Funzioni regolari di più variabili quaternioniche (*).

DONATO PERTICI

Summary. – *In this paper we study regular (or holomorphic) functions of several quaternionic variables. We give an integral representation formula of Bochner-Martinelli type, and prove, among others, analogs of a theorem of Hartogs and the Plemelj formulas.*

0. – Introduzione.

Il presente lavoro contiene una parte dei risultati originali ottenuti durante la preparazione della tesi di dottorato, sulla teoria delle funzioni regolari di più variabili quaternioniche.

La definizione qui adottata di funzione regolare (o olomorfa) sul corpo $\boldsymbol{H}$ dei quaternioni è quella di R. FUETER ([5], [6]), il quale chiamò funzioni regolari della variabile quaternionica, le soluzioni di una equazione formalmente analoga all'equazione di Cauchy-Riemann. FUETER ed i suoi allievi studiarono intensamente tali funzioni, riuscendo in particolare a provare per le funzioni regolari una formula di rappresentazione integrale del tipo di Cauchy. Una esposizione dei risultati trovati si ha ad esempio in [7] e [2].

In seguito le formule integrali stabilite da Fueter sono state dimostrate, in modo molto più semplice e in algebre più generali, anche da G. B. RIZZA (cfr. ad esempio [13] e [14]). Negli ultimi anni la teoria ha avuto nuovi sviluppi sia analitici che geometrici.

Per un'esposizione completa di tutta la problematica rimandiamo, comunque, al lavoro di tesi, limitandoci qui a segnalare i contributi recenti più significativi, che a nostro avviso sono contenuti nei lavori [15], [16], [18], [1] e [17].

I risultati ottenuti in questo lavoro riguardano alcuni aspetti analitici della teoria delle funzioni regolari di più variabili quaternioniche. Dopo un paragrafo di preliminari, nei paragrafi 2 e 3 viene dimostrata una formula di rappresentazione di tipo Bochner-Martinelli e un teorema di estensione tipo Hartogs. Il paragrafo 4 contiene una dimostrazione delle formule di Plemelj, e il paragrafo 5 il teorema di estensione per le funzioni analitiche reali definite su ipersuperficie analitiche di $\boldsymbol{H}$

(*) Entrata in Redazione il 18 aprile 1987.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « U. Dini », Università, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italia.

(teor. 8), ed il teorema di estensione per funzioni $f\colon \partial D \to \boldsymbol{H}$, $D \subseteq \boldsymbol{H}^n$, verificanti ipotesi opportune (teor. 9).

Colgo qui l'occasione per ringraziare G. TOMASSINI, per i suggerimenti fornitimi durante la preparazione di questo lavoro.

1. - Preliminari.

1) Premettiamo alcuni veloci richiami.

Un quaternione q si può rappresentare nella forma

$$q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k ,$$

dove $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}$ e $1, i, j, k$ costituiscono una base dell'algebra dei quaternioni $\boldsymbol{H}$. La struttura moltiplicativa di $\boldsymbol{H}$ è data dalle seguenti relazioni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 , \quad ij = -ji = k , \quad jk = -kj = i , \quad ki = -ik = j .$$

Poniamo:

$$\operatorname{Re} q = x_0 , \quad \operatorname{Im} q = x_1 i + x_2 j + x_3 k ,$$
$$\bar{q} = \operatorname{Re} q - \operatorname{Im} q , \quad |q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} .$$

$\operatorname{Re} q$, $\operatorname{Im} q$, $\bar{q}$, $|q|$ si dicono rispettivamente la *parte reale*, la *parte immaginaria*, il *coniugato* e il *modulo* del quaternione q.

$\boldsymbol{H}$ costituisce un corpo non commutativo e se $q \neq 0$ si ha

$$q^{-1} = \bar{q}/|q|^2 .$$

Si verifica poi che $\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}$, $\forall q, q' \in \boldsymbol{H}$.

2) Sia A un aperto di $\boldsymbol{H} \cong \boldsymbol{R}^4$ e sia $f\colon A \to \boldsymbol{H}$ una applicazione differenziabile.

Si dice che f è *regolare a sinistra* in A se

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + i \frac{\partial f}{\partial x_1} + j \frac{\partial f}{\partial x_2} + k \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad \text{in } A .$$

Posto

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3} ,$$

f è allora regolare a sinistra se $\partial f/\partial \bar{q} = 0$.

f si dirà invece *regolare a destra* se

$$\frac{f\partial}{\partial\overline{q}} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} i + \frac{\partial f}{\partial x_2} j + \frac{\partial f}{\partial x_3} k = 0 \quad \text{in } A .$$

L'operatore $\partial/\partial\overline{q}$ verrà anche detto *operatore di Fueter*. Infine, posto

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x_0} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - j\frac{\partial}{\partial x_2} - k\frac{\partial}{\partial x_3},$$

f si dirà *antiregolare a sinistra* se $\partial f/\partial q = 0$ in A, e *antiregolare a destra* se $f\partial/\partial q = 0$.

Nel seguito svilupperemo la teoria delle funzioni regolari a sinistra e chiameremo queste ultime semplicemente *funzioni regolari*. In modo completamente analogo si può naturalmente sviluppare la teoria delle funzioni regolari a destra.

Posto $i_0 = 1$, $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = k$, l'operatore di Fueter assume allora la forma seguente:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{q}} = \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}.$$

3) Si può facilmente provare che ogni funzione regolare f è necessariamente di classe C^1 e che per essa vale la seguente rappresentazione integrale di Cauchy-Fueter (cfr. [17], [18]):

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D} \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dq\cdot f(q), \tag{0}$$

dove q_0 è un punto dell'aperto limitato D di $\boldsymbol{H}$, $f \in C^1(\overline{D})$ e Dq è la 3-forma definita più avanti.

Quindi ogni funzione regolare possiede le derivate di ogni ordine. Inoltre poichè:

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial\overline{q}} = \frac{\partial}{\partial\overline{q}}\frac{\partial}{\partial q} = \Delta,$$

dove Δ è l'ordinario laplaciano di $\boldsymbol{R}^4 = \boldsymbol{H}$, si deduce che ogni funzione regolare è necessariamente una funzione armonica.

A partire dalla formula di Cauchy-Fueter, come per la variabile complessa, si possono dimostrare il principio del massimo modulo ed il teorema di Liouville.

Poniamo ora

$$dq = dx_0 + i\,dx_1 + j\,dx_2 + k\,dx_3,$$

$$\overline{dq} = dx_0 - i\,dx_1 - j\,dx_2 - k\,dx_3;$$

dq, $\overline{dq}$ sono 1-forme a valori in $\boldsymbol{H}$.

Siano inoltre

$$Dq = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - i\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + j\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - k\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2\,,$$

$$\overline{Dq} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + i\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - j\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + k\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Dq, $\overline{Dq}$ sono 3-forme a valori in $\boldsymbol{H}$.

Indichiamo con $\theta = dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ la forma volume canonica di $\boldsymbol{H}$ e con $*$ il suo operatore di Hodge. Si verificano facilmente le uguaglianze seguenti:

$$\overline{dq} \wedge Dq = - Dq \wedge \overline{dq} = 4\theta\,, \tag{1}$$

$$Dq \wedge \sum_{i=0}^{3} x_i\, dx_i = - \sum_{i=0}^{3} x_i\, dx_i \wedge Dq = - q\theta\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} \overline{dq} \wedge dq \wedge df = - \overline{Dq} \frac{\partial f}{\partial \overline{q}} + * df\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} dq \wedge \overline{dq} \wedge df = Dq \frac{\partial f}{\partial q} - * df\,, \tag{3$'$}$$

$$Dq \wedge df = - \frac{\partial f}{\partial \overline{q}} \theta\,, \tag{3$''$}$$

essendo f una funzione di classe C^1.

Per (3) e (3)$''$ f è regolare $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \overline{dq} \wedge dq \wedge df = * df \Leftrightarrow Dq \wedge df = 0$.

Da (3)$'$ si deduce invece che f è antiregolare se e solo se

$$\tfrac{1}{2}\, dq \wedge \overline{dq} \wedge df = - * df\,.$$

Se f è regolare in A e se S è una ipersuperficie orientabile contenuta in A, avente N come vettore normale unitario ed ω come forma volume canonica, dalla (3) si deduce che:

$$\frac{1}{2} \overline{dq} \wedge dq \wedge d(f|_S) = - \frac{\partial f}{\partial N} \omega\,. \tag{4}$$

Invece, se f è antiregolare in A, dalla (3)$'$ si ricava:

$$\frac{1}{2} dq \wedge \overline{dq} \wedge d(f|_S) = \frac{\partial f}{\partial N} \omega\,. \tag{4$'$}$$

Dalla (4) e dalla (4)$'$ si deduce che se f è una funzione regolare o antiregolare sul dominio A, nulla identicamente su una ipersuperficie analitica S di A, essa è identicamente nulla su tutto A.

Infatti f è una funzione armonica nulla su S con la derivata normale $\partial f/\partial N$; l'affermazione segue allora dal teorema di Cauchy-Kowalewski.

4) L'operatore di Fueter verifica le uguaglianze seguenti:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{q}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} g + \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda f \frac{\partial g}{\partial x_\lambda}. \tag{6}$$

Quindi se f è una funzione reale si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{q}}. \tag{6$'$}$$

Inoltre se $a \in \boldsymbol{H}$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}}(ga) = \frac{\partial g}{\partial \bar{q}} a. \tag{6$''$}$$

Da (5) e (6)$''$ si deduce che le funzioni regolari costituiscono uno spazio vettoriale destro su $\boldsymbol{H}$.

2. – La formula di Bochner-Martinelli per funzioni regolari di più variabili.

1) Sia A un aperto di $\boldsymbol{H}^n$ $(n \geqslant 1)$, e sia $f: A \to \boldsymbol{H}$ una funzione di classe C^1. Diremo che f è *regolare* (*a sinistra*) in A se lo è rispetto a ciascuna variabile, cioè se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_h} = \frac{\partial f}{\partial x_0^{(h)}} + i \frac{\partial f}{\partial x_1^{(h)}} + j \frac{\partial f}{\partial x_2^{(h)}} + k \frac{\partial f}{\partial x_3^{(h)}} = 0$$

in A, per $h = 1, \dots, n$, essendo $f = f(q_1, \dots, q_n)$,

$$q_h = x_0^{(h)} + i x_1^{(h)} + j x_2^{(h)} + k x_3^{(h)} = \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda x_\lambda^{(h)}.$$

Useremo tali notazioni anche in seguito.

Sia $q_0 \in \boldsymbol{H}^n$ e sia $\Omega_{q_0}(q)$ la $(4n-1)$-forma (rispetto alla q) definita in $\boldsymbol{H}^n - \{q_0\}$ da:

$$\Omega_{q_0}(q) = \frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{q}_i - \bar{q}_i^0)}{|q - q_0|^{4n}} \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{i-1} \wedge Dq_i \wedge \theta_{i+1} \wedge \dots \wedge \theta_n,$$

dove:

$$q = (q_1, \dots, q_n)\,, \qquad q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)\,,$$

$$\theta_j = dx_0^{(j)} \wedge dx_1^{(j)} \wedge dx_2^{(j)} \wedge dx_3^{(j)}\,,$$

$$Dq_h = dx_1^{(h)} \wedge dx_2^{(h)} \wedge dx_3^{(h)} - i\, dx_0^{(h)} \wedge dx_2^{(h)} \wedge dx_3^{(h)} + \\ + j\, dx_0^{(h)} \wedge dx_1^{(h)} \wedge dx_3^{(h)} - k\, dx_0^{(h)} \wedge dx_1^{(h)} \wedge dx_2^{(h)}\,.$$

Si verifica che Ω_{q_0} è d-chiusa in $\boldsymbol{H}^n - \{q_0\}$.

Di conseguenza se D è un aperto limitato a frontiera differenziabile di $\boldsymbol{H}^n$ e se $q_0 \in \boldsymbol{H}^n - \overline{D}$ si ha, per il teorema di Stokes

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0} = 0\,. \tag{7}$$

Se inoltre $q_0 \in D$ e ∂D è una ipersuperficie di Jordan di classe C^1 (cioè se ∂D è C^1-diffeomorfa alla sfera S^{4n-1}) si ha:

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0} = 1\,, \tag{8}$$

(considerando su ∂D l'orientazione indotta da $\boldsymbol{R}^{4n} = \boldsymbol{H}^n$).

Infatti esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0} = \int_{|q-q_0|=\varepsilon} \Omega_{q_0}(q) = \frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{|q-q_0|=\varepsilon} (\bar{q}_i - \bar{q}_i^0)\theta_1 \wedge \dots \wedge Dq_i \wedge \dots \wedge \theta_n\,.$$

Ma per il teorema di Stokes quest'ultimo integrale è uguale a

$$\frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \sum_{i=1}^{n} \int_{|q-q_0|=\varepsilon} \theta_1 \wedge \dots \wedge \overline{dq}_i \wedge Dq_i \wedge \dots \wedge \theta_n\,,$$

e dunque, per la (1), a

$$\frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \cdot 4n \cdot \mathrm{vol}\,(|q - q_0| < \varepsilon) = 1\,.$$

2) Consideriamo ora una funzione f regolare in un aperto A di $\boldsymbol{H}^n$, a valori in $\boldsymbol{H}$. Sia q_0 un qualsiasi punto di $\boldsymbol{H}^n$. $\Omega_{q_0} \cdot f$ è una forma d-chiusa in $A - \{q_0\}$.

Infatti Ω_{q_0} è d-chiusa e $\Omega_{q_0} \wedge df = 0$, per la $(3)''$, essendo f regolare. Perciò se D è un aperto a frontiera differenziabile, relativamente compatto in $A - \{q_0\}$ si ha, ancora per il teorema di Stokes:

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0} \cdot f = 0\,. \tag{9}$$

Consideriamo ora un aperto limitato D a frontiera differenziabile tale che $\bar{D} \subseteq A$ ed un punto $q_0 \in D$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\{|q - q_0| \leqslant \varepsilon\} \subseteq D$. Applicando l'uguaglianza (9) all'aperto $D - \{|q - q_0| \leqslant \varepsilon\}$ si ottiene:

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q) = \int_{|q-q_0|=\varepsilon} \Omega_{q_0}(q) f(q) . \tag{10}$$

Il primo membro della (10) è indipendente da ε. Il secondo membro, in virtù della (8), tende a $f(q_0)$, quando ε tende a zero.

Si ricava quindi la *formula di Bochner-Martinelli* per le funzioni regolari:

$$f(q_0) = \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q) . \tag{11}$$

Tale formula è analoga alla ben nota formula integrale di Bochner-Martinelli per la variabile complessa (cfr. [10]).

Osserviamo che per $n = 1$ essa si riduce alla formula integrale di Cauchy-Fueter.

Osserviamo inoltre che, in virtù della formula di Bochner-Martinelli, ogni funzione regolare possiede tutte le derivate di ogni ordine.

Inoltre poichè il Laplaciano Δ è esprimibile nel modo seguente:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial}{\partial q_i} ,$$

si ha che ogni funzione regolare è armonica.

3) Sia ora $n > 1$; indichiamo con $(\partial \Omega_{q_0} / \partial \bar{q}_h^0)(q)$, $(h = 1, \ldots, n)$, la $(4n - 1)$-forma a valori in $\boldsymbol{H}$, definita in $\boldsymbol{H}^n - \{q_0\}$, ottenuta derivando i coefficienti di $\Omega_{q_0}(q)$ rispetto a $\bar{q}_h^0$.

Consideriamo, per $h = 1, \ldots, n$, la $(4n - 2)$-forma in $\boldsymbol{H}^n - \{q_0\}$ definita da:

$$\alpha_{q_0}^h(q) = -\frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}} Dq_h \wedge \sum_{\beta \neq h} \frac{(\bar{q}_\beta - \bar{q}_\beta^0)}{|q - q_0|^{4n}} \theta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}_h \wedge \ldots \wedge Dq_\beta \wedge \ldots \wedge \theta_n .$$

Si verifica senza difficoltà che

$$d\alpha_{q_0}^h = \frac{\partial \Omega_{q_0}}{\partial \bar{q}_h^0} , \qquad \forall q_0 \in \boldsymbol{H}^n . \tag{12}$$

Consideriamo la funzione f regolare su un aperto A di $\boldsymbol{H}^n$ e verifichiamo che $\alpha_{q_0}^h \wedge df$ è una $(4n - 1)$-forma esatta su $A - \{q_0\}$, $\forall q_0 \in \boldsymbol{H}^n$.

Per la precisione si proverà che:

$$\alpha_{q_0}^h \wedge df = d\Bigg(-\frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}} Dq_h \wedge \sum_{\beta \neq h} \frac{1}{4(2n-1)|q - q_0|^{4n-2}} \cdot \\ \cdot \theta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\theta}_h \wedge \ldots \wedge \overline{dq_\beta} \wedge dq_\beta \wedge \ldots \wedge \theta_n \wedge \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(h)}} dx_i^{(h)}\Bigg) . \tag{13}$$

Per semplicità fissiamo $h=1$.

$$\frac{2\pi^{2n}}{(2n-1)!}\alpha^1_{q_0}\wedge df = -Dq_1\wedge\sum_{\beta=2}^{n}\frac{(\overline{q}_\beta-\overline{q}^0_\beta)}{|q-q_0|^{4n}}\theta_2\wedge\ldots\wedge Dq_\beta\wedge\ldots\wedge$$
$$\wedge\theta_n\wedge\left(\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}+\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(\beta)}}dx_i^{(\beta)}\right)=$$
$$=-\sum_{\beta=2}^{n}Dq_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge\mathrm{Re}\left(\frac{(\overline{q}_\beta-\overline{q}^0_\beta)}{|q-q_0|^{4n}}Dq_\beta\right)\wedge\ldots\wedge\theta_n\wedge\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}-\sum_{\beta=2}^{n}Dq_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge$$
$$\wedge\mathrm{Im}\left(\frac{(\overline{q}_\beta-\overline{q}^0_\beta)}{|q-q_0|^{4n}}Dq_\beta\right)\wedge\ldots\wedge\theta_n\wedge\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}+\sum_{\beta=2}^{n}Dq_1\wedge\frac{(\overline{q}_\beta-\overline{q}^0_\beta)}{|q-q_0|^{4n}}\theta_2\wedge\ldots\wedge\theta_n\frac{\partial f}{\partial\overline{q}_\beta},$$

tenendo conto della (3)″.

Il terzo termine è nullo, essendo f regolare rispetto a q_β. Nel primo termine il fattore

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}$$

commuta col fattore Re (...). Compare allora, in evidenza, tenendo ancora conto della (3)″, il fattore $\partial f/\partial\overline{q}_1$. Questo ultimo è nullo, poichè f è regolare rispetto a q_1.

Dunque anche il primo termine è nullo. Perciò si ha:

$$\frac{2\pi^{2n}}{(2n-1)!}\alpha^1_{q_0}\wedge df=-\sum_{\beta=2}^{n}Dq_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge\mathrm{Im}\left(\frac{(\overline{q}_\beta-\overline{q}^0_\beta)}{|q-q_0|^{4n}}Dq_\beta\right)\wedge\ldots\wedge\theta_n\wedge\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}\,. \tag{14}$$

Posto

$$q_h^0=y_0^{(h)}+iy_1^{(h)}+jy_2^{(h)}+ky_3^{(h)}$$

si ha invece:

$$d\left(-Dq_1\wedge\sum_{\beta=2}^{n}\frac{1}{4(2n-1)|q-q_0|^{4n-2}}\theta_2\wedge\ldots\wedge\overline{dq}_\beta\wedge dq_\beta\wedge\ldots\wedge\theta_n\wedge\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}\right)=$$
$$=-\sum_{\beta=2}^{n}Dq_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge\sum_{j=0}^{3}\frac{(x_j^{(\beta)}-y_j^{(\beta)})}{|q-q_0|^{4n}}dx_j^{(\beta)}\wedge$$
$$\wedge\frac{\overline{dq}_\beta\wedge dq_\beta}{2}\wedge\ldots\wedge\theta_n\wedge\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}dx_i^{(1)}+\frac{1}{2(2n-1)|q-q_0|^{4n-2}}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\beta=2}^{n}\sum_{i=0}^{3}Dq_1\wedge\theta_2\wedge\ldots\wedge\frac{\overline{dq}_\beta\wedge dq_\beta}{2}\wedge\sum_{j=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j^{(\beta)}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}\right)dx_j^{(\beta)}\wedge dx_i^{(1)}\wedge\ldots\wedge\theta_n\,.$$

Si vede immediatamente che il primo termine uguaglia il secondo membro della (14).

Resta solo da provare che il secondo termine è identicamente nullo.

Poichè f è regolare rispetto a q_β, lo è anche $\partial f/\partial x_i^{(1)}$.

Quindi, tenendo conto della (3) e scambiando l'ordine di derivazione, il secondo termine risulta uguale a

$$-\frac{1}{2(2n-1)|q-q_0|^{4n-2}}\sum_{\beta=2}^{n}\theta_2\wedge\ldots\wedge Dq_1\wedge\sum_{i=0}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0^{(\beta)}}\right)\cdot\right.$$
$$\cdot dx_i^{(1)}\wedge dx_1^{(\beta)}\wedge dx_2^{(\beta)}\wedge dx_3^{(\beta)}-\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1^{(\beta)}}\right)dx_i^{(1)}\wedge dx_0^{(\beta)}\wedge dx_2^{(\beta)}\wedge dx_3^{(\beta)}+$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2^{(\beta)}}\right)dx_i^{(1)}\wedge dx_0^{(\beta)}\wedge dx_1^{(\beta)}\wedge dx_3^{(\beta)}-\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3^{(\beta)}}\right)dx_i^{(1)}\wedge dx_0^{(\beta)}\wedge dx_1^{(\beta)}\wedge dx_2^{(\beta)}\right]\wedge\ldots\wedge\theta_n\,.$$

Poichè f è regolare rispetto a q_1, anche $\partial f/\partial x_j^{(\beta)}$ lo è.

Per la (3)″ si deduce allora che il secondo termine si annulla identicamente. È dunque provata l'uguaglianza (13).

Se consideriamo ora una ipersuperficie S di $A-\{q_0\}$ avremo che, se f è regolare in A

(15) $\quad \alpha_{q_0}^h\wedge d(f|_S)$ è una forma esatta su S, $\quad\forall q_0\notin S,\ h=1,\ldots,n\,.$

4) Sia S una ipersuperficie di classe C^1 di $\boldsymbol{H}^n$, e sia $f\colon S\to\boldsymbol{H}$ una funzione di classe C^1. Diremo che f soddisfa le *condizioni di Cauchy-Riemann-Fueter in forma integrale* se

(16) $\quad \alpha_{q_0}^h\wedge df$ è una forma esatta su S, $\quad\forall q_0\notin S,\ h=1,\ldots,n\,.$

Per la (15) le tracce di funzioni regolari soddisfano la condizione (16).

Se S è orientabile, compatta e connessa la (16) è equivalente alla

(16)′
$$\int_S\alpha_{q_0}^h\wedge df=0\,,\qquad\forall q_0\notin S,\ h=1,\ldots,n\,.$$

Per la (12), la condizione (16)′ equivale a

(16)″
$$\int_S\frac{\partial\Omega_{q_0}}{\partial\bar{q}_h^0}\cdot f=0\,,\qquad\forall q_0\notin S,\ h=1,\ldots,n\,,$$

(essendo, come in precedenza, S orientabile, compatta, connessa).

La (16)″ è una *condizione integrale in forma debole*: essa può essere data anche per funzioni f solamente continue.

3. – La formula di Green, l'equazione $\partial g/\partial \bar{q}_j = f_j$, ed il teorema di Hartogs.

1) Dimostriamo anzitutto una formula di tipo Green per le funzioni di una variabile quaternionica.

Poniamo

$$G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2} = \frac{\bar{q}}{|q|^4}\,.$$

G è il nucleo di Cauchy-Fueter; G è una funzione regolare a sinistra e a destra in $\boldsymbol{H} - \{0\}$ (cfr. [18]).

Consideriamo un aperto limitato D di $\boldsymbol{H}$ a frontiera differenziabile, e due funzioni f, $g \in C^1(\bar{D})$.

Si può provare facilmente che ([18])

$$d(gDqf) = \left[\frac{g\partial}{\partial \bar{q}}\cdot f + g\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right]\theta\,, \tag{17}$$

quindi si ha, per il teorema di Stokes

$$\int\limits_{\partial D} gDqf = \int\limits_{D}\left[\frac{g\partial}{\partial \bar{q}}\cdot f + g\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}\right]. \tag{18}$$

TEOREMA 1 (GREEN I). – *Sia D un dominio limitato a frontiera differenziabile di $\boldsymbol{H}$ e sia $f \in C^1(\bar{D})$. Allora se $q_0 \in D$ si ha*

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\partial D} G(q - q_0)\, Dqf(q) - \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{D} G(q - q_0)\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(q)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Siano $q_0 \in D$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $\{|q - q_0| \leqslant \varepsilon\} \subseteq D$. Sia $D_\varepsilon = D - \{|q - q_0| \leqslant \varepsilon\}$.

Poichè $G(q - q_0)$ è regolare a destra in D_ε si ha per la (18)

$$\int\limits_{\partial D} G(q - q_0)\, Dqf(q) - \int\limits_{|q-q_0|=\varepsilon} G(q - q_0)\, Dqf(q) = \int\limits_{D_\varepsilon} G(q - q_0)\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(q)\,.$$

Ma

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} G(q - q_0)\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(q) = \int\limits_{D} G(q - q_0)\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(q)\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|q-q_0|=\varepsilon} G(q - q_0)\, Dqf(q) = 2\pi^2 f(q_0)\,.$$

Il teorema resta così provato.

In seguito avremo bisogno di una formula di Green scritta in modo diverso da quella ora trovata.

A tale scopo premettiamo il

LEMMA 1. – *Siano A un aperto di $\boldsymbol{H}$ e $g \in C^1(A)$. Sia poi D un dominio a frontiera differenziabile, relativamente compatto in A, tale che $0 \notin \partial D$. Allora*

$$\int_D i_\lambda G(q) \frac{\partial g}{\partial \bar{q}}(q) - \int_D \frac{\partial}{\partial \bar{q}}\big(G(q) i_\lambda g(q)\big) = \int_{\partial D} [i_\lambda G(q)\, Dqg(q) - DqG(q) i_\lambda g(q)]\,, \qquad \lambda = 0, 1, 2, 3\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia, ad esempio, $\lambda = 0$, cioè $i_\lambda = 1$.

Si ha per la (17)

$$d\big(G(q)\, Dqg(q) - DqG(q) g(q)\big) = \left(G(q) \frac{\partial g}{\partial \bar{q}}(q) - \frac{\partial}{\partial \bar{q}}\big(G(q) g(q)\big)\right)\theta\,.$$

Quindi se $0 \notin \bar{D}$, l'enunciato del Lemma segue dal teorema di Stokes.

Sia allora $0 \in D$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\{|q| \leqslant \varepsilon\} \subseteq D$. Applicando ancora il teorema di Stokes al dominio $D - \{|q| \leqslant \varepsilon\}$ si ottiene:

$$\int_{D - \{|q| \leqslant \varepsilon\}} \left[G(q) \frac{\partial g}{\partial \bar{q}}(q) - \frac{\partial}{\partial \bar{q}}\big(G(q) g(q)\big)\right] = \int_{\partial D} [G(q)\, Dqg(q) - DqG(q) g(q)] + - \int_{|q| = \varepsilon} [G(q)\, Dqg(q) - DqG(q) g(q)]\,.$$

Quando $\varepsilon \to 0$, il primo membro converge a

$$\int_D \left[G(q) \frac{\partial g}{\partial \bar{q}}(q) - \frac{\partial}{\partial \bar{q}}\big(G(q) g(q)\big)\right].$$

Per provare il lemma resta solo da dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|q| = \varepsilon} [G\, Dqg - DqGg] = 0\,.$$

Si ha

$$G\, Dqg - DqGg = (iGg - Gig)\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (-\, jGg + Gjg)\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + + (kGg - Gkg)\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Per ragioni di simmetria è sufficiente provare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|q| = \varepsilon} (iGg - Gig)\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0\,.$$

Posto

$$g = \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda g_\lambda$$

si ha

$$iGg - Gig = \\ = \frac{2}{|q|^4}[(-x_3g_2 + x_2g_3) + i(x_2g_2 + x_3g_3) + j(x_3g_0 - x_2g_1) + k(-x_3g_1 - x_2g_0)] ,$$

e quindi

$$\int_{|q|=\varepsilon} (iGg - Gig)\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 2\int_{|q|=1} [(-x_3g_2(\varepsilon q) + x_2g_3(\varepsilon q)) + i(x_2g_2(\varepsilon q) + x_3g_3(\varepsilon q)) + \\ + j(x_3g_0(\varepsilon q) - x_2g_1(\varepsilon q)) + k(-x_3g_1(\varepsilon q) - x_2g_0(\varepsilon q))]\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$$

Quando $\varepsilon \to 0$, il secondo membro converge a

$$2\int_{|q|=1} [(-x_3g_2(0) + x_2g_3(0)) + i(x_2g_2(0) + x_3g_3(0)) + \\ + j(x_3g_0(0) - x_2g_1(0)) + k(-x_3g_1(0) - x_2g_0(0))]\, dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$$

Quest'ultima quantità è nulla; infatti la forma integranda è d-chiusa in $\{|q| \leqslant 1\}$, e quindi per il teorema di Stokes è nullo il suo integrale su $\{|q| = 1\}$.

Il lemma è dunque provato per $\lambda = 0$.

I casi $\lambda = 1, 2, 3$ si trattano in modo analogo.

Possiamo ora provare il seguente

TEOREMA 2 (GREEN II). – *Sia D un dominio limitato a frontiera differenziabile di $\boldsymbol{H}$ e sia $f \in C^1(\overline{D})$. Allora se $q_0 \in D$ si ha*

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D} DqG(q-q_0)f(q) - \frac{1}{2\pi^2}\int_D \frac{\partial}{\partial \overline{q}}\big(G(q-q_0)f(q)\big) .$$

DIMOSTRAZIONE. – Per il teorema 1 si ha

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D} G(q-q_0)\, Dqf(q) - \frac{1}{2\pi^2}\int_D G(q-q_0)\frac{\partial f}{\partial \overline{q}}(q) = \\ = \frac{1}{2\pi^2}\left[\int_{\partial D'} G(\eta)\, D\eta g(\eta) - \int_{D'} G(\eta)\frac{\partial g}{\partial \overline{\eta}}(\eta)\right],$$

ove si è posto $\eta = q - q_0$, $g(\eta) = f(q_0 + \eta)$; quest'ultima quantità per il Lemma 1 è uguale a

$$\frac{1}{2\pi^2}\left[\int_{\partial D'} D\eta G(\eta)g(\eta) - \int_{D'}\frac{\partial}{\partial \overline{\eta}}\big(G(\eta)g(\eta)\big)\right] = \\ = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D} DqG(q-q_0)f(q) - \frac{1}{2\pi^2}\int_D \frac{\partial}{\partial \overline{q}}\big(G(q-q_0)f(q)\big) . \qquad \text{q.e.d.}$$

2) Consideriamo ora n funzioni $f_1, \ldots, f_n$ definite su un aperto di $\boldsymbol{H}^n$ a valori in $\boldsymbol{H}$. Quali condizioni dovranno soddisfare le f_h affinchè il sistema

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}_h} = f_h\,, \qquad h = 1, \ldots, n\,,$$

abbia soluzione?

Il teorema che segue risponde a tale domanda nel caso particolare in cui le f_h siano a supporto compatto.

TEOREMA 3. – *Siano* $f_1, \ldots, f_n \in C_0^k(\boldsymbol{H}^n)$.

a) Se $n = 1$, $k \geqslant 1$, *l'equazione* $\partial g/\partial \bar{q} = f_1$ *ha sempre una soluzione* $g \in C^k(\boldsymbol{H})$.

b) Se $n > 1$, $k \geqslant 2$, *il sistema* $\{\partial g/\partial \bar{q}_h = f_h,\ h = 1, \ldots, n\}$ *possiede una soluzione* $g \in C_0^k(\boldsymbol{H}^n)$ *se e solo se:*

$$\int_{\boldsymbol{H}} \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial f_h}{\partial x_\lambda^{(1)}} (q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n) = \int_{\boldsymbol{H}} \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial f_1}{\partial x_\lambda^{(h)}} (q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n)\,, \tag{19}$$

per $h = 1, \ldots, n$, $\forall (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \boldsymbol{H}^n$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia, dapprima, $n = 1$. La funzione g definita da

$$g(q_0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\boldsymbol{H}} G(q - q_0) f_1(q)\,,$$

è di classe C^k su $\boldsymbol{H}$ e soddisfa l'equazione $\partial g/\partial \bar{q} = f_1$.

Infatti

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}_0}(q_0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\boldsymbol{H}} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_0} \big(G(\eta) f_1(q_0 + \eta)\big)\,.$$

Per la regolarità di G, quest'ultima quantità è

$$-\frac{1}{2\pi^2} \int_{\boldsymbol{H}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \big(G(\eta) f_1(q_0 + \eta)\big) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\boldsymbol{H}} \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \big(G(q - q_0) f_1(q)\big) = f_1(q_0)\,,$$

essendo f_1 a supporto compatto (teorema 2); ciò prova a).

Sia ora $n > 1$. Supponiamo che il sistema $\partial g/\partial \bar{q}_h = f_h$ abbia una soluzione $g \in C_0^k(\boldsymbol{H}^n)$.

Proviamo la condizione integrale (19). Per $h = 1$ essa è banale. Sia dunque $1 < h \leqslant n$, $(q_1, \ldots, q_n) \in \boldsymbol{H}^n$. Tenuto conto che G è una funzione regolare si vede facilmente che

$$\sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial f_h}{\partial x_\lambda^{(1)}} (q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \big(G(\eta)\, i_\alpha\, m_\alpha^{(h)}(\eta)\big)\,, \tag{20}$$

ove si è posto

$$m_\alpha^{(h)}(\eta) = \frac{\partial g}{\partial x_\alpha^{(h)}}(q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n).$$

Si ha anche

$$\sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial f_1}{\partial x_\lambda^{(h)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = \sum_{\alpha=0}^{3} i_\alpha G(\eta) \frac{\partial m_\alpha^{(h)}}{\partial \bar{\eta}}(\eta). \tag{21}$$

Per il Lemma 1, essendo le $m_\alpha^{(h)}$ a supporto compatto, si ha

$$\int_H \sum_{\alpha=0}^{3} i_\alpha G(\eta) \frac{\partial m_\alpha^{(h)}}{\partial \bar{\eta}}(\eta) = \int_H \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \big(G(\eta) i_\alpha\, m_\alpha^{(h)}(\eta)\big).$$

Dalle uguaglianze (20) e (21) segue la condizione (19).

Viceversa supponiamo che valga la (19) e sia $g \in C^k(\boldsymbol{H}^n)$ definita da

$$g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_H G(q - q_1) f_1(q, q_2, \ldots, q_n) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_H G(\eta) f_1(q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n).$$

Si ha, per $h = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}_h}(q_1, \ldots, q_n) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_H \frac{\partial}{\partial \bar{q}_h} \big(G(\eta) f_1(q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n)\big) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_H \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial f_1}{\partial x_\lambda^{(h)}}(q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n).$$

Per la (19) quest'ultimo integrale è uguale a

$$-\frac{1}{2\pi^2} \int_H \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial f_h}{\partial x_\lambda^{(1)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_H \frac{\partial}{\partial \bar{q}} \big(G(q - q_1) f_h(q, q_2, \ldots, q_n)\big) = f_h(q_1, \ldots, q_n),$$

(per il teorema 2).

Si ha dunque

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}_h} = f_h, \quad h = 1, \ldots, n.$$

Inoltre g è a supporto compatto su $\boldsymbol{H}^n$.

Sia infatti

$$\{\mathrm{supp}\, f_1\} \subseteq \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |q_i|^2} < R \right\}.$$

Scegliamo $q_2, \ldots, q_n$ in modo che

$$\sqrt{\sum_{i=2}^{n} |q_i|^2} > R \, .$$

È chiaro che $g(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, $\forall q_1 \in \boldsymbol{H}$.

Dunque g è identicamente nulla su un aperto illimitato di $\boldsymbol{H}^n$. Poichè le f_h sono a supporto compatto, g è regolare nel complementare C di un disco compatto di $\boldsymbol{H}^n$. Essendo g ivi armonica, per il principio di identità, g è identicamente nulla su C. È dunque provata la b).

Con ragionamenti nella sostanza identici a quelli che si fanno per le funzioni olomorfe di una variabile complessa (si veda in proposito [9]), si può dimostrare un teorema di tipo Runge per le funzioni regolari di una variabile quaternionica; mediante questo ed il teorema 3 a), si prova un teorema di esistenza di soluzioni g dell'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}} = f \, ,$$

essendo f di classe C^k su un aperto A di $\boldsymbol{H}$. Più precisamente, si possono facilmente provare i teoremi seguenti:

TEOREMA 4 (RUNGE). – *Sia Ω un aperto di $\boldsymbol{H}$ e K un compatto di Ω. Se $\Omega - K$ non ha componenti connesse, relativamente compatte in Ω, ogni funzione regolare in un intorno di K è approssimabile uniformemente su K, con funzioni regolari in Ω.*

TEOREMA 5. – *Sia A un aperto di $\boldsymbol{H}$ e sia $f \in C^k(A)$, $k \geqslant 1$. Esiste allora $g \in C^k(A)$ tale che*

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}} = f$$

su A.

3) In quest'ultima parte del paragrafo dimostreremo un teorema di tipo Hartogs per le funzioni regolari di più variabili quaternioniche.

La nostra dimostrazione si ispirerà a quella classica per le funzioni olomorfe di più variabili complesse ([9]).

Si tenga presente anche il teorema di Ehrenpreis, per sistemi di equazioni differenziali a coefficienti costanti ([3]).

TEOREMA 6 (HARTOGS). – *Sia A un aperto connesso di $\boldsymbol{H}^n$, $n > 1$. Sia K un compatto di A tale che $A - K$ sia connesso. Allora ogni funzione regolare in $A - K$ è restrizione di una funzione regolare su A.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia f regolare in $A - K$. Come si è visto, f è armonica in $A - K$.

Siano poi $\varphi \in C_0^\infty(A)$, a valori reali, tale che $\varphi = 1$ in un intorno di K e $f_0 = (1-\varphi)f$. $f_0 \in C^\infty(A)$, ed è regolare in $A - \{\operatorname{supp} \varphi\}$. Poñiamo poi

$$h_j = \begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial \bar{q}_j} & \text{in } A \\ 0 & \text{in } \boldsymbol{H}^n - A\,, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

$h_j \in C_0^\infty(\boldsymbol{H}^n)$, essendo h_j identicamente nulla su

$$\boldsymbol{H}^n - \{\operatorname{supp} \varphi\}\,.$$

Proviamo che le funzioni $h_1, \ldots, h_n$ verificano le condizioni di compatibilità (19), cioè che le funzioni

$$\boldsymbol{M}_s(q_1, \ldots, q_n) = \int_{\boldsymbol{H}} \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \left[\frac{\partial h_s}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \frac{\partial h_1}{\partial x_\lambda^{(s)}}\right](q_1 + \eta, q_2, \ldots, q_n)\,, \qquad 2 \leqslant s \leqslant n$$

sono identicamente nulle.

Proviamo dapprima che ogni funzione $\boldsymbol{M}_s$ è armonica in $\boldsymbol{H}^n$ e per questo, fissati $q_2, \ldots, q_n \in \boldsymbol{H}$, poniamo

$$A(q_2, \ldots, q_n) = \{q \in \boldsymbol{H}\colon (q, q_2, \ldots, q_n) \in A\}\,,$$

$$B(q_2, \ldots, q_n) = \{q \in \boldsymbol{H}\colon (q, q_2, \ldots, q_n) \in \operatorname{supp} \varphi\}\,.$$

Ovviamente $B(q_2, \ldots, q_n) \subseteq A(q_2, \ldots, q_n)$.

Sia $D(q_2, \ldots, q_n)$ un aperto limitato di $\boldsymbol{H}$, a frontiera differenziabile tale che:

$$B(q_2, \ldots, q_n) \subseteq D(q_2, \ldots, q_n)\,,$$

$$\overline{D(q_2, \ldots, q_n)} \subseteq A(q_2, \ldots, q_n)\,.$$

Indichiamo poi con $D^{q_1}(q_2, \ldots, q_n)$ l'insieme seguente

$$D^{q_1}(q_2, \ldots, q_n) = \{\eta \in \boldsymbol{H}\colon \eta + q_1 \in D(q_2, \ldots, q_n)\}\,.$$

Si ha:

$$\boldsymbol{M}_s(q_1, \ldots, q_n) = \int_{D(q_2, \ldots, q_n)} \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(q - q_1) \left[\frac{\partial h_s}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \frac{\partial h_1}{\partial x_\lambda^{(s)}}\right](q, q_2, \ldots, q_n) =$$

$$= \int_{D^{q_1}(q_2, \ldots, q_n)} \sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \left[\frac{\partial h_s}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \frac{\partial h_1}{\partial x_\lambda^{(s)}}\right](q_1 + \eta, \ldots, q_n)\,.$$

Poichè per $\eta \in D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)$ si ha

$$h_s(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = \frac{\partial f_0}{\partial \overline{q}_s}(q_1 + \eta, \ldots, q_n)\,,$$

si verifica che

$$\sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial h_s}{\partial x_\lambda^{(1)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}}\left(G(\eta) i_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n)\right), \tag{22}$$

per $\eta \in D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)$.

Inoltre

$$\sum_{\lambda=0}^{3} i_\lambda G(\eta) \frac{\partial h_1}{\partial x_\lambda^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = \sum_{\alpha=0}^{3} i_\alpha G(\eta) \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n)\right), \tag{23}$$

sempre per $\eta \in D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)$.

Tenendo presente, oltre alle uguaglianze (22) e (23), anche il Lemma 1, si deduce che

$$\begin{aligned} M_s(q_1, \ldots, q_n) = \int_{\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)} \sum_{\alpha=0}^{3} \Big[D\eta G(\eta) i_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) + \\ - i_\alpha G(\eta)\, D\eta \frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n)\Big] = \int_{\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)} D\eta G(\eta) \frac{\partial f_0}{\partial \overline{q}_s}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) + \\ - \int_{\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)} \sum_{\alpha=0}^{3} i_\alpha G(\eta)\, D\eta \frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = \\ - \int_{\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)} \sum_{\alpha=0}^{3} i_\alpha G(\eta)\, D\eta \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^{(s)}}(q_1 + \eta, \ldots, q_n)\,, \end{aligned}$$

poichè $f = f_0$ su $\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)$, ed f è regolare.

La dipendenza di M_s da $(q_1, \ldots, q_n)$ tramite la varietà di integrazione

$$\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)\,,$$

è solo apparente.

Infatti $D(q_2, \ldots, q_n)$ può essere un qualsiasi aperto limitato a frontiera differenziabile contenente $B(q_2, \ldots, q_n)$ e tale che $\overline{D(q_2, \ldots, q_n)}$ sia contenuto in $A(q_2, \ldots, q_n)$.

È facile dedurre allora che

$$\Delta M_s(q_1, \ldots, q_n) = - \int_{\partial D^{a_1}(q_2, \ldots, q_n)} \sum_{\alpha=0}^{3} i_\alpha G(\eta)\, D\eta \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{(s)}}(\Delta f)(q_1 + \eta, \ldots, q_n) = 0\,,$$

essendo f armonica.

Dunque M_s è armonica in $\boldsymbol{H}^n$. Poichè le h_j sono nulle su $\boldsymbol{H}^n - \{\operatorname{supp}\varphi\}$, M_s è nulla su un aperto non vuoto di $\boldsymbol{H}^n$. Quindi M_s è identicamente nulla su $\boldsymbol{H}^n$.

Per il teorema 3 *b*), esiste allora $g \in C_0^\infty(\boldsymbol{H}^n)$ tale che

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{q}_j} = h_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

Dunque g è regolare su $\boldsymbol{H}^n - \{\operatorname{supp}\varphi\}$. Poichè g è a supporto compatto, dal principio di identità segue che g è identicamente nulla sulla componente connessa illimitata C di $\boldsymbol{H}^n - \{\operatorname{supp}\varphi\}$.

Posto

$$\hat{f} = f_0 - g\,,$$

si ha che $\hat{f}$ è regolare in A, e che $\hat{f}$ coincide con f su $C \cap A$.

Poichè $A - K$ è connesso, ancora per il principio di identità, si ha che $\hat{f}$ coincide con f su $A - K$. $\hat{f}$ è dunque l'estensione cercata di f.

4. – Le formule di Plemelj.

1) In questo paragrafo proveremo la validità, per le funzioni regolari di più variabili quaternioniche, delle formule integrali di tipo Plemelj ([8]).

LEMMA 2. – *Sia $S_\varepsilon(q_0)$ una semisfera di $\boldsymbol{H}^n$, centrata in q_0, di raggio $\varepsilon > 0$. Si ha*

$$\int_{S_\varepsilon(q_0)} \Omega_{q_0} = \tfrac{1}{2}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Si può supporre $q_0 = 0$. Poniamo

$$\Omega = \Omega_0\,, \qquad S_\varepsilon = S_\varepsilon(0)\,.$$

Sia π l'iperpiano reale su cui giace ∂S_ε e sia

$$\pi_\varepsilon = \{|q| \leqslant \varepsilon\} \cap \pi\,.$$

Sia V_ε l'aperto di $\boldsymbol{H}^n$ avente $S_\varepsilon \cup \pi_\varepsilon$ come bordo.

Si ha, per il teorema di Stokes, e per la (1)

$$\int_{S_\varepsilon} \Omega = \frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \theta_1 \wedge \ldots \wedge Dq_i \wedge \ldots \wedge \theta_n =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \cdot 4n \cdot \operatorname{vol}(V_\varepsilon) - \frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \int_{\pi_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \theta_1 \wedge \ldots \wedge Dq_i \wedge \ldots \wedge \theta_n =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(2n-1)!}{2\pi^{2n}\varepsilon^{4n}} \int_{\pi_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \theta_1 \wedge \ldots \wedge Dq_i \wedge \ldots \wedge \theta_n\,.$$

Il Lemma sarà dimostrato quando avremo provato che

$$\int_{\pi_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \theta_1 \wedge \ldots \wedge Dq_i \wedge \ldots \wedge \theta_n = 0 \,.$$

Tenendo conto che π è un iperpiano reale passante per l'origine e prendendo, come coordinate su esso, $(4n-1)$ coordinate di $\boldsymbol{H}^n$ indipendenti su π, si osserva che tale integrale è esprimibile come combinazione lineare di integrali del tipo

$$\int_U x_\beta^{(h)} \,,$$

essendo le $x_\beta^{(h)}$ le coordinate di $\boldsymbol{H}^n$ indipendenti su π, ed U la parte interna di un ellissoide di $\boldsymbol{R}^{4n-1}$, centrato nell'origine. Questi ultimi integrali sono evidentemente tutti nulli, e dunque è nullo anche

$$\int_{\pi_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i \theta_1 \wedge \ldots \wedge Dq_i \wedge \ldots \wedge \theta_n \,. \qquad \text{q.e.d.}$$

2) Consideriamo ora un dominio limitato D di $\boldsymbol{H}^n$, avente come bordo una ipersuperficie di Jordan di classe C^1.

Sia $f\colon \partial D \to \boldsymbol{H}$ una funzione di classe C^1 e $q_0 \in \partial D$. Posto

$$B_\varepsilon(q_0) = \{q \in \boldsymbol{H}^n \colon |q - q_0| \leqslant \varepsilon\} \,,$$

definiamo il *valore principale secondo Cauchy* degli integrali

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q) \quad \text{e} \quad \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) \,,$$

nel modo seguente:

$$\text{V.P.} \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D - \partial D \cap B_\varepsilon(q_0)} \Omega_{q_0}(q) f(q) \,,$$

$$\text{V.P.} \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D - \partial D \cap B_\varepsilon(q_0)} \Omega_{q_0}(q) \,,$$

se tali limiti esistono.

Per il teorema di Stokes si ha

$$\int_{\partial D - \partial D \cap B_\varepsilon(q_0)} \Omega_{q_0}(q) - \int_{D \cap \partial B_\varepsilon(q_0)} \Omega_{q_0}(q) = 0 \,,$$

essendo Ω_{q_0} una forma d-chiusa in $\boldsymbol{H}^n - \{q_0\}$.

Quando $\varepsilon \to 0$, per il Lemma 2,

$$\int_{D \cap \partial B_\varepsilon(q_0)} \Omega_{q_0}(q) \to \tfrac{1}{2}\,,$$

dunque

$$\text{V.P.} \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) = \tfrac{1}{2}\,. \tag{24}$$

Poniamo ora per $\xi \notin \partial D$

$$F(\xi) = \int_{\partial D} \Omega_\xi(q) f(q)\,.$$

Siano poi

$$F^+ = F|_D\,, \qquad F^- = F|_{H^n - \bar{D}}\,.$$

Si ha, per la (7) e la (8):

$$F^+(\xi) = \int_{\partial D} \Omega_\xi(q)[f(q) - f(q_0)] + f(q_0)\,,$$

$$F^-(\xi) = \int_{\partial D} \Omega_\xi(q)[f(q) - f(q_0)]\,.$$

Poichè f è di classe C^1, esiste finito

$$\int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q)[f(q) - f(q_0)]\,, \qquad q_0 \in \partial D\,,$$

e dunque, se $q_0 \in \partial D$, si prova facilmente che si ha

$$\lim_{\xi \to q_0} F^+(\xi) = f(q_0) + \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q)[f(q) - f(q_0)]\,,$$

$$\lim_{\xi \to q_0} F^-(\xi) = \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q)[f(q) - f(q_0)]\,.$$

Per la (24) si ha anche

$$\lim_{\xi \to q_0} F^+(\xi) = f(q_0)/2 + \text{V.P.} \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q)\,,$$

$$\lim_{\xi \to q_0} F^-(\xi) = -\, f(q_0)/2 + \text{V.P.} \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q)\,.$$

In particolare F^+ ed F^- si possono estendere per continuità su ∂D, e

$$F^+ - F^- = f .$$

Le formule trovate prendono il nome di *formule di Plemelj*. Esse valgono anche in ambito più generale. Infatti sia U un aperto di $\boldsymbol{H}^n$ e sia M una ipersuperficie di classe C^1, orientata, contenuta in U tale che $U - M$ abbia due componenti connesse U^+ e U^- di cui M sia bordo.

Sia U^+ la componente connessa verso cui è rivolto il versore normale di M. Sia poi $f \in C_0^1(M)$ a valori in $\boldsymbol{H}$ e siano

$$F^+(\xi) = \int_M \Omega_\xi(q) f(q) \quad \text{per } \xi \in U^+ ,$$

$$F^-(\xi) = \int_M \Omega_\xi(q) f(q) \quad \text{per } \xi \in U^- .$$

TEOREMA 7. – *F^+ ed F^- possono estendersi per continuità su $U^+ \cup M$ e su $U^- \cup M$ rispettivamente. Le loro estensioni (indicate ancora con F^+ ed F^-) verificano su M le uguaglianze seguenti*

$$F^+(q_0) = f(q_0)/2 + \text{V.P.} \int_M \Omega_{q_0}(q) f(q) = f(q_0) + \int_M \Omega_{q_0}(q)[f(q) - f(q_0)] , \tag{25}$$

$$F^-(q_0) = - f(q_0)/2 + \text{V.P.} \int_M \Omega_{q_0}(q) f(q) = \int_M \Omega_{q_0}(q)[f(q) - f(q_0)] , \qquad \forall q_0 \in M . \tag{25$'$}$$

La dimostrazione si fa considerando, in luogo di M, una qualsiasi ipersuperficie di Jordan $\overline{M}$ che contiene il supporto di f, estendendo f con O su $\overline{M} - \{\operatorname{supp} f\}$ ed applicando le formule di Plemelj ricavate per le ipersuperficie di Jordan.

Osserviamo che, se $n = 1$, F^+ ed F^- sono funzioni regolari in U^+ ed U^- rispettivamente.

Con metodo sostanzialmente analogo a quello usato da HARVEY e LAWSON per dimostrare il corrispondente teorema per la variabile complessa ([8]), anche se con qualche piccola difficoltà tecnica supplementare, si può dimostrare il seguente

LEMMA 3. – *Siano U, M, U^+, U^- come nella premessa al teorema 7. Sia $f \in C_0^0(M)$ a valori in $\boldsymbol{H}$ e siano*

$$F^+(\xi) = \int_M \Omega_\xi(q) f(q) \quad \textit{per } \xi \in U^+ ,$$

$$F^-(\xi) = \int_M \Omega_\xi(q) f(q) \quad \textit{per } \xi \in U^- .$$

Se F^- puó estendersi per continuità su $U^- \cup M$, anche F^+ ha una estensione continua su $U^+ \cup M$, e su M si ha $F^+ - F^- = f$.

5. – Tracce di funzioni regolari.

1) Nel § 2 abbiamo visto che le tracce di funzioni regolari di più variabili quaternioniche soddisfano condizioni in forma integrale che abbiamo chiamato condizioni di Cauchy-Riemann-Fueter. Introdurremo ora altre condizioni necessarie, esprimibili in forma differenziale.

Premettiamo alcuni richiami di natura algebrica.

Consideriamo un sottospazio reale m-dimensionale V di $\boldsymbol{H}^n$.

Indichiamo con IV, JV, KV l'immagine di V mediante la moltiplicazione sinistra per i, j, k rispettivamente, e con VI, VJ, VK l'immagine di V mediante la moltiplicazione destra per le tre unità immaginarie di $\boldsymbol{H}$.

Poniamo

$$V_H^l = V \cap IV \cap JV \cap KV\,,$$

$$V_H^r = V \cap VI \cap VJ \cap VK\,.$$

$V_H^l(V_H^r)$ è il più grande sottospazio vettoriale sinistro (risp. destro) di $\boldsymbol{H}^n$, contenuto in V.

Si vede facilmente che

$$\max(0, m-3n) \leqslant \dim_H V_H^l\,, \qquad \dim_H V_H^r \leqslant \frac{m}{4}\,. \tag{26}$$

In particolare se $m = 4n-1$ si deduce che

$$\dim_H V_H^l = \dim_H V_H^r = n-1\,. \tag{26$'$}$$

Consideriamo ora una sottovarietà reale di classe C^∞ m-dimensionale S di $\boldsymbol{H}^n$. Sia p un punto di S. Lo spazio tangente $T_p(S)$ è un sottospazio reale m-dimensionale di $\boldsymbol{H}^n$.

$[T_p(S)]_H^l$ si chiama il *CRF-spazio tangente sinistro* ad S in p, e verrà indicato con ${}^lT_p^H(S)$.

Analogamente $[T_p(S)]_H^r = {}^rT_p^H(S)$ si chiama il *CRF-spazio tangente destro* ad S in p. (CRF sta per Cauchy-Riemann-Fueter.)

Si dice poi che S è una *CRF-sottovarietà sinistra* (*destra*) di $\boldsymbol{H}^n$ se la dimensione su $\boldsymbol{H}$ di ${}^lT_p^H(S)$ (risp. ${}^rT_p^H(S)$) è costante al variare di p in S.

Tale dimensione si chiama la *CRF-dimensione sinistra* (risp. *destra*) di S.

Per la (26) si ha che la CRF-dimensione di S è sempre compresa fra max (0, $m-3n$) ed $m/4$.

Inoltre, per la (26)$'$, ogni ipersuperficie di $\boldsymbol{H}^n$ è una CRF-sottovarietà destra e sinistra di $\boldsymbol{H}^n$ avente CRF-dimensione uguale ad $n-1$.

ESEMPIO 1. – Siano $f_1, \ldots, f_{4n-m}$ funzioni di classe C^∞ a valori reali definite su un aperto di $\boldsymbol{H}^n = \boldsymbol{R}^{4n}$.

Posto $S = \{f_1 = \ldots = f_{4n-m} = 0\}$, supponiamo che $df_1 \wedge \ldots \wedge df_{4n-m}$ sia diverso da zero su S.

S è allora una sottovarietà reale di $\boldsymbol{H}^n$ di dimensione m. Si verifica che, per ogni punto p di S, si ha

$$ {}^rT_p^{\boldsymbol{H}}(S) = \left\{(u_1, \ldots, u_n) \in \boldsymbol{H}^n : \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial q_h}(p) \cdot u_h = 0, \ j = 1, \ldots, 4n - m\right\}, $$
$$ {}^lT_p^{\boldsymbol{H}}(S) = \left\{(u_1, \ldots, u_n) \in \boldsymbol{H}^n : \sum_{h=1}^{n} u_h \cdot \frac{\partial f_j}{\partial q_h}(p) = 0, \ j = 1, \ldots, 4n - m\right\}. $$

D'ora in poi, se $\xi \in \boldsymbol{H}^n$, indicheremo con $I\xi$ (ξI) il vettore di $\boldsymbol{H}^n$ ottenuto moltiplicando ξ a sinistra (risp. a destra) per i. Analogo significato avranno le espressioni $J\xi$, ξJ, $K\xi$, ξK.

Consideriamo ora una CRF-sottovarietà destra S di $\boldsymbol{H}^n$ di CRF-dimensione r. Siano $\xi_1, \ldots, \xi_r$ campi vettoriali definiti su un aperto U di S, che in ogni punto di U generano il CRF-spazio tangente destro ad S, come sottospazio vettoriale destro di $\boldsymbol{H}^n$. Poniamo

$$ \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_h} = \xi_h + i(\xi_h I) + j(\xi_h J) + k(\xi_h K), \qquad h = 1, \ldots, r. $$

Una funzione $f\colon U \to \boldsymbol{H}$ si dice una *CRF-funzione sinistra su* U se $\partial f/\partial \bar{\xi}_h = 0$, $h = 1, \ldots, r$.

È facile verificare che la definizione è ben posta, cioè indipendente dai campi ξ_h.

Una funzione $f\colon S \to \boldsymbol{H}$ si dice una *CRF-funzione sinistra su* S, se lo è in un intorno di ogni punto di S. In tal caso diremo anche che f soddisfa le *condizioni di Cauchy-Riemann-Fueter in forma differenziale*.

In modo analogo si definiscono le CRF-funzioni destre sulle CRF-sottovarietà sinistre di $\boldsymbol{H}^n$.

Si prova facilmente che se F è una funzione regolare su un aperto U di $\boldsymbol{H}^n$ e se S è una CRF-sottovarietà destra contenuta in U, allora $F|_S$ è una CRF-funzione sinistra su S.

ESEMPIO 2. – Sia S il grafico di una funzione differenziabile φ di $4n-1$ variabili reali. Cioè

$$ S = \{x_3^{(n)} = \varphi(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\}. $$

Si verifica che $f\colon S \to \boldsymbol{H}$ è una CRF-funzione sinistra su S se e solo se

$$ \frac{\partial f}{\partial \bar{q}_h} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{q}_h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0^{(n)}} + i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_1^{(n)}} + j\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_2^{(n)}} - k\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0^{(n)}} + i\,\frac{\partial f}{\partial x_1^{(n)}} + j\,\frac{\partial f}{\partial x_2^{(n)}}\right), $$

per $h = 1, \ldots, n-1$.

2) Se $n = 1$, perdono di significato sia le condizioni di Cauchy-Riemann-Fueter in forma differenziale sia quelle in forma integrale. Vale allora il seguente

TEOREMA 8. – *Sia S una ipersuperficie analitica di $\boldsymbol{H}$ e sia $f: S \to \boldsymbol{H}$, analitica. Esiste una unica funzione regolare F definita in un intorno di S tale che $F|_S = f$.*

DIMOSTRAZIONE. – Si può supporre S orientabile. Poichè ogni funzione regolare è armonica, dalla (4) e dal teorema di Cauchy-Kowalewski si deduce l'unicità dell'estensione regolare.

Sia ora F la funzione armonica definita intorno ad S, che coincide con f su S e la cui derivata normale su S verifica l'uguaglianza (4) (teorema di Cauchy-Kowalewski).

Poichè F verifica la (4) su S, per la (3) si deduce che $\bar{N}(\partial F/\partial \bar{q})|_S = 0$, essendo N il versore normale ad S. Di conseguenza $(\partial F/\partial \bar{q})|_S = 0$.

Poichè F è armonica, $\partial F/\partial \bar{q}$ è una funzione antiregolare (a sinistra), nulla su S.

Per la (4)′ e per il teorema di Cauchy-Kowalewski si deduce allora che

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{q}} = 0 . \qquad \text{q.e.d.}$$

Consideriamo ora una funzione f regolare su un aperto A di $\boldsymbol{H}$, ed un dominio D a frontiera differenziabile, relativamente compatto in A.

Per la (18) si ha

$$\int_{\partial D} g\, Dqf = 0 , \tag{27}$$

qualunque sia g regolare a destra in un intorno di $\bar{D}$.

In [18] SUDBERY ha introdotto dei polinomi omogenei P_ν regolari a sinistra ed a destra in $\boldsymbol{H}$, i quali nella teoria delle funzioni regolari su $\boldsymbol{H}$, hanno il ruolo dei polinomi z^m della teoria delle funzioni olomorfe su $\boldsymbol{C}$.

Poichè tali polinomi sono regolari a destra, per la (27) si deduce che

$$\int_{\partial D} P_\nu\, Dqf = 0 , \qquad \forall \nu , \tag{27$'$}$$

dove f è una funzione regolare su un aperto A di $\boldsymbol{H}$, e D è un dominio a frontiera differenziabile relativamente compatto in A.

I polinomi P_ν sono così definiti:

se m è un intero $\geqslant 0$, indichiamo con σ_m l'insieme delle terne di interi maggiori o uguali a zero $\nu = [m_1, m_2, m_3]$, tali che $m_1 + m_2 + m_3 = m$.

Per ogni $\nu = [m_1, m_2, m_3] \in \sigma_m$, definiamo poi

$$P_\nu(q) = \frac{1}{m!} \sum (x_0 i_{\lambda_1} - x_{\lambda_1}) \dots (x_0 i_{\lambda_m} - x_{\lambda_m}) ,$$

dove $q = \sum_{\lambda=0}^{3} x_\lambda i_\lambda$, e dove la somma è estesa a tutte le m-ple $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tali che $1 \leqslant \lambda_1, \dots, \lambda_m \leqslant 3$ e tali che il numero dei λ_j uguali ad h sia esattamente m_h $(h = 1, 2, 3)$.

Posto,

$$\nu = [m_1, m_2, m_3] \in \sigma_m$$

e

$$G_\nu = \frac{\partial^m G}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3}} ,$$

dove G è il nucleo di Cauchy-Fueter, SUDBERY ha provato in [18] che se $|q| < |p|$ si ha

$$G(p - q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\nu \in \sigma_m} G_\nu(p) P_\nu(q) , \tag{28}$$

e la serie converge uniformemente nella regione $\{q\colon |q| \leqslant r|p|\}$, dove r è un qualsiasi numero reale minore di 1.

3) Possiamo ora dimostrare un teorema di traccia, simile, nella forma, a ben noti teoremi di Analisi Complessa.

(A questo proposito si veda [4] per il caso $n = 1$, e [11] per il caso $n > 1$).

TEOREMA 9. – *Sia D un aperto limitato di $\boldsymbol{H}^n$ avente come bordo una ipersuperficie di Jordan di classe C^1. Sia $f\colon \partial D \to \boldsymbol{H}$ continua, verificante le ipotesi seguenti:*

$$\int_{\partial D} P_\nu(q)\, Dq f(q) = 0 , \qquad \forall \nu \in \sigma_m,\ \forall m \geqslant 0 , \qquad se\ n = 1 ;$$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \Omega_{q_0}}{\partial \bar{q}_h^0} \cdot f = 0 , \qquad \forall h = 1, \dots, n,\ \forall q_0 \notin \partial D , \quad se\ n > 1 ;$$

(condizione integrale di Cauchy-Riemann-Fueter in forma debole).

a) Esiste allora $F\colon \bar{D} \to \boldsymbol{H}$, regolare in D, continua in $\bar{D}$ e tale che $F|_{\partial D} = f$. Se $q_0 \in D$ si ha

$$F(q_0) = \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q) .$$

b) Se, inoltre, ∂D è una ipersuperficie analitica ed f è una funzione analitica, la funzione F è estendibile, come funzione regolare, in un intorno di $\bar{D}$.

DIMOSTRAZIONE. – Poniamo, per $q_0 \notin \partial D$,

$$F(q_0) = \int_{\partial D} \Omega_{q_0}(q) f(q)\,.$$

Siano poi $F^+ = F|_D$, $F^- = F|_{H^n - \bar{D}}$.

Sia $n = 1$. Allora F^+ ed F^- sono funzioni regolari. Proviamo che F^- è identicamente nulla.

Sia $r > 0$ tale che $\bar{D} \subseteq \{q \in \boldsymbol{H}\colon |q| < r\}$.

Sia poi $\acute{q} \in \boldsymbol{H}$, $|\acute{q}| > r$. Per la (28) si ha

$$F^-(\acute{q}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D} G(q - \acute{q})\, Dqf(q) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial D} G(\acute{q} - q)\, Dqf(q) = -\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{\nu\in\sigma_m} G_\nu(\acute{q})\int_{\partial D} P_\nu(q)\, Dqf(q) = 0\,,$$

in virtù dell'ipotesi del teorema.

Dunque F^- è identicamente nulla su $\{\acute{q} \in \boldsymbol{H}\colon |\acute{q}| > r\}$.

Per il principio di identità F^- è identicamente nulla su $\boldsymbol{H}^n - \bar{D}$. Per il Lemma 3, si deduce allora che F^+ ha una estensione continua su $\bar{D}$ e che $F^+|_{\partial D} = f$.

Sia ora $n > 1$. Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{q}_h^0} = \int_{\partial D} \frac{\partial \Omega_{q_0}}{\partial \bar{q}_h^0} f = 0\,, \qquad \text{per ipotesi}\,.$$

Dunque F^+ ed F^- sono funzioni regolari.

Per il teorema di Hartogs, F^- è estendibile ad una funzione regolare su tutto $\boldsymbol{H}^n$, che verrà indicata ancora con F^-.

Per il Lemma 3, F^+ è estendibile per continuità su $\bar{D}$ e si ha

$$F^+|_{\partial D} - F^-|_{\partial D} = f\,.$$

Proviamo ora che F^- è identicamente nulla su $\boldsymbol{H}^n$. F^-, essendo regolare, è anche armonica. Si ha inoltre

$$\lim_{q_0\to\infty} F^-(q_0) = 0\,. \tag{29}$$

Infatti se un punto q_0 di $\boldsymbol{H}^n$ ha distanza $\geqslant M$ da ∂D si ha

$$|F^-(q_0)| \leqslant \frac{C}{M^{4n-1}}\,,$$

e dunque vale la (29). Per il teorema di Liouville si deduce quindi che $F^- = 0$ su $\boldsymbol{H}^n$. Perciò $F^+|_{\partial D} = f$. È provata allora la a).

Se ∂D ed f sono analitiche, in virtù di un noto teorema sulle funzioni armoniche ([12]), si ha che F è estendibile intorno a $\bar{D}$, come funzione armonica.

Poichè F è regolare in D, l'estensione è regolare intorno a $\bar{D}$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. BRACKX - R. DELANGHE - F. SOMMEN, *Clifford analysis*, Pitman's Research Notes in Math., vol. 76 (1982).

[2] C. A. DEAVOURS, *The quaternion calculus*, Amer. Math. Monthly, **80** (1973), pp. 995-1008.

[3] L. EHRENPREIS, *A new proof and an extension of Hartog's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961), pp. 507-509.

[4] G. FICHERA - L. DE VITO, *Funzioni analitiche di una variabile complessa*, Univ. degli Studi di Roma.

[5] R. FUETER, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv., **7** (1935), pp. 307-330.

[6] R. FUETER, *Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*, Comment. Math. Helv., **8** (1936), pp. 371-378.

[7] H. HAEFELI, *Hyperkomplexe Differentiale*, Comment. Math. Helv., **20** (1947), pp. 382-420.

[8] F. R. HARVEY - H. B. LAWSON, JR., *On boundaries of complex analytic varieties, I*, Ann. of Math., **102** (1975), pp. 223-290.

[9] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966.

[10] E. MARTINELLI, *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, Memorie Accad. d'Italia, **9** (1938), pp. 269-283.

[11] E. MARTINELLI, *Sulla determinazione di una funzione analitica di più variabili complesse in un campo, assegnatane la traccia sulla frontiera*, Ann. Mat. Pura Appl., **55** (1961), pp. 191-202.

[12] C. B. MORREY, JR. - L. NIRENBERG, *On the Analyticity of the Solutions of Linear Elliptic Systems of Partial Differential Equations*, Comm. on Pure and Applied Math., **10** (1957), pp. 271-290.

[13] G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, Comm. Pontificia Academia Scientiarum, vol. XIV (1950), pp. 169-194.

[14] G. B. RIZZA, *Funzioni regolari nelle algebre di Clifford*, Rend. di Mat., vol. XV (1956), pp. 1-27.

[15] S. M. SALAMON, *Quaternionic manifolds*, Symp. Math., **26** (1982), pp. 139-151.

[16] S. M. SALAMON, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math., **67** (1982), pp. 143-171.

[17] V. SOUCEK, *Holomorphicity in Quaternionic Analysis*, Seminari di Geometria 1982-1983, Bologna, 1984.

[18] A. SUDBERY, *Quaternionic analysis*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **85** (1979), pp. 199-225.