, in welcher zum erstenmal ein Wert größer oder gleich Z angenommen wird, wenn die Anfangsverteilung durch die Verteilungsfunktion $F(x)$ gegeben ist. Ferner sei für $x < X + R$ $\varphi_0(s, x)$ die charakteristische Funktion der Verteilung der Zeit, welche zum Übergange aus der Lage x in die Lage $X + R$ notwendig ist. Wenn wir die am Anfang eingeführten Bezeichnungen ausnutzen, so sehen wir leicht, daß, z. B. für n ungerade, folgende Beziehung gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{its}\, \mathrm{d}G(t; F, X+nR) &= 1 - F(X+nR) + \psi_1^n(s) \int_{-\infty}^{X+R} \varphi_0(s, x)\, dF(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \int_{X+(2k-1)R}^{X+(2k+1)R} [\psi_{2k-1}^n(s)\, \varphi_{2k}^-(s, x) + \psi_{2k+1}^n(s)\, \varphi_{2k}^+(s, x)]\, dF(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß die bewiesenen asymptotischen Formeln, für beliebige Anfangsverteilung gelten.

Jetzt beseitigen wir auch die Einschränkung, daß Z nur die Werte $X + nR$, wo n eine ganze Zahl ist, durchläuft. Die Fälle 1. und 3. bieten keine Schwierigkeiten. Es gilt für $X + nR \leqq Z \leqq X + (n+1)R$:

$$G(t; F, X+nR) \geqq G(t; F, Z) \geqq G(t; F, X+(n+1)R)$$

und folglich, wenn wir z. B. den Fall 3. betrachten wollen,

$$G(\varepsilon Z^2 t; F, X + n R) \geqq G(\varepsilon Z^2 t; F, Z) \geqq G(\varepsilon Z^2 t; F, X + (n+1) R).$$

Daraus folgt, wie unter 3. bewiesen wurde, daß die ganz links und die ganz rechts in dieser Ungleichung stehende Funktion für $Z \to \infty$ gegen die durch (12) gegebene Verteilungsfunktion konvergiert. Also gilt dasselbe auch für die in der Mitte stehende Funktion. Eine ähnliche Überlegung kann man auch im Falle 1. machen.

Aus der Tatsache, daß wir uns nicht auf die Werte Z der Form $Z = X + nR$ beschränken sollen, folgt, daß μ, σ und ε von der Wahl des Anfangswertes X unabhängig sind.

Der Fall 2. kann folgendermaßen untersucht werden: Wir bezeichnen mit $[a]$ den ganzen und mit $\{a\}$ den gebrochenen Teil von a und setzen

$$\bar{X}(Z) = X + \left\{\frac{Z-X}{R}\right\} R$$

Dann kann man schreiben

$$Z = \bar{X}(Z) + \left[\frac{Z-X}{R}\right] R.$$

So haben wir Z in der von uns schon behandelten Form ausgedrückt. Da die abgeleiteten Grenzbeziehungen gleichmäßig für $\bar{X}(Z) \in \langle X, X + R\rangle$ gelten, so bekommen wir leicht mit Hilfe von (14):

$$\lim_{Z\to\infty} G\left(K(Z)^{-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{\left\{\frac{Z-X}{R}\right\}} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{Z-X}{R}} t; F, Z\right) =$$

$$\lim_{Z\to\infty} G(k(Z)^{-1} \Theta^{-Z} t; F, Z) = 1 - e^{-t},$$

wo $K(Z)$ durch (10) gegeben ist. Die Abhängigkeit der Größe K von Z ist durch die Abhängigkeit der Größe $\bar{X}$ von Z gegeben. Besonders gilt also

$$K(Z + R) = K(Z).$$

Dabei haben wir gesetzt:

$$k(Z) = K(Z) \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X}{R} - \left\{\frac{Z-X}{R}\right\}}, \tag{15}$$

$$\Theta = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{R}}. \tag{16}$$

Der Inhalt dieser Arbeit kann also folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Satz: *Sind die Voraussetzungen 1., 2. erfüllt, so gilt:*

1. *Ist* $\beta = \int\limits_X^{X+R} b(s)\, a(s)^{-1}\, ds > 0$, *so ist*

$$\lim_{Z\to\infty} G(Z\mu + t\sigma\sqrt{Z}; F, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau,$$

wo μ *und* σ *durch* (8) *und* (9) *bestimmt sind.*

2. *Ist* $\beta = 0$ *und existiert ein solches* $\delta > \frac{1}{2}$, *daß* $\int_0^\infty t^\delta \, dF_0(t) < \infty$ *ist, so gilt*

$$\lim_{Z \to \infty} G(\varepsilon Z^2 t; F, Z) = V(t),$$

wo $V(t)$ *durch* (12) *res.* (13) *und* ε *durch* (7) *gegeben sind.*

3. *Ist* $\beta < 0$ *und* $\int_0^\infty t \, dF_0(t) < \infty$, *so ist*

$$\lim_{Z \to \infty} G(k(Z)^{-1} \Theta^{-Z} t; F, Z) = 1 - e^{-t},$$

wo $k(Z)$ *eine durch* (15) *gegebene periodische Funktion mit der Periode* R *ist.* Θ *ist durch* (16) *bestimmt.*

Bemerkung: Bildet der Punkt A eine natürliche (in der Fellerschen Terminologie) Grenze des Prozesses, so ist die Voraussetzung 2. der Voraussetzung

$$\int_A^X \exp \int_x^X b(s)\, a(s)^{-1} \, ds \, dx = \infty$$

und die Voraussetzung $\int_0^\infty t \, dF_0(t) < \infty$ der Voraussetzung

$$\int_A^X \frac{1}{a(x)} \exp - \int_x^X b(s)\, a(s)^{-1} \, ds \, dx < \infty$$

äquivalent.

Herrn Prof. Kiyosi Ito danke ich für wertvolle Anregungen für die Behandlung meiner Probleme. Er hat vorgeschlagen, die Tatsache zu benutzen, daß die zur Erreichung einer Grenze Z notwendige Zeit, für veränderliches Z, einen Differentialprozeß bildet. Diese Eigenschaft gibt die Möglichkeit der Anwendung der Theorie der Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen.

Literatur

[1] Darling, D. A., and A. J. F. Siegert: The first passage problem for a continuous Markov process. Ann. math. Statistics **24**, 624–639 (1953).

Československá akademie věd
Ústav teorie informace a automatisace
Praha 2, Vyšehradská 49, ČSSR

(Eingegangen am 14. September 1961)