Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CLXXV (1998), pp. 195-209

Proprietà di secondo ordine di un riferimento generalizzato (*).

G. FERRARESE - L. STAZI

Abstract. - *We consider a* relativistic frame of reference, generalized in the polar sense [1]-[2], *and the adapted* non-holonomic techniques; *then,* we extend to non-orthogonal case second order properties *of a standard frame of reference: Riemann tensor decomposition, Lie derivatives of the Ricci rotation coefficients, commutation formulae and spatial Bianchi identity.*

1. - Teorema di Ricci e metrica spaziale.

Riprendiamo, in connessione con [2], le *proprietà generali* dei Riferimenti generalizzati e, in particolare, il *teorema di Ricci* (il quale traduce l'invarianza della metrica rispetto alla derivazione covariante), in vista di *estendere ai tensori* dello Spazio-tempo V_4 la derivazione trasversa $\tilde{\partial}_i$. In termini anolonomi, il teorema di Ricci si scrive: $\tilde{\nabla}_\varrho \tilde{g}_{\alpha\beta} \equiv \tilde{\partial}_\varrho \tilde{g}_{\alpha\beta} - \tilde{\mathcal{R}}_{\varrho\alpha}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\sigma\beta} - \tilde{\mathcal{R}}_{\varrho\beta}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\alpha\sigma} = 0$, e dà luogo, a norma della $(2.8)_{\mathrm{I}}$ (gli indici I e II si riferiscono rispettivamente ai lavori [2] e [8]), alle seguenti condizioni, per indice ϱ *spaziale*:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \tilde{\partial}_j \hat{\gamma}_{ik} - \tilde{\mathcal{R}}_{ji}{}^{l}\, \hat{\gamma}_{lk} - \tilde{\mathcal{R}}_{jk}{}^{l}\, \hat{\gamma}_{il} - \hat{\mathcal{R}}_{ji} \hat{\gamma}_k - \hat{\mathcal{R}}_{jk} \hat{\gamma}_i = 0 \,, \\ \tilde{\partial}_j \hat{\gamma}_i - \tilde{\mathcal{R}}_{ji}{}^{l}\, \hat{\gamma}_l + \hat{\mathcal{R}}_{ji} - \tilde{\mathcal{R}}_{j0}{}^{l}\, \hat{\gamma}_{il} - \tilde{\mathcal{R}}_{j0}{}^{0}\, \hat{\gamma}_i = 0 \,, \\ - \tilde{\mathcal{R}}_{j0}{}^{l}\, \hat{\gamma}_l + \tilde{\mathcal{R}}_{j0}{}^{0} = 0 \,, \end{cases}
$$

e rispettivamente *temporale*:

$$
(2) \qquad \begin{cases} \partial \hat{\gamma}_{ik} - \tilde{\mathcal{R}}_{0i}{}^{l}\, \hat{\gamma}_{lk} - \tilde{\mathcal{R}}_{0i}{}^{0}\, \hat{\gamma}_k - \tilde{\mathcal{R}}_{0k}{}^{l}\, \hat{\gamma}_{il} - \tilde{\mathcal{R}}_{0k}{}^{0}\, \hat{\gamma}_i = 0 \,, \\ \partial \hat{\gamma}_i - \tilde{\mathcal{R}}_{0i}{}^{l}\, \hat{\gamma}_l + \tilde{\mathcal{R}}_{0i}{}^{0} - \tilde{\mathcal{R}}_{00}{}^{l}\, \hat{\gamma}_{il} - \tilde{\mathcal{R}}_{00}{}^{0}\, \hat{\gamma}_i = 0 \,, \\ - \tilde{\mathcal{R}}_{00}{}^{l}\, \hat{\gamma}_l + \tilde{\mathcal{R}}_{00}{}^{0} = 0 \,. \end{cases}
$$

(*) Entrata in redazione il 24 febbraio 1997.

Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza», Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma.

La $(1)_1$ mette in evidenza che *la connessione $\widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\ j}$ non conserva la metrica spaziale $\widehat{\gamma}_{ik}$*:

$$\tilde{\nabla}_j \widehat{\gamma}_{ik} = \widehat{\mathcal{R}}_{ji} \widehat{\gamma}_k + \widehat{\mathcal{R}}_{jk} \widehat{\gamma}_i \neq 0 \; ; \tag{3}$$

le rimanenti $(1)_{2,3}$: $\widehat{\mathcal{R}}_{ji} = H_{ji} - \tilde{\nabla}_j \widehat{\gamma}_i$ e $\widetilde{\mathcal{R}}_{j0}^{\ \ 0} = \widetilde{\mathcal{R}}_{j0}^{\ \ l}\,\widehat{\gamma}_l$, rientrano invece nella $(6.6)_{\mathrm{I}}$. Né aggiungono ulteriori informazioni i legami (2), i quali si riducono alle due sole condizioni:

$$\partial \widehat{\gamma}_{ik} - H_{ik} - H_{ki} - (\widehat{\mathrm{C}}_i \widehat{\gamma}_k + \widehat{\mathrm{C}}_k \widehat{\gamma}_i) = 0 \,, \qquad \widehat{\mathrm{C}}_i + \partial \widehat{\gamma}_i - C_i = 0 \,,$$

comprese nelle $(5.4)_{\mathrm{I}}$ e $(4.14)_{\mathrm{I}}$ rispettivamente.

Visto che *la metrica spaziale $\widehat{\gamma}_{ik} \in \widehat{\Sigma}$ non è invariante rispetto alla derivazione covariante $\tilde{\nabla}_i$*, con un piccolo ritocco dei coefficienti di connessione, è possibile introdurre, sulla piattaforma $\widehat{\Sigma}$, *una derivazione covariante $\widehat{\nabla}_i$ che soddisfi il teorema di Ricci*: $\widehat{\nabla}_j \widehat{\gamma}_{ik} = 0$. Il risultato si consegue direttamente, a partire dalla espressione $(5.10)_{\mathrm{I}}$ dei coefficienti di rotazione spaziali, nel senso che la connessione cercata è la seguente:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ik}^{\ j} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\ j} + \widehat{\mathcal{R}}_{ik} \widehat{\gamma}^j, \tag{4}$$

ovvero esplicitamente:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ik}^{\ j} = \widehat{\Gamma}_{ik}^{\ j} + \widehat{\gamma}^{jh} (\widehat{\Omega}_{hi} \widehat{\gamma}_k + \widehat{\Omega}_{ik} \widehat{\gamma}_h - \widehat{\Omega}_{kh} \widehat{\gamma}_i) \,. \tag{5}$$

Si ha infatti, in conformità della (3): $\widehat{\nabla}_j \widehat{\gamma}_{ik} \equiv \tilde{\nabla}_j \widehat{\gamma}_{ik} - \widehat{\mathcal{R}}_{ji} \widehat{\gamma}^l \widehat{\gamma}_{lk} - \widehat{\mathcal{R}}_{jk} \widehat{\gamma}^l \widehat{\gamma}_{il} = 0$.

Un risultato analogo vale ovviamente anche per la metrica γ_{ik} della piattaforma Σ, la quale proviene, per dualità, dai prodotti $\gamma^{ik} = \tilde{e}^i \cdot \tilde{e}^k$. Si tratta di una semplice proprietà collegata alla forma $(6.3)_{\mathrm{I}}$ della connessione spaziale, come dalla $(2.12)_{\mathrm{II}}$:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\ j} = \Gamma_{ik}^{\ j} - \eta^2 H_{ik} \widehat{\gamma}^j + \gamma^{jh} (H_{[hi]} \widehat{\gamma}_k + H_{[ik]} \widehat{\gamma}_h - H_{[kh]} \widehat{\gamma}_i) \,, \qquad \gamma^{ik}\, \widehat{\gamma}_k = \eta^2 \widehat{\gamma}^i; \tag{6}$$

più precisamente, introdotti i coefficienti

$$\mathcal{R}_{ik}^{\ j} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\ j} + \eta^2 H_{ik} \widehat{\gamma}^j \equiv \Gamma_{ik}^{\ j} + \gamma^{jh} (H_{[hi]} \widehat{\gamma}_k + H_{[ik]} \widehat{\gamma}_h - H_{[kh]} \widehat{\gamma}_i) \,, \tag{7}$$

la derivazione covariante corrispondente ∇_j conserva la metrica γ_{ik}:

$$\nabla_j \gamma_{ik} = 0 \,. \tag{8}$$

Si ha infatti $\nabla_j \gamma_{ik} \equiv \tilde{\partial}_j \gamma_{ik} - \mathcal{R}_{ji}^{\ \ l} \gamma_{lk} - \mathcal{R}_{jk}^{\ \ l} \gamma_{il} = \tilde{\partial}_j \gamma_{ik} - \Gamma_{ji,\,k} - \Gamma_{jk,\,i} = 0$.

Si noti che la connessione (7) è dello stesso tipo della (5), salvo l'intervento della metrica γ_{ik} in luogo di $\widehat{\gamma}_{ik}$, e del tensore $H_{[ik]}$ in luogo del vortice $\widehat{\Omega}_{ik}$; vale inoltre il legame $(5.2)_{\mathrm{I}}$:

$$H_{[ik]} = \widehat{\Omega}_{ik} + \tilde{\partial}_{[i} \widehat{\gamma}_{k]}, \tag{9}$$

e pertanto *i due tensori coincidono solo se $\widehat{\gamma}_k$ è conservativo*: $\tilde{\partial}_{[i} \widehat{\gamma}_{k]} = 0$.

La connessione (5) ha un significato geometrico preciso in $\widehat{\Sigma}$, nel senso che, in conformità della $(5.5)_{\text{I}}$, *i coefficienti* $\widehat{\mathcal{R}}_{ik}{}^{j}$ *coincidono con i prodotti* $\tilde{\partial}_i \hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^j$:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ik}{}^{j} \equiv \tilde{\partial}_i \hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^j; \tag{10}$$

inoltre i coefficienti $\widehat{\mathcal{R}}_{ik}$ di cui alla $(4.10)_{\text{I}}$ assumono, in termini di derivazione $\widehat{\nabla}$, una forma leggermente diversa. Più precisamente si ha, tenuto conto della (4): $\widehat{\mathcal{R}}_{ik} \equiv H_{ik} - \tilde{\partial}_i \hat{\gamma}_k + \widehat{\mathcal{R}}_{ik}{}^{j} \hat{\gamma}_j = H_{ik} - \widehat{\nabla}_i \hat{\gamma}_k - \gamma^2 \widehat{\mathcal{R}}_{ik}$, da cui l'espressione analoga:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ik} = \eta^2 (H_{ik} - \widehat{\nabla}_i \hat{\gamma}_k). \tag{11}$$

2. – Decomposizione del tensore di curvatura.

Nell'ambito di un Riferimento generalizzato, ogni campo tensoriale può essere decomposto nelle sue parti: spaziale, temporale, e mista. Per fissare le idee, consideriamo il caso del *tensore di curvatura* dello Spazio-tempo V_4; alla sua decomposizione sono legate le *proprietà di secondo ordine* di un Riferimento generalizzato. In termini anolonomi, come già per un riferimento ordinario, utilizzeremo la *formula generale* [3]

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\alpha\beta\varrho} = [\tilde{\partial}_\beta, \tilde{\partial}_\alpha] \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \widetilde{A}_{\beta\alpha}{}^{\sigma} \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho, \tag{12}$$

in termini del *commutatore delle derivate seconde* e del *tensore di anolonomia* della distribuzione considerata $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_\alpha\}$; il sistema triplo di vettori $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\alpha\beta\varrho}$ riassume, con le sue componenti, il tensore di curvatura di V_4:

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\alpha\beta\varrho} = \widetilde{R}_{\alpha\beta\varrho}{}^{\sigma} \tilde{\boldsymbol{e}}_\sigma \equiv \widetilde{R}_{\alpha\beta\varrho\sigma} \tilde{\boldsymbol{e}}^\sigma. \tag{13}$$

Alla (12) fa riscontro la *formula di Ricci*, relativa al commutatore delle derivate seconde di un *arbitrario campo vettoriale* (*o tensoriale*): $\boldsymbol{v} = \tilde{v}^\varrho \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho$:

$$[\tilde{\partial}_\beta, \tilde{\partial}_\alpha] \boldsymbol{v} = \widetilde{A}_{\beta\alpha}{}^{\sigma} \tilde{\partial}_\sigma \boldsymbol{v} + \widetilde{\boldsymbol{R}}_{\alpha\beta\varrho} \tilde{v}^\varrho; \tag{14}$$

in ogni caso, sviluppando il 2° membro della (12) a partire dalle derivate prime: $\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho = \widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} \tilde{\boldsymbol{e}}_\sigma$, si ottengono le *componenti anolonome del tensore di curvatura*:

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta\varrho}{}^{\sigma} = \tilde{\partial}_\beta \widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha\varrho}{}^{\sigma} - \tilde{\partial}_\alpha \widetilde{\mathcal{R}}_{\beta\varrho}{}^{\sigma} + \widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha\varrho}{}^{\nu} \widetilde{\mathcal{R}}_{\beta\nu}{}^{\sigma} - \widetilde{\mathcal{R}}_{\beta\varrho}{}^{\nu} \widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha\nu}{}^{\sigma} - \widetilde{A}_{\beta\alpha}{}^{\nu} \widetilde{\mathcal{R}}_{\nu\varrho}{}^{\sigma}. \tag{15}$$

Si tratta di una *espressione tensoriale* che, pur nella maggior generalità, soddisfa (in forma covariante), le *proprietà algebriche* (simmetria, antisimmetria e ciclica) *e differenziali* (identità di Bianchi) del tensore di curvatura.

In ogni modo, per quanto concerne la decomposizione del tensore di Riemann, possiamo seguire due strade: la (12), ovvero la (15), tenendo conto del quadro $(6.6)_{\text{I}}$ dei coefficienti di rotazione $\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}{}^{\varrho}$. Qui seguiremo la prima, considerando innanzitutto i vettori $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{0i0}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{0i0} = [\tilde{\partial}_i, \partial]\, \boldsymbol{\gamma} - \widetilde{A}_{i0}{}^{\sigma} \tilde{\partial}_\sigma \boldsymbol{\gamma} \equiv [\tilde{\partial}_i, \partial]\, \boldsymbol{\gamma} + \widehat{\mathrm{C}}_i \partial \boldsymbol{\gamma}; \tag{16}$$

si ha successivamente, tenuto conto della $(4.15)_{\mathrm{I}}$:

$$[\tilde{\partial}_i, \partial]\, \boldsymbol{\gamma} = (\tilde{\nabla}_i \widehat{C}^k + \gamma_j \widehat{H}_i^k \widehat{C}^j - \partial \widehat{H}_i^k - \widehat{H}_i^j \widehat{H}_j^k - \widehat{\gamma}_j \widehat{H}_i^j \widehat{C}^k)\, \widehat{\boldsymbol{e}}_k +$$
$$+ [\tilde{\partial}_i(\widehat{C}^k \widehat{\gamma}_k) + \widehat{C}^k \mathcal{R}_{ik} - \widehat{\gamma}_j \partial \widehat{H}_i^j - \widehat{H}_i^j (\widehat{H}_j^k \widehat{\gamma}_k + C_j)]\, \boldsymbol{\gamma}.$$

A sua volta, in virtù della $(4.10)_{\mathrm{I}}$, la parte temporale assume la forma seguente: $\widehat{\gamma}_k(\tilde{\nabla}_i \widehat{C}^k - \partial \widehat{H}_i^k - \widehat{H}_i^j \widehat{H}_j^k)\, \boldsymbol{\gamma}$, e la (16) dà luogo ai due gruppi di componenti:

$$\tilde{R}_{0i0}{}^k = C_i^k, \qquad \tilde{R}_{0i0}{}^0 = C_i^k \widehat{\gamma}_k, \tag{17}$$

ove si è posto

$$C_i^k \overset{\text{def}}{=} (\tilde{\nabla}_i + \widehat{\mathsf{C}}_i)\, \widehat{C}^k - \partial \widehat{H}_i^k - \widehat{H}_i^j \widehat{H}_j^k + 2\, \widehat{\gamma}_j \widehat{H}_i^{[k} \widehat{C}^{j]}. \tag{18}$$

Si noti che, conformemente alla (17), *le componenti* $\tilde{R}_{0i0}{}^\alpha$ *non sono indipendenti*, a causa della condizione $\tilde{R}_{0i00} \equiv \tilde{g}_{0\alpha} \tilde{R}_{0i0}{}^\alpha = 0$.

Consideriamo ora il sistema $\tilde{\boldsymbol{R}}_{ijk}$: $\tilde{\boldsymbol{R}}_{ijk} = [\tilde{\partial}_j, \tilde{\partial}_i]\, \widehat{\boldsymbol{e}}_k - 2\, \widehat{\Omega}_{ji} \partial \widehat{\boldsymbol{e}}_k$; si ha direttamente, data la simmetria dei coefficienti di rotazione $\mathcal{R}_{ik}{}^l$:

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_{ijk} = (\widehat{P}_{ijk}{}^l + \mathcal{R}_{ik} \widehat{H}_j^l - \mathcal{R}_{jk} \widehat{H}_i^l - 2\, \widehat{\Omega}_{ji} \widehat{H}_k^l)\, \widehat{\boldsymbol{e}}_l +$$
$$+ [\tilde{\nabla}_j \mathcal{R}_{ik} - \tilde{\nabla}_i \mathcal{R}_{jk} - 2\, \widehat{\Omega}_{ji}(\widehat{\mathsf{C}}_k + \widehat{H}_k^l \widehat{\gamma}_l) + \widehat{\gamma}_l(\mathcal{R}_{ik} \widehat{H}_j^l - \mathcal{R}_{jk} \widehat{H}_i^l)]\, \boldsymbol{\gamma},$$

ove si è posto

$$\widehat{P}_{ijk}{}^l \overset{\text{def}}{=} \tilde{\partial}_j \mathcal{R}_{ik}{}^l - \tilde{\partial}_i \mathcal{R}_{jk}{}^l + \mathcal{R}_{ik}{}^h \mathcal{R}_{jh}{}^l - \mathcal{R}_{jk}{}^h \mathcal{R}_{ih}{}^l. \tag{19}$$

Si ottengono così le seguenti *componenti anolonome*:

$$\begin{cases} \tilde{R}_{ijk}{}^l = \widehat{P}_{ijk}{}^l + \mathcal{R}_{ik} \widehat{H}_j^l - \mathcal{R}_{jk} \widehat{H}_i^l - 2\, \widehat{\Omega}_{ji} \widehat{H}_k^l, \\ \tilde{R}_{ijk}{}^0 = \tilde{\nabla}_j \mathcal{R}_{ik} - \tilde{\nabla}_i \mathcal{R}_{jk} - 2\, \widehat{\Omega}_{ji}(\widehat{\mathsf{C}}_k + \widehat{H}_k^l \widehat{\gamma}_l) + \widehat{\gamma}_l(\mathcal{R}_{ik} \widehat{H}_j^l - \mathcal{R}_{jk} \widehat{H}_i^l), \end{cases} \tag{20}$$

fermi restando i legami di cui alla $(4.10)_{\mathrm{I}}$:

$$\widehat{\mathsf{C}}_i = C_i - \partial \widehat{\gamma}_i, \qquad \mathcal{R}_{ik} = H_{ik} - \tilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k; \tag{21}$$

legami che danno luogo, per le componenti indipendenti del tensore di curvatura, ad espressioni simili a quelle ordinarie ([4] e [5], 130). Più precisamente, tenuto conto che si ha identicamente, avuto riguardo alle $(3.3)_{\mathrm{I}}$ e (19):

$$[\tilde{\nabla}_j, \tilde{\nabla}_i]\, \widehat{\gamma}_k = 2\, \widehat{\Omega}_{ji} \partial \widehat{\gamma}_k + \widehat{P}_{jik}{}^l \widehat{\gamma}_l, \tag{22}$$

le componenti dette si riassumono nel quadro seguente:

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = \widehat{P}_{ijk}{}^l + Q_{ijk}{}^l, \quad \tilde{R}_{ijk}{}^0 = B_{ijk} + \tilde{R}_{ijk}{}^l \widehat{\gamma}_l, \quad \tilde{R}_{0i0}{}^k = C_i^k, \quad \tilde{R}_{0i0}{}^0 = C_i^k \widehat{\gamma}_k, \tag{23}$$

ove si è posto, unitamente alla (18):

$$\text{(24)}\qquad \begin{cases} Q_{ijk}{}^{l} \stackrel{\text{def}}{=} H_{ik}\widehat{H}_j^{\,l} - H_{jk}\widehat{H}_i^{\,l} - 2\,\widehat{\Omega}_{ji}\widehat{H}_k^{\,l} - 2\,\widehat{H}_{[j}{}^{l}\,\widetilde{\nabla}_{i]}\widehat{\gamma}_k, \\ B_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\nabla}_j H_{ik} - \widetilde{\nabla}_i H_{jk} + 2\,\widehat{\Omega}_{ij} C_k. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la *forma covariante*, valgono le *espressioni generali*:

$$\text{(25)}\qquad \widetilde{R}_{ijkh} = \gamma_{hl}\widetilde{R}_{ijk}{}^{l} + \widehat{\gamma}_h B_{ijk}, \qquad \widetilde{R}_{ijk0} = B_{jik}, \qquad \widetilde{R}_{0i0k} = C_{ik},$$

essendo $C_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} C_i^{\,j}\gamma_{kj}$, ovvero esplicitamente:

$$\text{(26)}\qquad C_{ik} = \widetilde{\nabla}_i\widehat{C}^j\gamma_{kj} + \widehat{\mathrm{C}}_i C_k - \partial H_{ik} + \widehat{H}_i^{\,j}(\partial\gamma_{jk} - H_{jk}) + \widehat{\gamma}_j(H_{ik}\widehat{C}^j - \widehat{H}_i^{\,j} C_k).$$

Le (23) e (25) mettono bene in evidenza che, nell'ambito di un Riferimento generalizzato (ove sono noti il *divario* $\widehat{\gamma}_i$ e i *tensori caratteristici* $\widehat{\mathrm{C}}_i$ e H_{ik}), le componenti del tensore di curvatura sono riconducibili, come nel caso ordinario, ai tensori spaziali C_{ik}, B_{ikj} e $\widehat{P}_{ikj}{}^{l}$. Il tensore $\widehat{P}_{ikj}{}^{l}$, a sua volta, è connesso, come vedremo, alla *formula di commutazione delle derivate covarianti* $\widetilde{\nabla}_j$, e pertanto verrà detto *tensore di curvatura spaziale*; ciò è peraltro giustificato dalla sua espressione (19). Si tratta ora di vedere come si riflettono, sui tre tensori di decomposizione: C_{ik}, B_{ikj} e $\widehat{P}_{ikj}{}^{l}$, le proprietà algebriche e differenziali del tensore di curvatura.

3. – Proprietà algebriche dei tensori di decomposizione.

Anche in forma anolonoma, il tensore $\widetilde{R}_{\alpha\beta\varrho\sigma}$ soddisfa tutte le proprietà algebriche di un tensore di curvatura, nonché l'identità di Bianchi; ciò vale anche per la sua parte spaziale $\widetilde{R}_{ijkh}$, data dalla $(2.14)_1$, e per i tensori $(25)_{2,3}$, i quali soddisfano necessariamente le condizioni:

$$\text{(27)}\qquad C_{[ik]} = 0\,, \qquad B_{(ij)k} = 0\,, \qquad B_{[ijk]} = 0\,.$$

A parte la $(27)_2$ che è immediata, le altre possono essere confermate, utilizzando le *identità di Jacobi* $(3.8)_{\mathrm{I}}$, le quali equivalgono ai legami differenziali:

$$\text{(28)}\qquad \partial\widehat{\Omega}_{ik} = \widetilde{\nabla}_{[i}\widehat{\mathrm{C}}_{k]}, \qquad \widetilde{\nabla}_{[i}\widehat{\Omega}_{kh]} = \widehat{\mathrm{C}}_{[i}\widehat{\Omega}_{kh]}.$$

Cominciamo dalla $(27)_1$, trasformando nell'espressione (26) il primo e quarto termine. Si tratta di tener conto che: *a*) in virtú della (8), vale la relazione analoga alla (3):

$$\text{(29)}\qquad \widetilde{\nabla}_i\gamma_{kj} = H_{ik}\widehat{\gamma}_j + H_{ij}\widehat{\gamma}_k;$$

b) a norma della $(5.1)_{\mathrm{I}}$, si deve intendere $\partial\gamma_{jk} - H_{jk} = H_{kj} + C_k\widehat{\gamma}_j + C_j\widehat{\gamma}_k$. Pertanto, la (26) non differisce da

$$\text{(30)}\qquad C_{ik} = (\widetilde{\nabla}_i + \widehat{\mathrm{C}}_i)\,C_k - \partial H_{ik} + \widehat{H}_i^{\,j} H_{kj},$$

ove il divario $\widehat{\gamma}_i$ interviene sia nel vettore $\widehat{\mathrm{C}}_i = C_i - \partial\widehat{\gamma}_i$, sia nel tensore H_{ik}:

$$(31)\qquad H_{ik} = K_{ik} - C_{(i}\widehat{\gamma}_{k)} + \widehat{\Omega}_{ik} + \tilde{\partial}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]}, \qquad K_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\partial\gamma_{ik}.$$

Ciò premesso, tenuto conto delle formule di commutazione $(3.3)_{\mathrm{I}}$, si ha:

$$(32)\qquad \partial\tilde{\partial}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]} = (\tilde{\nabla}_{[i} + \widehat{\mathrm{C}}_{[i})\,\partial\widehat{\gamma}_{k]}\,,$$

e pertanto vale l'identità

$$(33)\qquad C_{[ik]} \equiv \tilde{\nabla}_{[i}\widehat{\mathrm{C}}_{k]} - \partial\widehat{\Omega}_{ik} = 0\,;$$

essa, oltre a fissare il *significato geometrico della identità di Jacobi* $(3.2)_1$ *in relazione al tensore di curvatura* ([7], 213), *conferma la simmetria del tensore* C_{ik}. Pertanto, la (30) si può scrivere nella forma:

$$(30')\qquad C_{ik} = (\tilde{\nabla}_{(i} + \widehat{\mathrm{C}}_{(i})\,C_{k)} - \partial H_{(ik)} + \widehat{H}_i^{\,j} H_{kj}.$$

Per quanto riguarda la $(27)_3$, riprendiamo il tensore $\omega_{ik} = \widehat{\Omega}_{ik} + \tilde{\nabla}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]}$: *parte antisimmetrica di* H_{ik}; si ha innanzitutto l'identità

$$-\frac{1}{2}B_{[ijk]} \equiv \tilde{\nabla}_{[i}\,\omega_{jk]} - \widehat{\Omega}_{[ij}C_{k]} = \tilde{\nabla}_{[i}\widehat{\Omega}_{jk]} + \tilde{\nabla}_{[i}\tilde{\nabla}_{[j}\,\widehat{\gamma}_{k]]} - \widehat{\Omega}_{[ij}C_{k]}.$$

D'altra parte, a norma della (22), essendo $\widehat{P}_{[ijk]}{}^l = 0$, si deve intendere:

$$(34)\qquad \tilde{\nabla}_{[i}\tilde{\nabla}_{[j}\widehat{\gamma}_{k]]} = \widehat{\Omega}_{[ij}\,\partial\widehat{\gamma}_{k]};$$

pertanto, analogamente alla (33), vale l'identità:

$$(35)\qquad -\frac{1}{2}B_{[ijk]} \equiv \tilde{\nabla}_{[i}\widehat{\Omega}_{jk]} - \widehat{\Omega}_{[ij}\widehat{\mathrm{C}}_{k]} = 0\,,$$

la quale, oltre a provare l'asserto, fissa il *legame tra il tensore di curvatura e l'identità di Jacobi* $(28)_2$.

Consideriamo ora le *proprietà algebriche del tensore di curvatura spaziale* (19), esaminando la sua forma covariante:

$$(36)\qquad P_{ijkh} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{P}_{ijk}{}^l\,\gamma_{lh};$$

in termini espliciti, tenuto conto della $(6.2)_{\mathrm{I}}$, si ha direttamente:

$$(37)\qquad P_{ijkh} = \tilde{\partial}_j\,\mathfrak{R}_{ik,\,h} - \tilde{\partial}_i\,\mathfrak{R}_{jk,\,h} - \tilde{\mathfrak{R}}_{ik}{}^l\,\mathfrak{R}_{jh,\,l} + \tilde{\mathfrak{R}}_{jk}{}^l\,\mathfrak{R}_{ih,\,l} + \Delta_{ijkh},$$

avendo posto

$$(38)\qquad \Delta_{ijkh} \stackrel{\text{def}}{=} -4\,\tilde{\mathfrak{R}}_{k[i}{}^l H_{j](l}\widehat{\gamma}_{h)}.$$

Sulla base dell'espressione (37), *semiclassica* per la presenza dei termini di deviazione

Δ_{ijkh}, si possono esaminare le proprietà algebriche del tensore (36); tuttavia è preferibile passare attraverso il legame $(25)_1$, dato che $\widetilde{R}_{ijkh}$ *soddisfa tutte le proprietà algebriche di un tensore di curvatura.* Da questo punto di vista, tenuto conto della $(23)_1$, si ha innanzitutto

$$\widetilde{R}_{ijkh} = P_{ijkh} + \widehat{\mathcal{R}}_{ik} H_{jh} - \widehat{\mathcal{R}}_{jk} H_{ih} - 2\,\widehat{\Omega}_{ji} H_{kh} + B_{ijk}\widehat{\gamma}_h, \tag{39}$$

e di qui seguono direttamente le proprietà cercate. Per quanto riguarda l'*antisimmetria*, la seconda coppia si comporta diversamente dalla prima:

$$P_{(ij)kh} = 0\,, \qquad P_{ij(kh)} = 2\,\widehat{\Omega}_{ji} K_{kh} + 2\,\widetilde{\nabla}_{[i}(H_{j](k}\widehat{\gamma}_{h)})\,. \tag{40}$$

L'antisimmetria rispetto alla seconda coppia di indici non sussiste neppure nel caso di un *Riferimento ordinario*: $\widehat{\gamma}_i = 0$, in cui si ha ([4] e [5], 133): $P_{ij(kh)} = 2\,\widehat{\Omega}_{ji}\widehat{K}_{kh}$; né sussiste, come già nel caso ordinario, la proprietà di *simmetria in blocco*. Più precisamente, dalla (39) si ricava la condizione

$$\begin{aligned} P_{khij} - P_{ijkh} = {} & 2(H_{(ik)} - \widetilde{\nabla}_{(i}\widehat{\gamma}_{k)})\, H_{[jh]} + 2(H_{[ik]} - \widetilde{\nabla}_{[i}\widehat{\gamma}_{k]}) H_{(jh)} + \\ & -2(H_{(jk)} H_{[ih]} + H_{[jk]} H_{(ih)}) + H_{ih}\widetilde{\nabla}_j\widehat{\gamma}_k - H_{kj}\widetilde{\nabla}_h\widehat{\gamma}_i + \\ & -2(\widehat{\Omega}_{ji} H_{kh} - \widehat{\Omega}_{hk} H_{ij}) + B_{ijk}\widehat{\gamma}_h - B_{khi}\widehat{\gamma}_j \neq 0\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Per quanto infine riguarda la *proprietà ciclica, essa vale solo nella forma ridotta:*

$$P_{[ijk]h} = 0\,, \tag{42}$$

peraltro già utilizzata; essa segue dalla (37), tenuto conto della (38).

4. – Derivata di Lie dei coefficienti di rotazione spaziali.

Consideriamo ora la derivata di Lie dei coefficienti di rotazione spaziali; è conveniente passare attraverso le componenti del vettore $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{0jk} = [\widetilde{\partial}_j, \partial]\,\widehat{\boldsymbol{e}}_k + \widehat{\mathsf{C}}_j\,\partial\widehat{\boldsymbol{e}}_k$; si ha, sviluppando le derivate:

$$\left\{ \begin{aligned} & -\widetilde{R}_{0jk}{}^{i} = \partial\widehat{\mathcal{R}}_{jk}{}^{i} - (\widetilde{\nabla}_j + \widehat{\mathsf{C}}_j)\,\widehat{H}_k{}^{i} + \widehat{\mathcal{R}}_{jk}\widehat{C}^{i} - \widehat{K}_k\widehat{H}_j{}^{i}, \\ & -\widetilde{R}_{0jk}{}^{0} = \partial\widehat{\mathcal{R}}_{jk} - (\widetilde{\nabla}_j + \widehat{K}_j)\,\widehat{K}_k + \widehat{\mathcal{R}}_{jk}\widehat{C}^{i}\widehat{\gamma}_i - \widehat{\mathcal{R}}_{ji}\widehat{H}_k{}^{i}, \end{aligned} \right. \tag{43}$$

fermo restando il significato dei coefficienti $\widehat{\mathsf{C}}_j$, $\widehat{\mathcal{R}}_{ik}$ e $\widehat{K}_i$:

$$\widehat{\mathsf{C}}_i = C_i - \partial\widehat{\gamma}_i\,, \qquad \widehat{\mathcal{R}}_{ik} = H_{ik} - \widetilde{\nabla}_i\widehat{\gamma}_k\,, \qquad \widehat{K}_i = \widehat{\mathsf{C}}_i + \widehat{H}_i{}^{l}\widehat{\gamma}_l\,. \tag{44}$$

La $(43)_1$ consente di calcolare la *derivata di Lie* dei coefficienti di rotazione spaziali, mediante le componenti del tensore di curvatura già determinate. Più precisamente, tenuto conto dell'identità $\widetilde{R}_{0jkl} = \widehat{\gamma}_l\widetilde{R}_{0jk}{}^{0} + \widehat{\gamma}_{il}\widetilde{R}_{0jk}{}^{i}$, vale innanzitutto il legame $\widetilde{R}_{0jk}{}^{i} =$

$= \widehat{\gamma}^{il}(\widetilde{R}_{0jkl} - \widehat{\gamma}_l \widetilde{R}_{0jk}{}^0)$; d'altra parte si deve intendere, a norma delle $(25)_{2,3}$ e $(20)_1$:

$$\widetilde{R}_{0jk}{}^0 \equiv \tilde{g}^{0\alpha}\widetilde{R}_{0jk\alpha} = \eta^2(C_{jk} + \widehat{\gamma}^i B_{kij})\,. \tag{45}$$

Pertanto, in virtù della $(2.10)_{\mathrm{I},3}$, la precedente diviene

$$\widetilde{R}_{0jk}{}^i = \gamma^{il} B_{klj} - \eta^2 \widehat{\gamma}^i C_{jk}$$

e, dal confronto con la $(43)_1$, si ha direttamente:

$$\partial \widetilde{\mathcal{R}}_{jk}{}^i = C_{jk}{}^i - \widehat{\mathcal{R}}_{jk}\widehat{C}^i + \widehat{H}_j{}^i \widehat{\mathrm{C}}_k + \eta^2 \widehat{\gamma}^i C_{jk},$$

ove si è posto per brevità:

$$C_{jk}{}^i \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_j + \widehat{\mathrm{C}}_j)\, \widehat{H}_k{}^i - \gamma^{il} B_{klj} + \widehat{H}_j{}^i\, \widehat{H}_k{}^h \widehat{\gamma}_h . \tag{46}$$

Si tratta di una prima espressione della derivata di Lie, la quale può essere trasformata, modificando innanzitutto il primo termine; da $\widehat{H}_k{}^i = \gamma^{il} H_{kl}$ segue, per derivazione, $\widetilde{\nabla}_j \widehat{H}_k{}^i = \gamma^{il} \widetilde{\nabla}_j H_{kl} + H_{kl} \widetilde{\nabla}_j \gamma^{il}$, ove si deve intendere, in conformità delle (8) e (7):

$$\widetilde{\nabla}_j \gamma^{il} = -\eta^2(\widehat{H}_j{}^l\, \widehat{\gamma}^i + \widehat{H}_j{}^i\, \widehat{\gamma}^l)\,. \tag{47}$$

Pertanto, tenuto conto della $(6)_2$, la (46) si scrive:

$$C_{jk}{}^i = \gamma^{il}(\mathcal{C}_{jkl} - \widehat{\gamma}_l H_{kh} \widehat{H}_j{}^h)\,, \qquad \mathcal{C}_{jkl} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_j + \widehat{\mathrm{C}}_j)\, H_{kl} - B_{klj}, \tag{48}$$

e la derivata di Lie cercata è del tipo:

$$\partial \widetilde{\mathcal{R}}_{jk}{}^i = \gamma^{il}[\mathcal{C}_{jkl} - \widehat{\mathcal{R}}_{jk} C_l + H_{jl} \widehat{\mathrm{C}}_k + \widehat{\gamma}_l (C_{jk} - \widehat{H}_j{}^h H_{kh})]\,. \tag{49}$$

Di qui, spezzando H_{ik} nelle *sue due parti: simmetrica* k_{ik} *e antisimmetrica* ω_{ik}, e introducendo, in analogia con il caso ordinario, il tensore:

$$H_{jk,\,l} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_j + \widehat{\mathrm{C}}_j)\, k_{kl} + (\widetilde{\nabla}_k + \widehat{\mathrm{C}}_k)\, k_{lj} - (\widetilde{\nabla}_l + \widehat{\mathrm{C}}_l)\, k_{jk}, \tag{50}$$

in virtù della relazione di cui alle $(28)_2$ e (34):

$$\widetilde{\nabla}_{[j}\, \omega_{kl]} = C_{[j} \widehat{\Omega}_{kl]}, \tag{51}$$

il tensore $\mathcal{C}_{jkl}$ assume la forma seguente:

$$\mathcal{C}_{jkl} = H_{jk,\,l} + \widehat{\mathrm{C}}_j\, \omega_{kl} + 2C_{[k} \widehat{\Omega}_{l]j} + 2k_{j[k} \widehat{\mathrm{C}}_{l]} - C_j \widehat{\Omega}_{kl}; \tag{52}$$

pertanto, tenuto anche conto della (9), la (49) assume la forma definitiva:

$$\partial \widetilde{\mathcal{R}}_{jk}{}^i = \widehat{H}_{jk}{}^i, \tag{53}$$

avendo posto

$$\widehat{H}_{jk}{}^{i} = H_{jk}{}^{i} + 2\,\widehat{\mathrm{C}}_{(j}\,\omega_{k)}{}^{i} - 2C_{(j}\,\widehat{\Omega}_{k)}{}^{i} + \widehat{C}^{i}\tilde{\nabla}_{(j}\,\widehat{\gamma}_{k)} - k_{jk}\gamma^{il}\,\partial\widehat{\gamma}_{l} + \tag{54}$$

$$+\gamma^{il}(C_{jk} - \widehat{H}_{j}{}^{h}H_{kh})\,\widehat{\gamma}_{l}; \qquad \widehat{\Omega}_{k}{}^{i} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{ij}\widehat{\Omega}_{kj}.$$

Si vede bene di qui che, a parte *la simmetria rispetto agli indici* j e k, dato che $C_{[jk]} = 0$, *la derivata di Lie dipende dal divario* $\widehat{\gamma}_i$ *e dalle sue derivate prime, oltre che dalle caratteristiche* C_i, ω_{ik} e k_{ik} *del Riferimento.*

Nel caso ordinario: $\widehat{\gamma}_i = 0$, si ritrova naturalmente *l'espressione usuale* ([4] e [5], 139), *indipendente dal vortice* $\widehat{\Omega}_{ik}$ della congruenza Γ.

In modo analogo, si può ricavare l'espressione della derivata di Lie dei coefficienti $\widehat{\mathcal{R}}_{ik}$; il risultato si consegue facilmente, procedendo in modo diretto, tenuto conto del legame $\partial\widehat{\mathcal{R}}_{jk} = \partial H_{jk} - \partial\tilde{\nabla}_j\widehat{\gamma}_k$, e della formula di commutazione $(3.3)_{\mathrm{I}}$, nonché della (53). Si ha cosí la *formula generale*:

$$\partial\widehat{\mathcal{R}}_{jk} = \partial H_{jk} - (\tilde{\nabla}_j + \widehat{\mathrm{C}}_j)\,\partial\widehat{\gamma}_k + \widehat{H}_{jk}{}^{i}\widehat{\gamma}_i. \tag{55}$$

5. - Decomposizione del tensore gravitazionale.

A partire dal tensore di curvatura, possiamo ovviamente calcolare le *componenti anolonome del tensore di Ricci*: $\widetilde{R}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{R}_{\varrho\alpha\beta}{}^{\varrho}$, le quali fanno capo direttamente al quadro (23). Si ha innanzitutto: $\widetilde{R}_{jk} = \widetilde{R}_{ijk}{}^{i} + \widetilde{R}_{0jk}{}^{0}$, ove l'ultimo termine è fornito dalla (45); pertanto, le componenti del tensore di Ricci sono del tipo:

$$\widetilde{R}_{jk} = P_{jk} + Q_{jk} + \eta^2(C_{jk} + \widehat{\gamma}^{i}B_{kij}); \qquad P_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{P}_{ijk}{}^{i}, \qquad Q_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{ijk}{}^{i}, \tag{56}$$

ove si deve intendere, in conformità delle notazioni precedenti:

$$Q_{jk} \equiv \widehat{H}_{j}{}^{i}(H_{ik} - \tilde{\nabla}_i\widehat{\gamma}_k) - H\widehat{\mathcal{R}}_{jk} - 2\,\widehat{\Omega}_{j}{}^{i}H_{ki}; \qquad H \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{H}_{i}{}^{i} \equiv \gamma^{ik}K_{ik} - \widehat{\gamma}_i\widehat{C}^{i}. \tag{57}$$

A differenza di P_{jk}, *il tensore spaziale* $\widetilde{R}_{jk}$ è *simmetrico* (come $\widetilde{R}_{\alpha\beta}$), e tale proprietà trova riscontro ovviamente anche nella espressione (56). Per provare l'asserto, consideriamo innanzitutto Q_{jk}; tenuto conto del legame $H_{ik} = H_{ki} + 2\omega_{ik}$, nonché della $(5.4)_{\mathrm{I},3}$, si ha la seguente espressione:

$$Q_{jk} = \widehat{H}_{j}{}^{i}H_{ki} + 4\,\widehat{\Omega}_{i(j}\widehat{H}_{k)}{}^{i} - \widehat{H}_{j}{}^{i}\tilde{\nabla}_k\widehat{\gamma}_i - H\widehat{\mathcal{R}}_{jk}, \tag{58}$$

parzialmente simmetrica. Analogamente, per quanto riguarda l'ultimo termine della (56): $\eta^2\widehat{\gamma}^{i}B_{kij} \equiv \widehat{\gamma}_i\gamma^{il}B_{klj}$, aggiungendo e togliendo $\tilde{\nabla}_j H_{kl}$ in B, risulta, tenuto conto dell'identità di Jacobi (51) e della (50):

$$\eta^2\widehat{\gamma}^{i}B_{kij} = \widehat{\gamma}_i(\gamma^{il}\tilde{\nabla}_j H_{kl} - H_{jk}{}^{i} - \widehat{C}^{i}\widehat{\Omega}_{jk} - \widehat{\mathrm{C}}^{i}k_{jk} + 2\,\widehat{\mathrm{C}}_{(j}k_{k)}{}^{i} + 2C_{(j}\widehat{\Omega}_{k)}{}^{i}).$$

Di qui, trasformando il primo termine mediante la (47), si ha:

$$
\eta^2 \widehat{\gamma}^i B_{kij} = (1-\eta^2) H_{ki} \widehat{H}_j{}^i + \widehat{\gamma}_i (\widetilde{\nabla}_j \widehat{H}_k{}^i - H_{jk}{}^i + \widehat{\gamma}_l \widehat{H}_j{}^i \widehat{H}_k{}^l + \\ - \widehat{C}^i \widehat{\Omega}_{jk} - \widehat{\mathsf{C}}^i k_{jk} + 2\, \widehat{\mathsf{C}}_{(j} k_{k)}{}^i + 2 C_{(j} \widehat{\Omega}_{k)}{}^i). \tag{59}
$$

In definitiva, tenuto anche conto delle (58) e (59), la (56) dà luogo alla seguente *espressione generale del tensore di Ricci spaziale*:

$$
\widetilde{R}_{jk} = P_{jk} + (2-\eta^2) \widehat{H}_j{}^i H_{ki} + 4\, \widehat{\Omega}_{i(j} \widehat{H}_{k)}{}^i - H(H_{jk} - \widetilde{\nabla}_j \widehat{\gamma}_k) + \\ + \eta^2 C_{jk} - \widetilde{\nabla}_k (\widehat{H}_j{}^i \widehat{\gamma}_i) + \widehat{\gamma}_i (2\, \widetilde{\nabla}_{(j} \widehat{H}_{k)}{}^i - H_{jk}{}^i + \widehat{\gamma}_l \widehat{H}_j{}^i \widehat{H}_k{}^l + \\ - \widehat{C}^i \widehat{\Omega}_{jk} - \widehat{\mathsf{C}}^i k_{jk} + 2\, \widehat{\mathsf{C}}_{(j} k_{k)}{}^i + 2 C_{(j} \widehat{\Omega}_{k)}{}^i); \tag{60}
$$

naturalmente P_{jk} *non* è *simmetrico*, e più precisamente risulta:

$$
P_{[jk]} = K \widehat{\Omega}_{jk} + \widetilde{\nabla}_{[k} (\widehat{H}_{j]}{}^i \widehat{\gamma}_i), \qquad K \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{ik} K_{ik}, \tag{61}
$$

in perfetto accordo con quanto si ha nel caso ordinario: $\widehat{\gamma}_i = 0$. Si tratta di una funzione ben determinata, oltre che di $\widehat{\gamma}_i$ e P_{ik}, delle caratteristiche C_i e H_{ik}, le quali intervengono sia esplicitamente che implicitamente, attraverso i tensori C_{jk} e $H_{jk}{}^i$; naturalmente, per $\widehat{\gamma}_i = 0$, si ritrova l'espressione ordinaria ([4] e [5], 131):

$$
\widetilde{R}_{jk} = P_{(jk)} + 2\, \widehat{H}_j{}^i H_{ki} + 4\, \widehat{\Omega}_{i(j} H_{k)}{}^i - K k_{jk} + (\widetilde{\nabla}_{(j} + C_{(j}) C_{k)} - \partial k_{jk}.
$$

Per quanto riguarda le *componenti miste*: $\widetilde{R}_{j0} = \widetilde{R}_{ij0}{}^i + \widetilde{R}_{0J0}{}^0$, essendo $\widetilde{R}_{0j0}{}^0 = \widetilde{g}^{0i} \widetilde{R}_{0j0i}$, si deve intendere innanzitutto:

$$
\widetilde{R}_{j0} = \widetilde{R}_{ij0}{}^i + \eta^2 \widehat{\gamma}^i C_{ji}; \tag{62}
$$

d'altra parte, vale la proprietà ciclica: $\widetilde{R}_{0jk}{}^i + \widetilde{R}_{jk0}{}^i + \widetilde{R}_{k0j}{}^i = 0$, da cui l'uguaglianza $\widetilde{R}_{jk0}{}^i = 2\, \widetilde{R}_{0[kj]}{}^i$. Al tempo stesso risulta $\widetilde{R}_{0kj}{}^i = -\gamma^{il} B_{ljk} - \eta^2 \widehat{\gamma}^i C_{kj}$, e pertanto, vista la $(27)_3$ e la simmetria del tensore C_{kj}, la precedente diviene:

$$
\widetilde{R}_{jk0}{}^i = -2 \gamma^{il} B_{l[jk]} \equiv \gamma^{il} B_{jkl}; \tag{63}
$$

la (62) dà cosí luogo alla seguente espressione delle componenti $\widetilde{R}_{j0}$:

$$
\widetilde{R}_{j0} = \gamma^{il} (B_{ijl} + \widehat{\gamma}_l C_{ji}). \tag{64}
$$

Per completare la decomposizione del tensore di Ricci, non resta che calcolare la componente $\widetilde{R}_{00} = \widetilde{R}_{i00}{}^i \equiv \widetilde{g}^{ik} \widetilde{R}_{i00k}$, la quale è necessariamente del tipo:

$$
\widetilde{R}_{00} = -\gamma^{ik} C_{ik}. \tag{65}
$$

Infine, lo *scalare di curvatura*: $R \overset{\text{def}}{=} \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} \equiv \tilde{g}^{jk}\tilde{R}_{jk} + 2\,\tilde{g}^{j0}\tilde{R}_{j0} + \tilde{g}^{00}\tilde{R}_{00}$, è della forma: $R = \gamma^{jk}\tilde{R}_{jk} + 2\eta^2\hat{\gamma}^j\gamma^{il}(B_{ijl} + \hat{\gamma}_l C_{ji}) + \eta^2\gamma^{ik}C_{ik}$, ove $\tilde{R}_{jk}$ è fornito dalla (60); pertanto vale l'espressione:

$$
\begin{aligned}
(66)\qquad R = P + (2-\eta^2)\,H^{ki}H_{ki} - 4\,\hat{\Omega}_{ji}H^{ji} - H(H - \tilde{\nabla}^j\hat{\gamma}_j) + 2\eta^2\gamma^{ik}C_{ik} + \\
- H^{ji}\tilde{\nabla}_j\hat{\gamma}_i + \hat{\gamma}_i[\tilde{\nabla}^j\hat{H}_j^{\ i} - \gamma^{jk}H_{jk}^{\ \ i} + 2\,\hat{C}^j\hat{\Omega}_j^{\ i} + 2\,\hat{C}^j k_j^{\ i} - \\
- H\hat{C}^i + \hat{\gamma}_l H^{jl}\hat{H}_j^{\ i} + 2\gamma^{ij}(B_{lj}^{\ \ l} + \hat{\gamma}_l C_j^{\ l})]\,,
\end{aligned}
$$

ove si intende

$$
(67)\qquad P \overset{\text{def}}{=} \gamma^{jk}P_{jk}, \qquad H^{ik} \overset{\text{def}}{=} \gamma^{ij}\hat{H}_j^{\ k}, \qquad \tilde{\nabla}^j \overset{\text{def}}{=} \gamma^{jk}\tilde{\nabla}_k.
$$

Nel caso di un Riferimento ordinario si ha, più semplicemente ([4] e [5], 132): $R = P - H^{ji}H_{ji} - K^2 + 2(\tilde{\nabla}_i + C_i)\,C^i - 2\partial K$.

Per quanto infine riguarda il *tensore gravitazionale*: $G_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta} - (1/2)\,Rg_{\alpha\beta}$, la decomposizione è la seguente:

$$
(68)\qquad \tilde{G}_{jk} = \tilde{R}_{jk} - \frac{1}{2}R\hat{\gamma}_{jk}, \qquad \tilde{G}_{j0} = \gamma^{il}(B_{ijl} + \hat{\gamma}_l C_{ji}) - \frac{1}{2}R\hat{\gamma}_j, \qquad \tilde{G}_{00} = -\,\gamma^{ik}C_{ik} + \frac{1}{2}R\,.
$$

6. – Commutatori delle derivate ∂ e $\tilde{\nabla}_i$.

La derivazione covariante spaziale $\tilde{\nabla}_i$ si può ovviamente iterare e, in particolare, hanno senso le derivate covarianti seconde $\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_k$; tuttavia, tali derivate generalmente non commutano: $[\tilde{\nabla}_i, \tilde{\nabla}_k] \neq 0$, cosí come accade per le derivate trasverse ordinarie. In ogni caso, tale commutatore è essenzialmente legato al tensore di curvatura $\hat{P}_{ikh}^{\ \ \ j}$ di cui alla (19), nel senso che vale una formula del tipo (22), anche per un *arbitrario campo spaziale* $\boldsymbol{s}(\tilde{s}^0 = 0 \sim \tilde{s}_0 = \hat{\gamma}^i\hat{s}_i)$:

$$
(69)\qquad [\tilde{\nabla}_i, \tilde{\nabla}_k]\,\hat{s}_h = 2\,\hat{\Omega}_{ik}\,\partial\hat{s}_h + \hat{P}_{ikh}^{\ \ \ j}\hat{s}_j.
$$

Come già nel caso ordinario, la (69) si può ricavare direttamente, ovvero mediante la *formula di Ricci*, espressa in termini anolonomi:

$$
(70)\qquad [\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta]\,\tilde{s}_\sigma = \tilde{R}_{\alpha\beta\sigma}^{\ \ \ \ \varrho}\,\tilde{s}_\varrho.
$$

Si ha innanzitutto, per indici spaziali:

$$
(71)\qquad [\tilde{\nabla}_i, \tilde{\nabla}_k]\,\hat{s}_h = \tilde{R}_{ikh}^{\ \ \ j}\hat{s}_j + \tilde{R}_{ikh}^{\ \ \ 0}\tilde{s}_0;
$$

d'altra parte, i coefficienti di rotazione di Ricci sono forniti dalla $(6.6)_{\mathrm{I}}$ sì che, per un campo spaziale, si ha rispettivamente:

$$
\begin{cases}
\tilde{\nabla}_k\hat{s}_h = \tilde{\nabla}_k\hat{s}_h - \hat{\mathcal{R}}_{kh}\hat{\gamma}^j\hat{s}_j \equiv \hat{\nabla}_k\hat{s}_h, \\
\tilde{\nabla}_i(\tilde{\nabla}_k\hat{s}_h) = \tilde{\partial}_i(\tilde{\nabla}_k\hat{s}_h) - \tilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\ \ j}\,\tilde{\nabla}_j\hat{s}_h - \tilde{\mathcal{R}}_{ih}^{\ \ j}\,\tilde{\nabla}_k\hat{s}_j - \hat{\mathcal{R}}_{ik}\,\tilde{\nabla}_0\hat{s}_h - \hat{\mathcal{R}}_{ih}\,\tilde{\nabla}_k\tilde{s}_0.
\end{cases}
$$

Pertanto, il commutatore delle derivate covarianti seconde, adottando la notazione $(24)_1$, assume la forma:

$$[\widetilde{\nabla}_i,\ \widetilde{\nabla}_k]\widehat{s}_h = [\tilde{\nabla}_i,\ \tilde{\nabla}_k]\ \widehat{s}_h - (\tilde{\nabla}_i \widehat{\mathcal{R}}_{kh} - \tilde{\nabla}_k \widehat{\mathcal{R}}_{ih})\ \tilde{s}_0 - 2\ \widehat{\Omega}_{ik}\,\partial \widehat{s}_h + Q_{ikh}{}^j \widehat{s}_j + Q_{ikh}{}^l \widehat{\gamma}_l \tilde{s}_0 + 2\ \widehat{\Omega}_{ik} \widehat{C}_h \tilde{s}_0\,;$$

d'altra parte, esplicitando la differenza di cui al terzo termine, e tenendo conto della (22), la precedente si scrive:

$$[\widetilde{\nabla}_i,\ \widetilde{\nabla}_k]\ \widehat{s}_h = [\tilde{\nabla}_i,\ \tilde{\nabla}_k]\ \widehat{s}_h - (\tilde{\nabla}_i H_{kh} - \tilde{\nabla}_k H_{ih} - 2\ \widehat{\Omega}_{ik}\,\partial \widehat{\gamma}_h - \widehat{P}_{ikh}{}^l \widehat{\gamma}_l)\ \tilde{s}_0 +$$

$$-2\ \widehat{\Omega}_{ik}\,\partial \widehat{s}_h + Q_{ikh}{}^j \widehat{s}_j + Q_{ikh}{}^l \widehat{\gamma}_l \tilde{s}_0 + 2\ \widehat{\Omega}_{ik} \widehat{C}_h \tilde{s}_0 .$$

Parallelamente, per quanto riguarda il secondo membro della (71), risulta:

$$\widetilde{R}_{ikh}{}^j \widehat{s}_j + \widetilde{R}_{ikh}{}^0 \tilde{s}_0 = (\widehat{P}_{ikh}{}^j + Q_{ikh}{}^j)\ \widehat{s}_j + [B_{ikh} + (\widehat{P}_{ikh}{}^l + Q_{ikh}{}^l)\ \widehat{\gamma}_l]\ \tilde{s}_0$$

e, dal confronto con la precedente, tenuto presente la $(24)_2$, si deduce la (69).

Si noti che il calcolo fatto è svincolato dal carattere spaziale di $\boldsymbol{s}$: $\tilde{s}_0 = \widehat{\gamma}^i \widehat{s}_j$; pertanto, *la formula di commutazione* (69) *ha carattere generale*, cioè vale per ogni campo vettoriale, indipendentemente dal valore di $\tilde{s}_0$.

La (70) dà anche luogo alla formula di commutazione delle derivate ∂ e $\tilde{\nabla}_i$; essa è infatti contenuta nel legame $[\widetilde{\nabla}_0,\ \widetilde{\nabla}_i]\ \widehat{s}_h = \widetilde{R}_{0ih}{}^j \widehat{s}_j + \widetilde{R}_{0ih}{}^0 \tilde{s}_0$. Tuttavia il calcolo è meno laborioso se si procede direttamente; si ha infatti: $\partial(\tilde{\nabla}_i \widehat{s}_h) = \partial \tilde{\partial}_i \widehat{s}_h - \partial \widetilde{\mathcal{R}}_{ih}{}^j \widehat{s}_j - \widetilde{\mathcal{R}}_{ih}{}^j\,\partial \widehat{s}_j$; $\tilde{\nabla}_i(\partial \widehat{s}_h) = \tilde{\partial}_i(\partial \widehat{s}_h) - \widetilde{\mathcal{R}}_{ih}{}^j\,\partial \widehat{s}_j$, e pertanto, tenuto conto della formula di commutazione $(3.3)_{\mathrm{I}}$ e della (53):

$$[\partial,\ \tilde{\nabla}_i]\widehat{s}_h = \widehat{C}_i\,\partial \widehat{s}_h - \widehat{H}_{ih}{}^j \widehat{s}_j, \tag{72}$$

essendo $\widehat{H}_{ih}{}^j$ il tensore giá introdotto con la (54). Si noti che, a differenza del caso precedente, la (72) presuppone che $\boldsymbol{s}$ abbia *carattere spaziale*: $\tilde{s}_0 = \widehat{\gamma}^j \widehat{s}_j$.

7. - Identità di Bianchi spaziale.

L'identità di Bianchi conserva la forma usuale anche in termini anolonomi:

$$\widetilde{\nabla}_{[\mu} \widetilde{R}_{\alpha\beta]\varrho\sigma} = 0\ ; \tag{73}$$

viceversa, per il *tensore di curvatura spaziale* P_{ijkl}, non vale la stessa condizione, come già nel caso ordinario ([4] e [5], 142). Per convincersene, consideriamo la componente spaziale della (73), ed esplicitiamo il termine generico $\widetilde{\nabla}_h \widetilde{R}_{ijkl}$; si ha, tenuto conto della $(25)_2$ e delle proprietà algebriche del tensore di curvatura:

$$\widetilde{\nabla}_h \widetilde{R}_{ijkl} = \tilde{\nabla}_h \widetilde{R}_{ijkl} - \widehat{\mathcal{R}}_{hi} B_{klj} + \widehat{\mathcal{R}}_{hj} B_{kli} - \widehat{\mathcal{R}}_{hk} B_{ijl} + \widehat{\mathcal{R}}_{hl} B_{ijk}. \tag{74}$$

D'altra parte, a norma delle $(23)_1$ e $(25)_1$, si deve intendere:

$$\widetilde{R}_{ijkl} = P_{ijkl} + Q_{ijkl} + B_{ijk}\widehat{\gamma}_l, \tag{75}$$

ferme restando le (24); pertanto, la (74) si scrive nella forma

$$\widetilde{\nabla}_h \widetilde{R}_{ijkl} = \widetilde{\nabla}_h P_{ijkl} + \widetilde{\nabla}_h Q_{ijkl} - \widehat{\mathcal{R}}_{hi} B_{klj} + \widehat{\mathcal{R}}_{hj} B_{kli} + \widetilde{\nabla}_h B_{ijk}\widehat{\gamma}_l + H_{hl} B_{ijk} - \widehat{\mathcal{R}}_{hk} B_{ijl}, \tag{76}$$

ove, disponendo di una permutazione circolare degli indici h, i e j, si può supporre:

$$\widetilde{\nabla}_h (H_{ik} H_{jl}) \equiv \widetilde{\nabla}_h H_{jl} H_{ik} + \widetilde{\nabla}_h H_{ik} H_{jl} \approx \widetilde{\nabla}_j H_{il} H_{hk} + \widetilde{\nabla}_i H_{jk} H_{hl}.$$

Pertanto, a meno di una inessenziale permutazione circolare degli indici h, i, e j, la (76) diviene

$$\widetilde{\nabla}_h \widetilde{R}_{ijkl} = \widetilde{\nabla}_h P_{ijkl} - 2\,\widetilde{\nabla}_h (\widehat{\Omega}_{ji} H_{kl}) + \widetilde{\nabla}_h A_{ijkl} - \widehat{\mathcal{R}}_{hi} B_{klj} + \widehat{\mathcal{R}}_{hj} B_{kli} + \\ + \widetilde{\nabla}_h B_{ijk}\widehat{\gamma}_l + 2\,\widehat{\Omega}_{ij}(H_{hl} C_k - H_{hk} C_l) + \widetilde{\nabla}_h \widehat{\gamma}_k B_{ijl},$$

ove si è posto, per brevità,

$$A_{ijkl} \overset{\text{def}}{=} H_{il} \widetilde{\nabla}_j \widehat{\gamma}_k - H_{jl} \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k; \tag{77}$$

d'altra parte si ha $\widehat{\mathcal{R}}_{hj} = \widehat{\mathcal{R}}_{jh} + 2\,\widehat{\Omega}_{hj}$, sì che il quarto e quinto termine a 2° membro della relazione precedente sono equivalenti, ai nostri fini, a $2\,\widehat{\Omega}_{hj} B_{kli} \widehat{=} 2\,\widehat{\Omega}_{ji} B_{klh}$, e ne risulta:

$$\widetilde{\nabla}_h \widetilde{R}_{ijkl} = \widetilde{\nabla}_h P_{ijkl} + 2\,\widetilde{\nabla}_h \widehat{\Omega}_{ij} H_{kl} + 2\,\widehat{\Omega}_{ij}(\widetilde{\nabla}_h H_{kl} - B_{klh} + H_{hl} C_k - H_{hk} C_l) + \\ + \widetilde{\nabla}_h A_{ijkl} + \widetilde{\nabla}_h B_{ijk}\widehat{\gamma}_l + \widetilde{\nabla}_h \widehat{\gamma}_k B_{ijl}. \tag{78}$$

Consideriamo ora i termini entro la parentesi tonda, sostituendo a B la sua espressione e spezzando H nelle due parti: *simmetrica* e *antisimmetrica*; si ha, con l'intervento del tensore (50) e della (51):

$$\widetilde{\nabla}_h H_{kl} - B_{klh} + H_{hl} C_k - H_{hk} C_l = H_{hk,\,l} + \widehat{\Omega}_{lk} C_h + \widetilde{\nabla}_{[h} \widehat{\gamma}_{l]} C_k - \widetilde{\nabla}_{[h} \widehat{\gamma}_{k]} C_l - \widehat{\mathrm{C}}_h k_{kl} + \\ + k_{hl}\,\partial\widehat{\gamma}_k - k_{hk}\,\partial\widehat{\gamma}_l.$$

Al tempo stesso, a meno di una permutazione circolare, risulta

$$\widetilde{\nabla}_h A_{ijkl} + \widetilde{\nabla}_h \widehat{\gamma}_k B_{ijl} \equiv \widetilde{\nabla}_h H_{il} \widetilde{\nabla}_j \widehat{\gamma}_k + H_{il} \widetilde{\nabla}_{hj} \widehat{\gamma}_k - \widetilde{\nabla}_h H_{jl} \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k - H_{jl} \widetilde{\nabla}_{hi} \widehat{\gamma}_k + \\ + 2\,\widetilde{\nabla}_h \widehat{\gamma}_k (\widetilde{\nabla}_{[j} H_{i]l} + \widehat{\Omega}_{ij} C_l) = H_{il} [\widetilde{\nabla}_h, \widetilde{\nabla}_j]\,\widehat{\gamma}_k + 2\,\widetilde{\nabla}_h \widehat{\gamma}_k \widehat{\Omega}_{ij} C_l\,,$$

sì che la (78), tenuto anche conto della (69), assume la forma seguente:

$$\tilde{\nabla}_h \tilde{R}_{ijkl} = \tilde{\nabla}_h P_{ijkl} + 2\,\tilde{\nabla}_h \widehat{\Omega}_{ij} H_{kl} + 2\,\widehat{\Omega}_{ij}(H_{hk,\,l} + \widehat{\Omega}_{lk} C_h + \tilde{\nabla}_{[h}\widehat{\gamma}_{l]} C_k + \tilde{\nabla}_{(h}\widehat{\gamma}_{k)} C_l +$$

$$- \widehat{C}_h k_{kl} + k_{hl}\,\partial\widehat{\gamma}_k - k_{hk}\,\partial\widehat{\gamma}_l) + H_{il}(2\,\widehat{\Omega}_{hj}\,\partial\widehat{\gamma}_k + P_{hjk}{}^{n}\,\widehat{\gamma}_n) + \tilde{\nabla}_h B_{ijk}\widehat{\gamma}_l .$$

Resta ancora da trasformare l'ultimo termine; si ha successivamente, a meno di permutazioni:

$$\tilde{\nabla}_h B_{ijk} = \tilde{\nabla}_{hj} H_{ik} - \tilde{\nabla}_{hi} H_{jk} + 2\,\tilde{\nabla}_h(\widehat{\Omega}_{ij} C_k) = -\,[\tilde{\nabla}_h, \tilde{\nabla}_i]\, H_{jk} + 2\,\tilde{\nabla}_h(\widehat{\Omega}_{ij} C_k)\,,$$

e pertanto, applicando la (69) e raccogliendo i due termini in $\partial\widehat{\gamma}_k$, risulta:

$$\tilde{\nabla}_h \tilde{R}_{ijkl} = \tilde{\nabla}_h P_{ijkl} + 2\,\tilde{\nabla}_h \widehat{\Omega}_{ij}(H_{kl} + C_k\widehat{\gamma}_l) + 2\,\widehat{\Omega}_{ij}(H_{hk,\,l} + \widehat{\Omega}_{lk} C_h + \tilde{\nabla}_{[h}\widehat{\gamma}_{l]} C_k +$$

$$+ \tilde{\nabla}_{(h}\widehat{\gamma}_{k)} C_l - \widehat{C}_h k_{kl} - \omega_{hl}\,\partial\widehat{\gamma}_k - k_{hk}\,\partial\widehat{\gamma}_l - \partial H_{hk}\widehat{\gamma}_l + \tilde{\nabla}_h C_k \widehat{\gamma}_l) +$$

$$+ H_{il}\widehat{P}_{hjk}{}^{n}\widehat{\gamma}_n - (\widehat{P}_{hij}{}^{n} H_{nk} + \widehat{P}_{hik}{}^{n} H_{jn})\,\widehat{\gamma}_l .$$

Infine, per la derivata ∂H_{hk}, a norma delle $(28)_1$ e (32), si deve intendere

$$\partial\omega_{hk} \equiv \partial\widehat{\Omega}_{hk} + \partial\tilde{\nabla}_{[h}\widehat{\gamma}_{k]} = \tilde{\nabla}_{[h}\widehat{C}_{k]} + (\tilde{\nabla}_{[h} + \widehat{C}_{[h})\,\partial\widehat{\gamma}_{k]} = \tilde{\nabla}_{[h} C_{k]} + \widehat{C}_{[h}\,\partial\widehat{\gamma}_{k]},$$

sì che in definitiva risulta, a meno di permutazioni cicliche degli indici h, i e j:

$$\tilde{\nabla}_h \tilde{R}_{ijkl} = \tilde{\nabla}_h P_{ijkl} + 2\,\tilde{\nabla}_h \widehat{\Omega}_{ij}(H_{kl} + C_k\widehat{\gamma}_l) + 2\,\widehat{\Omega}_{ij}(H_{hk,\,l} + C_h\widehat{\Omega}_{lk} + \tilde{\nabla}_{[h}\widehat{\gamma}_{l]}\widehat{C}_k + \tag{79}$$

$$+ \tilde{\nabla}_{(h}\widehat{\gamma}_{k)} C_l - \widehat{C}_h k_{kl} - \widehat{\Omega}_{hl}\,\partial\widehat{\gamma}_k - k_{hk}\,\partial\widehat{\gamma}_l - \widehat{C}_{[h}\,\partial\widehat{\gamma}_{k]}\widehat{\gamma}_l + \tilde{\nabla}_{(h} C_{k)}\widehat{\gamma}_l - \partial k_{hk}\widehat{\gamma}_l) +$$

$$+ H_{il}\widehat{P}_{hjk}{}^{n}\widehat{\gamma}_n - (\widehat{P}_{hij}{}^{n} H_{nk} + \widehat{P}_{hik}{}^{n} H_{jn})\,\widehat{\gamma}_l .$$

Di qui, permutando gli indici h, i e j, e tenendo conto delle $(28)_2$ e (42), nonché della circostanza che *il tensore* $\widehat{\Omega}_{[ij}\widehat{\Omega}_{h]l}$, *essendo antisimmetrico, in dimensione tre* è *identicamente nullo*:

$$\widehat{\Omega}_{[ij}\widehat{\Omega}_{h]l} = 0\,, \tag{80}$$

si ottiene la seguente forma dell'*identità di Bianchi spaziale*:

$$\tilde{\nabla}_{[h} P_{ij]kl} + 2\,\widehat{\Omega}_{[ij}\widehat{H}_{h]kl} - \gamma_{lm}\widehat{H}_{[i}{}^{m}\widehat{P}_{jh]k}{}^{n}\widehat{\gamma}_n - \widehat{H}_{[j}{}^{n} P_{hi]kn}\widehat{\gamma}_l = 0\,. \tag{81}$$

Nel caso ordinario, si ritrova l'espressione ([4]-[5], 142): $\tilde{\nabla}_{[h} P_{ij]kl} + 2\,\widehat{\Omega}_{[ij} H_{h]k,\,l} = 0$, la quale assume la forma tipica dell'identità di Bianchi sia per $\widehat{\Omega}_{ij} = 0$, sia per $k_{ij} = 0$.

REFERENCES

[1] G. FERRARESE - D. BINI, *Riferimenti fluidi polari in Relatività generale*, Suppl. Ricerche di Matematica, **XLI** (1992), pp. 159-172.

[2] G. FERRARESE - L. STAZI, *Riferimenti generalizzati in Relatività*, Riv. Mat. Univ. Parma (5), 5 (1996), pp. 245-256.

[3] G. FERRARESE, *Contributi alla tecnica delle proiezioni su una Varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Rend. Mat. Roma, 22 (1963), pp. 147-168.

[4] G. FERRARESE, *Proprietà di 2° ordine di un generico Riferimento fisico in Relatività generale*, Rend. Mat. Roma, 24 (1965), pp. 57-100.

[5] G. FERRARESE, *Lezioni di Relatività generale*, Pitagora Editrice, Bologna (1994).

[6] G. FERRARESE, *Lezioni di Meccanica relativistica*, Pitagora Editrice, Bologna (1985).

[7] G. FERRARESE, *Introduzione alla Dinamica riemanniana dei Sistemi continui*, Pitagora Editrice, Bologna (1979).

[8] G. FERRARESE - L. STAZI, *Superfluidi relativistici e Continui alla Cosserat*, Riv. Mat. Univ. Parma (1997).