

## Points cônes du mouvement brownien plan, le cas critique

J.F. Le Gall et T. Meyre

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Reçu le 8 août 1991; version révisée reçu le 19 décembre 1991

**Summary.** Let  $B=(B_t, t \geq 0)$  be a planar Brownian motion and let  $\alpha > 0$ . For any  $t \geq 0$ , the point  $z=B_t$  is called a one-sided cone point with angle  $\alpha$  if there exist  $\varepsilon > 0$  and a wedge  $W(\alpha, z)$  with vertex  $z$  and angle  $\alpha$  such that  $B_s \in W(\alpha, z)$  for every  $s \in [t, t + \varepsilon]$ . Burdzy and Shimura have shown independently that one-sided cone points with angle  $\alpha$  exist when  $\alpha > \pi/2$  but not when  $\alpha < \pi/2$ . The present paper deals with the critical case  $\alpha = \pi/2$ . We show that cone points with angle  $\pi/2$  do not exist.

### 1 Introduction

On sait depuis longtemps que la trajectoire d'un mouvement brownien complexe  $B=(B_t, t \geq 0)$  fait sur tout intervalle  $]0, \varepsilon[$ ,  $\varepsilon > 0$ , une infinité de tours autour de son point de départ. La propriété de Markov et un argument de retournement du temps entraînent que pour tout  $t > 0$ , p.s. la trajectoire de  $B$  fait sur tout intervalle  $]t, t + \varepsilon[$  ou  $]t - \varepsilon, t[$  une infinité de tours autour de point  $B_t$ . Il existe cependant des instants exceptionnels  $t$  pour lesquels la propriété précédente n'est pas vérifiée. Burdzy [1] et Shimura [8] ont établi indépendamment que, pour tout  $\alpha \in ]\pi/2, 2\pi[$ , on peut p.s. trouver un instant  $t > 0$  et un réel  $\varepsilon > 0$  tels que l'ensemble  $\{B_u, t \leq u \leq t + \varepsilon\}$  soit contenu dans un cône fermé de sommet  $B_t$  d'ouverture  $\alpha$ . Si cette propriété est satisfaite, ou bien si la même propriété l'est pour l'ensemble  $\{B_u, t - \varepsilon \leq u \leq t\}$  on dit que  $B_t$  est un point cône unilatère d'angle  $\alpha$ . On peut aussi donner un sens à cette notion lorsque  $\alpha \geq 2\pi$ : voir Le Gall [6]. Evans [4] (voir aussi Le Gall [6]) a établi que la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points cônes unilatères d'angle  $\alpha$  est  $2 - \pi/\alpha$ .

Lorsque  $\alpha < \pi/2$ , on montre assez facilement qu'il n'existe pas de point cône unilatère d'angle  $\alpha$ . On commence par traiter le cas où la direction du cône est fixée en posant, par exemple,

$$C_\alpha = \left\{ z = r e^{i\theta}; r \geq 0, |\theta| \leq \frac{\alpha}{2} \right\}$$

et en définissant

$$H_\alpha = \{t > 0; \forall s \leq t, B_t - B_s \in C_\alpha\}$$

(la trajectoire de  $B$  sur  $[0, t]$  reste dans le cône  $B_t - C_\alpha$ ). On montre (voir par exemple [7, Chapt. IV]) que  $H_\alpha$  est p.s. vide dès que  $\alpha \leq \pi/2$  (il suffit bien sûr de traiter le cas  $\alpha = \pi/2$ ). Des arguments simples permettent d'en déduire qu'il n'existe pas de point cône unilatère d'angle  $\alpha < \pi/2$ .

Le résultat précédent, à direction de cône fixée, n'est pas suffisant pour conclure dans le cas critique  $\alpha = \pi/2$ . Le problème vient de ce qu'il existe une infinité non dénombrable de directions possibles pour le cône. Le but du présent travail est de traiter ce cas critique.

**Théorème 1** *Il n'existe p.s. pas de point cône unilatère d'angle  $\pi/2$ .*

Introduisons quelques notations afin d'expliquer brièvement les idées de la preuve du théorème 1. Pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$  on note  $C_{\pi/2}^\gamma$  le cône

$$C_{\pi/2}^\gamma = e^{i\gamma} C_{\pi/2} = \left\{ z = r e^{i(\gamma + \theta)}, r \geq 0, |\theta| \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

puis

$$A_{\pi/2} = \{z \in \mathbb{R}^2; \exists t > 0, \gamma \in \mathbb{R}: z = B_t \text{ et } \forall s \leq t, B_t - B_s \in C_{\pi/2}^\gamma\}.$$

Nous montrons dans ce travail que

$$A_{\pi/2} = \emptyset, \text{ p.s.}$$

En appliquant ce résultat aux mouvements browniens  $(B_{p+t} - B_p, t \geq 0)$  et  $(B_{p-t} - B_p, 0 \leq t \leq p)$ , pour  $p$  rationnel strictement positif, on obtient immédiatement le théorème 1.

Pour montrer que  $A_{\pi/2}$  est vide p.s. nous raisonnons par l'absurde en supposant  $A_{\pi/2}$  non vide et en étudiant alors le comportement du mouvement brownien avant d'atteindre un point de  $A_{\pi/2}$ . Sans perte de généralité on peut supposer  $B_0 = 0$ . Pour tous  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $\varepsilon \geq 0$ , on note:

$$T_\varepsilon(z) = \inf \{t \geq 0, |B_t - z| \leq \varepsilon\}$$

et  $(\theta_t^z)_{t \geq 0}$  la détermination continue de l'argument de  $(z - B_t)/z$  qui vaut 0 en  $t = 0$ . Le processus  $(\theta_t^z)$  est défini sur l'intervalle  $[0, T_0(z)[$  (évidemment  $T_0(z) = +\infty$  p.s. pour  $z$  fixé, mais nous aurons aussi à considérer le cas où  $z$  est un point de la courbe brownienne). On note aussi:

$$\hat{\theta}_t^z = \sup_{s \leq t} \theta_s^z, \quad \check{\theta}_t^z = \inf_{s \leq t} \theta_s^z.$$

La partie 1 du présent travail est consacrée à des estimations préliminaires concernant la loi du couple

$$(\hat{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z, \check{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z).$$

Nous déduisons de ces estimations qu'on peut choisir une suite  $(\varepsilon_n)$  décroissant suffisamment vite vers 0 et un réel  $u > 0$  de façon que l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \exists n_0, \forall n \geq n_0, \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \varepsilon_n|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}(z)}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}(z)}^z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

soit p.s. vide. Il en découle que si  $z \in \Delta_{\pi/2}$  il existe une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles

$$\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}(z)}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}(z)}^z < \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \varepsilon_n|}.$$

Autrement dit, au moment où il s'approche à  $\varepsilon_n$  près de  $z$  le mouvement brownien est resté non seulement dans un cône de sommet  $z$  d'angle  $\pi/2$ , mais dans un cône de même sommet d'ouverture sensiblement plus petite.

Dans une deuxième partie nous utilisons la notion de point cône  $\varepsilon$ -approché. On dit que  $z$  est point cône  $\varepsilon$ -approché (d'angle  $\pi/2$ ) s'il existe un cône de sommet  $z$  d'ouverture  $\pi/2$  qui contient  $\{B_s, s \leq T_\varepsilon(z)\}$ . A l'aide des résultats de la partie 1, nous montrons que près d'un point  $z$  de  $\Delta_{\pi/2}$  il doit exister « beaucoup » de points cônes  $\varepsilon$ -approchés, au moins pour certaines valeurs de  $\varepsilon$ . Ceci vient contredire des estimations a priori sur la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points cônes  $\varepsilon$ -approchés, et complète la preuve du théorème 1.

Le schéma de démonstration décrit ci-dessus est assez compliqué, en regard de la simplicité de la preuve connue dans le cas où la direction du cône est fixée. Nous espérons que les techniques développées dans le présent travail pourront être appliquées à des problèmes voisins, comme ceux étudiés par Burdzy [3]. Une question intéressante (voir les travaux récents de Burdzy [2] et Shimura [9, 10]) est celle de l'existence d'instantants  $t \in ]0, 1[$  tels que  $\{B_s, 0 \leq s \leq 1, s \neq t\}$  ait deux composantes connexes situées de part et d'autre d'une droite passant par  $B_t$ . Là encore, si l'on fixe la direction de la droite en question, il n'existe pas de tels instants: c'est une conséquence du théorème de Dvoretzky, Erdős et Kakutani sur la non-existence de points de croissance du mouvement brownien linéaire. Le problème général reste ouvert.

## 2 Estimations préliminaires

Nous reprenons les notations introduites dans l'introduction. Nous commençons par établir trois lemmes concernant la loi du couple

$$(\hat{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z, \check{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z),$$

qui nous permettront ensuite de montrer que l'ensemble  $E$  de l'introduction est p.s. vide. Ces trois lemmes ont pour point de départ le résultat classique suivant (voir par exemple Feller [5, p. 342]). Si  $(W_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien linéaire issu de 0, et si  $a < 0 < b$  alors pour tout  $t > 0$ ,

$$(1) \quad P[\forall s \leq t, a \leq W_s \leq b] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi b}{b-a}\right) \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 t}{2(b-a)^2}\right).$$

Pour  $z \neq 0$  fixé, la décomposition en produit semi-direct du mouvement brownien  $z - B_t$  donne

$$z - B_t = z \exp(\beta_{H_t} + i \omega_{H_t})$$

où  $\beta$  et  $\omega$  sont deux mouvements browniens linéaires indépendants issus de 0, et

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{|z - B_s|^2}.$$

Pour  $\varepsilon \in ]0, |z|[$  on a

$$H_{T_\varepsilon(z)} = \tau \left( \log \frac{\varepsilon}{|z|} \right) := \inf \left\{ s; \beta_s = \log \frac{\varepsilon}{|z|} \right\},$$

et

$$\hat{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z = \sup_{s \leq \tau \left( \log \frac{\varepsilon}{|z|} \right)} \omega_s, \quad \check{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z = \inf_{s \leq \tau \left( \log \frac{\varepsilon}{|z|} \right)} \omega_s.$$

En appliquant la formule (1) à  $W = \omega$  on obtient donc

$$\begin{aligned} &P[a \leq \check{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z \leq b] \\ &= E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi b}{b-a} \right) \exp \left( -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{2(b-a)^2} \tau \left( \log \frac{\varepsilon}{|z|} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule bien connue: pour  $\lambda > 0$ ,

$$E[\exp(-\lambda \tau(a))] = \exp(-|a| \sqrt{2\lambda})$$

et on arrive au lemme suivant où, pour alléger la notation, on écrit  $\hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z$  à la place de  $\hat{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z$ , resp.  $\check{\theta}_{T_\varepsilon}^z$  à la place de  $\check{\theta}_{T_\varepsilon(z)}^z$  (cette notation sera utilisée constamment dans la suite).

**Lemme 2** Pour tous  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\varepsilon \in ]0, |z|[$  et  $a < 0 < b$ ,

$$(2) \quad P[a \leq \check{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi b}{b-a} \right) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{b-a}}.$$

De plus, la loi de  $\hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \check{\theta}_{T_\varepsilon}^z$  a pour densité sur  $\mathbb{R}_+$

$$f_{z,\varepsilon}(x) = \frac{4 \log^2(|z|/\varepsilon)}{x^3 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi}{x} \log \frac{|z|}{\varepsilon} \right)}.$$

*Remarque.* Nous utilisons la notation française  $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .

**Démonstration.** La première formule découle des arguments précédant l'énoncé du lemme. Ensuite, soit  $g(a, b)$  la densité de la loi du couple

$$(\tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z, \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z).$$

Alors,

$$\begin{aligned} P[\hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z < x] &= \int_0^x db \int_{b-x}^0 da g(a, b) \\ &= 4 \sum_{k=0}^\infty \left( \int_0^x db \left( -(b-x) \cos \frac{(2k+1)\pi b}{x} + \left( \log \frac{|z|}{\varepsilon} \right) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi b}{x} \right) \frac{1}{x^2} \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{x}} \right. \\ &= 8 \sum_{k=0}^\infty \left( \frac{1}{(2k+1)^2 \pi^2} + \frac{1}{(2k+1)\pi x} \log \frac{|z|}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{x}}. \end{aligned}$$

Ensuite, en dérivant par rapport à  $x$ , on trouve

$$f_{z,\varepsilon}(x) = \frac{8}{x^3} \log^2 \left( \frac{|z|}{\varepsilon} \right) \sum_{k=0}^\infty \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{x}} = \frac{4 \log^2(|z|/\varepsilon)}{x^3 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi}{x} \log \frac{|z|}{\varepsilon} \right)}. \quad \square$$

Si on suppose  $|z| \geq 2\varepsilon$ , la fonction  $f_{z,\varepsilon}$  est bornée par une constante indépendante de  $z$  et  $\varepsilon$ . Cette remarque nous sera utile plus tard.

Nous cherchons maintenant à estimer des probabilités de la forme

$$P[a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b, \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq c],$$

où  $a < 0 < b$  et  $0 < c < b - a$ . Avec les notations de la preuve précédente, on a d'abord

$$\begin{aligned} P[a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b, \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq c] \\ = P[a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq (a+c)_+] + \int_{(a+c)_+}^{b \wedge c} dy \int_{y-c}^0 dx g(x, y). \end{aligned}$$

D'une part, le lemme 2 entraîne

$$P[a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq (a+c)_+] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+1} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi(a+c)_+}{c} \right) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{c}}.$$

D'autre part, en utilisant à nouveau le lemme 2 on a pour  $a < 0$  et  $y > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^0 dx g(x, y) &= 4 \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(y-a)^2} \left( -a \cos \left( \frac{(2k+1)\pi y}{y-a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \left( \frac{(2k+1)\pi y}{y-a} \right) \log \frac{|z|}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{y-a}}. \end{aligned}$$

On prend  $a = y - c$  puis on intègre par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $[(a + c)_+, b \wedge c]$ . On ajoute ensuite le premier terme ci-dessus et on arrive après quelques simplifications à la formule

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & P[a \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b; \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq c] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{\frac{(2k+1)\pi}{c}} \left\{ \frac{4}{(2k+1)\pi c} \left\{ (c+a)_+ \sin \frac{(2k+1)\pi(c+a)_+}{c} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (c-b)_+ \sin \frac{(2k+1)\pi(c-b)_+}{c} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi(c+a)_+}{c} + \cos \frac{(2k+1)\pi(c-b)_+}{c} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( 1 + \frac{(2k+1)\pi}{c} \log \frac{|z|}{\varepsilon} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce travail, on fixe deux constantes  $m \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $M \in ]4, \infty[$ .

**Lemme 3** *Il existe trois constantes  $C_1, C_2 > 0$  et  $\rho \in ]0, \frac{m}{2}]$  telles que, pour tout  $z$  avec  $m \leq |z| \leq M$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, \rho[$  et tous  $a \in [-\pi/2, 0]$ ,  $b \in [0, \pi/2]$  avec  $b - a > \pi/2$ , on ait*

$$\begin{aligned}
 C_1 1_{\left(-\frac{2\pi}{5} \leq a \leq b \leq \frac{2\pi}{5}\right)} \left(b - a - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon^2 |\log \varepsilon| &\leq P[a \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b, \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \pi/2] \\
 &\leq C_2 (1 + (b - a - \pi/2) |\log \varepsilon|) \varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

En particulier, pour  $a = -\pi/2, b = \pi/2$ ,

$$P[\hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \pi/2] \leq C_3 \varepsilon^2 |\log \varepsilon|.$$

*Démonstration.* On prend  $c = \pi/2$  dans la formule (3) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & P[a \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b; \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \pi/2] \\
 &= \Phi(\varepsilon, z, a, b) \varepsilon^2 - \frac{8}{\pi^2} (\cos 2a + \cos 2b) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^2 \log \frac{|z|}{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

où la fonction  $\Phi(\varepsilon, z, a, b)$  est uniformément bornée sur l'ensemble  $\{\varepsilon < |z|/2\}$ . Ensuite, on écrit

$$-(\cos 2a + \cos 2b) = 2 \cos(a + b) \sin \left( b - a - \frac{\pi}{2} \right).$$

L'encadrement du lemme est maintenant facile à obtenir, en remarquant que  $\cos(a + b)$  est minoré par une constante strictement positive sur l'ensemble  $\{-2\pi/5 \leq a \leq b \leq 2\pi/5; b - a > \pi/2\}$  (on pourrait bien sûr remplacer  $2\pi/5$  par n'importe quel réel positif strictement inférieur à  $\pi/2$ ).  $\square$

**Lemme 4** *Il existe une constante  $C'$  telle que pour tout  $z$  avec  $m \leq |z| \leq M$ , pour tout  $\varepsilon \in ]0, m/2]$  et tous  $u \in [0, 1]$ ,  $a \in [-\pi/2, 0]$ ,  $b \in [0, \pi/2]$  tels que  $0 \leq b - a - \pi/2 \leq |\log \varepsilon|^{-1}$ , on ait*

$$P \left[ a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b; \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \varepsilon|} \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \frac{\pi}{2} \right] \leq C' u \varepsilon^2,$$

$$P \left[ b - \frac{\pi}{2} \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z; b - \frac{u}{|\log \varepsilon|} \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b \right] \leq C' u \varepsilon^2,$$

$$P \left[ a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq a + \frac{u}{|\log \varepsilon|}; \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq a + \frac{\pi}{2} \right] \leq C' u \varepsilon^2.$$

*Démonstration.* Soit  $\nu$  la mesure sur  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$\nu(A) = P[a \leq \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b; \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z - \tilde{\theta}_{T_\varepsilon}^z \in A].$$

En dérivant par rapport à  $c$  la formule (3) on obtient que  $\nu$  admet pour densité sur l'intervalle  $]0, b - a]$

$$h(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{(2k+1)\pi} \left\{ -\frac{4}{c^3} \left( a(c+a)_+ \cos \frac{(2k+1)\pi(c+a)_+}{c} - b(c-b)_+ \cos \frac{(2k+1)\pi(c-b)_+}{c} \right) + \frac{4}{c^3} \left( (c+2a) \sin \frac{(2k+1)\pi(c+a)_+}{c} + (c-2b) \sin \frac{(2k+1)\pi(c-b)_+}{c} \right) \log \frac{|z|}{\varepsilon} + \frac{4}{c^3} \left( \cos \frac{(2k+1)\pi(c+a)_+}{c} + \cos \frac{(2k+1)\pi(c-b)_+}{c} \right) \log^2 \frac{|z|}{\varepsilon} \right\}.$$

Observons maintenant que, sous les conditions de l'énoncé,

$$\left| \cos \frac{\pi(c+a)_+}{c} + \cos \frac{\pi(c-b)_+}{c} \right| \leq 2 \left| \cos \frac{\pi((c+a)_+ + (c-b)_+)}{2c} \right|$$

$$\leq 2 \left| \frac{\pi((c+a)_+ + (c-b)_+)}{2c} - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{50}{|\log \varepsilon|}$$

pour  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|\log \varepsilon|} \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ . Il en découle que pour tout  $c \in \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{|\log \varepsilon|}, \frac{\pi}{2} \right]$ ,

$$h(c) \leq C |\log \varepsilon| \varepsilon^2$$

et il suffit ensuite d'intégrer cette majoration entre  $\pi/2 - u |\log \varepsilon|^{-1}$  et  $\pi/2$  pour obtenir la première inégalité du lemme.

Pour la deuxième, on observe que, d'après la formule (2),

$$\begin{aligned}
 &P \left[ b - \frac{\pi}{2} \leq \check{\theta}_{T_\varepsilon}^z; b - \frac{u}{|\log \varepsilon|} \leq \hat{\theta}_{T_\varepsilon}^z \leq b \right] \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( \sin(2(2k+1)b) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{2(2k+1)} \right. \\
 &\quad \left. - \sin \left( \frac{2(2k+1) \left( b - \frac{u}{|\log \varepsilon|} \right)}{1 - \frac{2u}{\pi |\log \varepsilon|}} \right) \left( \frac{\varepsilon}{|z|} \right)^{1 - \frac{2(2k+1)}{1 - 2u/(\pi |\log \varepsilon|)}} \right) \\
 &\leq C u \varepsilon^2
 \end{aligned}$$

grâce à la majoration

$$\varepsilon^2 - \varepsilon^{2/(1 - 2u/(\pi |\log \varepsilon|))} \leq C u \varepsilon^2.$$

La troisième majoration du lemme est ensuite obtenue de manière symétrique.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'estimation-clé de ce paragraphe. On se donne un réel  $r > 2$  et une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0^{r^n}$$

où  $\varepsilon_0 \in ]0, \rho[$ ,  $\rho$  étant défini dans le lemme 3.

**Proposition 5** *On peut choisir  $r > 2$  assez grand de façon qu'il existe des constantes  $u > 0, \eta > 0$  et  $C''$ , indépendantes de  $\varepsilon_0$ , telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z$  avec  $m \leq |z| \leq M$ ,*

$$P \left[ \bigcap_{k=0}^n \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \varepsilon_k|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_k}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_k}}^z \leq \frac{\pi}{2} \right\} \right] \leq C'' \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right)^2 \left( \frac{|\log \varepsilon_n|}{|\log \varepsilon_0|} \right)^{-\eta}.$$

*Démonstration.* On fixe  $z$  avec  $m \leq |z| \leq M$  et on note  $E_k(u)$  l'événement

$$E_k(u) = \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \varepsilon_k|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_k}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_k}}^z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Pour  $0 < u' \leq u \leq 1$  on pose

$$\varphi_n(u, u') = P \left[ \bigcap_{k=0}^{n-1} E_k(u) \cap E_n(u') \right],$$

de sorte que nous cherchons à majorer  $\varphi_n(u, u)$ .

On commence par majorer  $\varphi_n(u, u')$  en appliquant la propriété de Markov forte au temps  $T_{\varepsilon_{n-1}}$  et en distinguant les deux cas suivants.

(i)  $\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z \geq \frac{\pi}{2} - \frac{u'}{|\log \varepsilon_n|} = \frac{\pi}{2} - \frac{u'}{r |\log \varepsilon_{n-1}|}.$

Après un changement d'échelle correspondant à une homothétie de rapport  $1/\varepsilon_{n-1}$ , on peut appliquer le lemme 3 avec

$$a = \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z - \frac{\pi}{2}, \quad b = \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z + \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} < \rho.$$

En notant  $(\mathcal{F}_t)$  la filtration canonique de  $B$  on obtient la majoration

$$P \left[ \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z \leq \frac{\pi}{2} \mid \mathcal{F}_{T_{\varepsilon_{n-1}}} \right] \leq C_2 \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^2 \left( 1 + u' \frac{|\log \varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}|}{|\log \varepsilon_n|} \right) \leq 2 C_2 \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^2$$

valable sur l'événement considéré en (i).

$$(ii) \quad \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z < \frac{\pi}{2} - \frac{u'}{|\log \varepsilon_n|}.$$

Pour que l'événement  $E_n(u')$  soit réalisé, il est alors nécessaire que l'on ait  $\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z > \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z$ , ou  $\check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z < \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z$  ou encore les deux à la fois.

On fait le même changement d'échelle que dans le cas (i) et on remarque que si  $u < (r-1)^{-1}$  l'hypothèse du lemme 4 est vérifiée pour

$$a = \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z - \frac{\pi}{2}, \quad b = \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z + \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}.$$

En effet, sur  $E_{n-1}(u)$ ,

$$0 \leq b - a - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z) \leq \frac{u}{|\log \varepsilon_{n-1}|} = \frac{(r-1)u}{|\log \varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}|}.$$

On utilise le lemme 4, la première majoration s'appliquant à l'ensemble

$$\{\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z > \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z; \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z < \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z\}$$

la seconde à

$$\{\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z > \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z; \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z = \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z\}$$

et la troisième à

$$\{\hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z = \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z; \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z < \check{\theta}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}^z\}.$$

On obtient ainsi, sur l'intersection de  $E_{n-1}(u)$  et de l'événement considéré en (ii), l'inégalité

$$P[E_n(u') \mid \mathcal{F}_{T_{\varepsilon_{n-1}}}] \leq 3 C' u' \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^2.$$

En regroupant (i) et (ii) on aboutit à la majoration:

$$\varphi_n(u, u') \leq \varphi_{n-1} \left( u, \frac{u'}{r} \right) \cdot 2 C_2 \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^2 + \varphi_{n-1}(u, u) \cdot 3 C' u' \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^2.$$

Nous allons déduire la proposition de cette majoration. On pose d'abord  $\psi_n(u, u') = \varepsilon_n^{-2} \varphi_n(u, u')$  de sorte que

$$\psi_n(u, u') \leq 2C_2 \psi_{n-1}\left(u, \frac{u'}{r}\right) + 3C' u' \psi_{n-1}(u, u).$$

En particulier,

$$\psi_n(u, u) \leq 2C_2 \psi_{n-1}\left(u, \frac{u}{r}\right) + 3C' u \psi_{n-1}(u, u)$$

d'où:

$$\psi_n(u, u) \leq 2C_2 \left( 2C_2 \psi_{n-2}\left(u, \frac{u}{r^2}\right) + 3C' \frac{u}{r} \psi_{n-2}(u, u) \right) + 3C' u \psi_{n-1}(u, u).$$

En raisonnant par récurrence on obtient:

$$\psi_n(u, u) \leq (2C_2)^n \psi_0\left(u, \frac{u}{r^n}\right) + 3C' u \sum_{k=1}^n \left(\frac{2C_2}{r}\right)^{k-1} \psi_{n-k}(u, u).$$

Grâce au lemme 2, et à la remarque suivant la preuve de ce lemme, on a

$$\psi_0\left(u, \frac{u}{r^n}\right) = \varepsilon_0^{-2} P \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{u}{r^n |\log \varepsilon_0|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_0}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_0}}^z \leq \frac{\pi}{2} \right] \leq K \varepsilon_0^{-2} \frac{u}{r^n |\log \varepsilon_0|}$$

pour une certaine constante  $K$ . On peut donc trouver une constante  $C_3$  dépendant seulement de  $C'$ , telle que

$$\psi_n(u, u) \leq C_3 u \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2C_2}{r}\right)^{k-1} \psi_{n-k}(u, u),$$

avec par convention  $\psi_{-1}(u, u) = \varepsilon_0^{-2}$ .

On fixe maintenant les valeurs de  $r$  et  $u$  de façon que

$$r \geq 8C_2, \quad u \leq \min\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{4C_3}\right).$$

Alors,

$$\psi_n(u, u) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4^k} \psi_{n-k}(u, u)$$

et une récurrence immédiate, utilisant la majoration  $\psi_0 \leq \varepsilon_0^{-2}$ , conduit à

$$\psi_n(u, u) \leq \varepsilon_0^{-2} 2^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C'est le résultat annoncé.  $\square$

**Corollaire 6** *Supposons que  $r$  et  $u$  sont choisis comme dans la Proposition 5. Soit*

$$E = \left\{ z \in \mathbf{C}; m \leq |z| \leq M - 1, \text{ et } \exists n_0, \forall n \geq n_0, \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2|\log \varepsilon_n|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Alors,  $P(E = \emptyset) = 1$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, pour tout  $n_0 \geq 1$  fixé, aussi grand qu'on le souhaite, si

$$E' = \left\{ z \in \mathbf{C}; m \leq |z| \leq M - 1 \text{ et } \forall n \geq n_0, \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2|\log \varepsilon_n|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

on a  $P(E' = \emptyset) = 1$ . Soit

$$T = \inf\{t \geq 0, B_t \in E'\} \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

Remarquons que  $T$  est un temps d'arrêt (c'est le début d'un ensemble optionnel). De plus, sur  $\{T < \infty\}$ , on a  $B_T \in E' \subset \Delta_{\pi/2}$ , cette dernière inclusion découlant des résultats connus sur le comportement asymptotique des nombres de tours du mouvement brownien plan.

A partir de maintenant, on raisonne sur l'ensemble  $\{T < \infty\}$ . L'idée de la preuve est qu'on pourra trouver près de  $B_T$  beaucoup de points appartenant à l'ensemble dont la probabilité est majorée dans la Proposition 5. On commence par modifier la suite  $(\varepsilon_n)$  en posant

$$\varepsilon'_n = \varepsilon_{n_0+n} = (\varepsilon'_0)^n.$$

En notant  $z = B_T$  pour alléger, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2|\log \varepsilon'_n|} \leq \hat{\theta}_{T_{\varepsilon'_n}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon'_n}}^z \leq \frac{\pi}{2}.$$

Puisque  $z \in \Delta_{\pi/2}$  on peut choisir un cône  $\mathcal{C}$  de sommet 0 d'ouverture  $\pi/2$  tel que

$$\{B_t, 0 \leq t \leq T\} \subset z - \mathcal{C}$$

où  $z - \mathcal{C} = \{z - x; x \in \mathcal{C}\}$ .

Fixons  $n \geq 1$ . Soit  $y \in \mathbf{C}$  tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

- (i)  $y - z \in \mathcal{C}$
- (ii)  $|y - z| \leq \varepsilon'_{n+1}$ .

Notons qu'on a alors

$$T_{\varepsilon'_k}^{\prime}(z) \leq T_{\varepsilon'_k}^{\prime}(y)$$

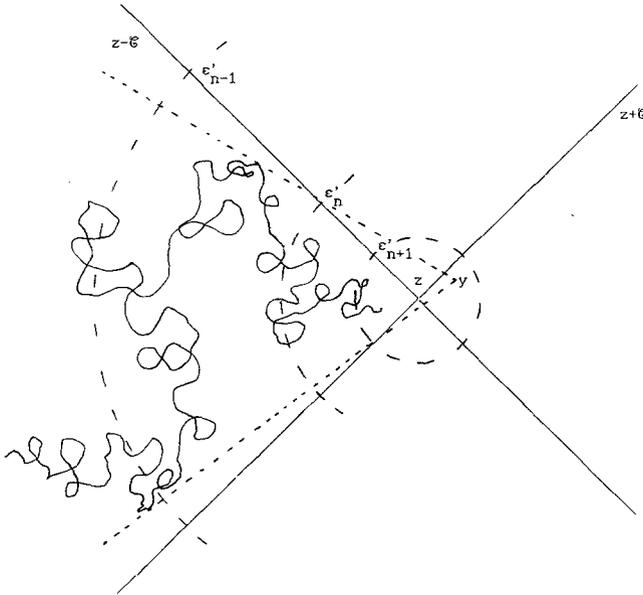


Fig. 1

pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ . Pourvu que  $n_0$  ait été choisi assez grand, on obtient aisément (cf. Fig. 1) que pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , la condition

$$\hat{\theta}_{T_{\epsilon'_k}(z)}^z - \check{\theta}_{T_{\epsilon'_k}(z)}^z \geq \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2 |\log \epsilon'_k|}$$

entraîne

$$\hat{\theta}_{T_{\epsilon'_k}(y)}^y - \check{\theta}_{T_{\epsilon'_k}(y)}^y \geq \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \epsilon'_k|}.$$

De plus, puisque  $T = T_0(z) \geq T_{\epsilon'_{n+1}}(y)$  on a grâce à la condition (i)

$$\hat{\theta}_{T_{\epsilon'_{n+1}}}^y - \check{\theta}_{T_{\epsilon'_{n+1}}}^y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Posons

$$H_n = \left\{ y \in \mathbb{C}; m \leq |y| \leq M, \hat{\theta}_{T_{\epsilon'_{n+1}}}^y - \check{\theta}_{T_{\epsilon'_{n+1}}}^y \leq \frac{\pi}{2}, \right. \\ \left. \text{et } \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \hat{\theta}_{T_{\epsilon'_k}}^y - \check{\theta}_{T_{\epsilon'_k}}^y \geq \frac{\pi}{2} - \frac{u}{|\log \epsilon'_k|} \right\}.$$

D'après les remarques précédentes

$$E[m(H_n)] \geq P(T < \infty) \frac{\pi}{4} (\epsilon'_{n+1})^2.$$

D'autre part,

$$E[m(H_n)] = \int_{m \leq |y| \leq M} d y P(y \in H_n).$$

On majore  $P(y \in H_n)$  en utilisant la proposition 5 et la propriété de Markov forte en  $T_{\varepsilon'_n}(y)$ . On observe que, d'après le lemme 3 et un changement d'échelle convenable,

$$P \left[ \hat{\theta}_{T_{\varepsilon'_{n+1}}}^y - \check{\theta}_{T_{\varepsilon'_{n+1}}}^y \leq \frac{\pi}{2} \middle| \mathcal{F}_{T_{\varepsilon'_n}(y)} \right] \leq C \left( \frac{\varepsilon'_{n+1}}{\varepsilon'_n} \right)^2$$

sur l'ensemble  $\left\{ \hat{\theta}_{T_{\varepsilon'_n}}^y - \check{\theta}_{T_{\varepsilon'_n}}^y \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{|\log \varepsilon'_n|} \right\}$ . On obtient ainsi:

$$P(y \in H_n) \leq C C'' \left( \frac{\varepsilon'_{n+1}}{\varepsilon'_0} \right)^2 \left( \frac{|\log \varepsilon'_n|}{|\log \varepsilon'_0|} \right)^{-\eta}$$

d'où

$$E[m(H_n)] \leq \bar{C} |\log \varepsilon'_n|^{-\eta} (\varepsilon'_{n+1})^2.$$

En comparant cette majoration avec la minoration précédente, et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  on trouve  $P(T < \infty) = 0$ .  $\square$

### 3 Preuve du théorème 1

Dans cette partie nous allons établir le théorème 1 en montrant que p.s.  $\Delta_{\pi/2} = \emptyset$ . Remarquons que  $\Delta_{\pi/2}$  peut aussi être défini comme

$$\Delta_{\pi/2} = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \forall n \geq 0, \hat{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z - \check{\theta}_{T_{\varepsilon_n}}^z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

où  $(\varepsilon_n)$  est la suite considérée dans la partie 2 (on pourrait ici prendre n'importe quelle suite décroissant vers 0).

Il suffit de montrer que p.s.  $\Delta_{\pi/2} \cap K = \emptyset$ , si  $K$  est le compact défini par

$$K = \{z \in \mathbb{C}; m \leq |z| \leq M - 1\}.$$

Nous avons d'abord besoin d'un lemme qui précise la façon dont le mouvement brownien s'approche d'un point  $z \in \Delta_{\pi/2}$ .

**Lemme 7** P.s. pour tout  $z \in \Delta_{\pi/2} \cap K$ , pour tout  $n$  assez grand,

$$\sup_{t \in [T_{\varepsilon_n}(z), T_0(z)]} |B_t - z| \leq \varepsilon_{n-1}.$$

**Démonstration.** Pour tout  $n \geq 1$  soit

$$\Delta^n = \{z \in \Delta_{\pi/2} \cap K; \sup_{t \in [T_{\varepsilon_n}(z), T_0(z)]} |B_t - z| > \varepsilon_{n-1}\}$$

de sorte que l'énoncé du lemme 7 équivaut à:

$$\text{p.s. } \limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta^n = \emptyset.$$

On pose, avec un petit abus de notation,

$$T_n(z) = T_{2\varepsilon_n}(z), \quad S_n(z) = \inf\{t \geq T_n(z); |B_t - z| \geq \varepsilon_{n-1}\}$$

$$T'_n(z) = \inf\{t \geq S_n(z); |B_t - z| \leq 2\varepsilon_n\},$$

puis

$$F_n = \left\{ z; m \leq |z| \leq M, \hat{\theta}_{T_n(z)}^z - \check{\theta}_{T_n(z)}^z \leq \frac{\pi}{2} \right.$$

$$\left. \text{et } \sup_{[S_n(z), T_n(z)]} \theta_s^z - \inf_{[S_n(z), T_n(z)]} \theta_s^z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

En toute rigueur  $\theta_s^z$  peut ne pas être défini pour  $s \in [S_n(z), T_n(z)]$ , si  $z$  est un point de la courbe brownienne. Ceci ne prêche pas à conséquence dans les raisonnements suivants où seule intervient la mesure de Lebesgue de  $F_n$ .

D'après le lemme 3,

$$P \left[ \hat{\theta}_{T_n(z)}^z - \check{\theta}_{T_n(z)}^z \leq \frac{\pi}{2} \right] \leq C \varepsilon_n^2 |\log \varepsilon_n|$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $z$  tel que  $m \leq |z| \leq M$ . Ensuite la même estimation et la propriété de Markov forte en  $S_n(z)$  donnent

$$P \left[ \sup_{[S_n(z), T_n(z)]} \theta_s^z - \inf_{[S_n(z), T_n(z)]} \theta_s^z \leq \frac{\pi}{2} \middle| \mathcal{F}_{S_n(z)} \right] \leq C \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right)^2 \left| \log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right|.$$

On en déduit l'existence d'une suite  $(\sigma_n)$  avec  $\sum \sigma_n < \infty$  telle que, pour tout  $z$  vérifiant  $m \leq |z| \leq M$ ,

$$P(z \in F_n) \leq \sigma_n \varepsilon_n^2.$$

En conséquence,

$$E \left[ \sum_n \varepsilon_n^{-2} m(F_n) \right] < \infty.$$

Supposons maintenant  $\Delta^n$  non vide et prenons  $z \in \Delta^n$ . Notons  $\mathcal{C}$  le cône d'angle  $\pi/2$  de sommet  $z$  qui contient  $\{B_t, t \leq T_0(z)\}$  et  $\mathcal{C}'$  le cône symétrique de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $z$ . Alors tout point  $y \in \mathcal{C}'$  tel que  $|y - z| \leq \varepsilon_n$  est dans  $F_n$ . On a donc

$$\frac{\pi}{4} \varepsilon_n^2 P[\Delta^n \neq \emptyset] \leq E[m(F_n)]$$

d'où

$$\sum_n P[\Delta^n \neq \emptyset] < \infty$$

ce qui entraîne  $P[\limsup \Delta^n = \emptyset] = 1$ .  $\square$

Nous complétons maintenant la preuve du théorème 1. On introduit le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{t \geq 0; B_t \in \Delta_{\pi/2} \cap K\}.$$

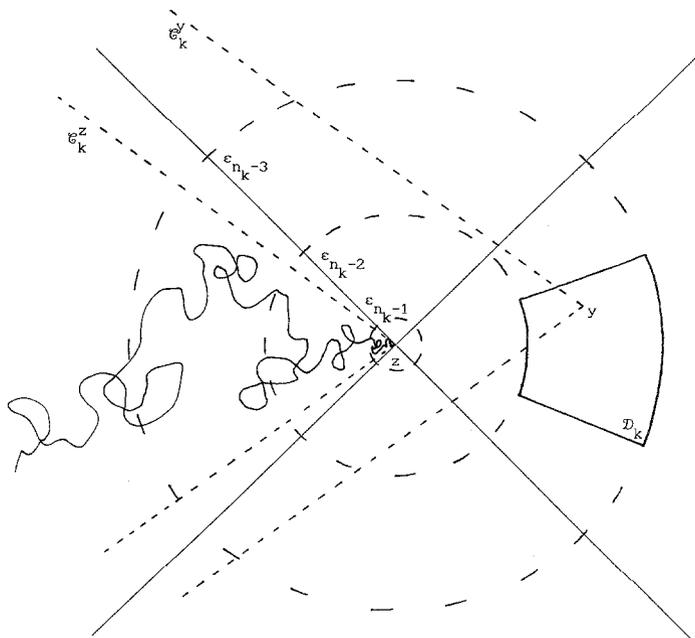


Fig. 2

Dans la suite du raisonnement on se place sur l'événement  $\{\tau < \infty\}$  et, à l'aide de la propriété de Markov forte en  $\tau$ , on va chercher à minorer

$$P[y \in \Delta_{\pi/2}^{\epsilon} | \mathcal{F}_{\tau}]$$

où  $y$  variera dans un sous-ensemble du plan convenablement choisi, et  $\Delta_{\pi/2}^{\epsilon}$  est un ensemble de points cônes  $\epsilon$ -approchés, défini par :

$$\Delta_{\pi/2}^{\epsilon} = \left\{ y; m \leq |y| \leq M, \hat{\theta}_{T_{\epsilon}}^y - \check{\theta}_{T_{\epsilon}}^y \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

On écrit  $z = B_{\tau}$ . D'après le lemme 7, pour  $n$  assez grand,

$$\{B_t, T_{\epsilon_n}(z) \leq t \leq \tau\}$$

est contenu dans le disque de centre  $z$  de rayon  $\epsilon_{n-1}$  noté  $D(z, \epsilon_{n-1})$ .

De plus le corollaire 6 entraîne qu'il existe une infinité de valeurs de  $n$  telles que

$$\hat{\theta}_{T_{\epsilon_n}}^z - \check{\theta}_{T_{\epsilon_n}}^z < \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2 |\log \epsilon_n|}.$$

On obtient ainsi qu'il existe une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que les deux propriétés précédentes soient vérifiées le long de cette suite. On peut supposer que la suite  $(n_k)$  est  $\mathcal{F}_{\tau}$ -mesurable et que  $n_0 \geq 4$ .

Alors pour tout  $k$  on peut trouver un cône de sommet  $z$ , de la forme

$$\mathcal{C}_k^z = \left\{ y = z - r e^{i\theta}; r \geq 0, |\theta - \theta_k| \leq \frac{\pi}{4} - \frac{u}{4 |\log \epsilon_{n_k}|} \right\}$$

tel que

$$\{B_t, 0 \leq t \leq \tau\} \subset \mathcal{C}_k^z \cup D(z, \epsilon_{n_k-1}).$$

Posons maintenant

$$\mathcal{D}_k = \left\{ y = z + r e^{i\theta}; \varepsilon_{n_k-2} \leq r < \varepsilon_{n_k-3}, |\theta - \theta_k| \leq \frac{\pi}{8} \right\}.$$

On voit facilement (cf. Fig. 2) que si  $y \in \mathcal{D}_k$ ,

$$(\mathcal{C}_k^z \cup D(z, \varepsilon_{n_k-1})) \subset \mathcal{C}_k^y := \left\{ y - r e^{i\theta}; r \geq 0, |\theta - \theta_k| \leq \frac{\pi}{4} - \frac{u}{4 |\log \varepsilon_{n_k}|} \right\}.$$

Il en découle que, si  $p > n_k$ ,

$$P[y \in \Delta_{\pi/2}^{\varepsilon_p} | \mathcal{F}_\tau]$$

est minorée par la probabilité qu'un mouvement brownien plan partant de  $z$  atteigne le cercle de centre  $y$  de rayon  $\varepsilon_p$  sans être sorti d'un cône de sommet  $y$  d'angle  $\pi/2$ , contenant  $\mathcal{C}_k^y$ . Pour évaluer cette probabilité nous utilisons la minoration du lemme 3, après un changement d'échelle convenable. Si  $y - z = |y - z| e^{i\gamma}$  (avec  $|\gamma - \theta_k| \leq \pi/8$ ), cette minoration est appliquée avec

$$a = -\frac{\pi}{4} - \frac{u}{4 |\log \varepsilon_{n_k}|} - (\gamma - \theta_k), \quad b = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{4 |\log \varepsilon_{n_k}|} - (\gamma - \theta_k).$$

Remarquons que la condition  $-2\pi/5 \leq a \leq b \leq 2\pi/5$  est satisfaite. Il vient donc, toujours pour  $y \in \mathcal{D}_k$ ,

$$\begin{aligned} P[y \in \Delta_{\pi/2}^{\varepsilon_p} | \mathcal{F}_\tau] &\geq C_2 \frac{u}{2 |\log \varepsilon_{n_k}|} \left( \frac{\varepsilon_p}{|y - z|} \right)^2 \log \frac{|y - z|}{\varepsilon_p} \\ &\geq \frac{C}{|\log \varepsilon_{n_k}|} \varepsilon_p^2 |\log \varepsilon_p| \frac{1}{|y - z|^2}. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $y$  sur  $\mathcal{D}_k$  on obtient

$$E[m(\mathcal{D}_k \cap \Delta_{\pi/2}^{\varepsilon_p}) | \mathcal{F}_\tau] \geq \frac{\bar{C}}{|\log \varepsilon_{n_k}|} \varepsilon_p^2 |\log \varepsilon_p| \int_{\varepsilon_{n_k-2}}^{\varepsilon_{n_k-3}} \frac{dr}{r} = \bar{C} \varepsilon_p^2 |\log \varepsilon_p|$$

pour une constante  $\bar{C} > 0$  indépendante de  $k$  et de  $p$ . Les ensembles  $\mathcal{D}_k$  sont par construction disjoints. En sommant sur  $k$ , à  $p$  fixé, on trouve

$$E[m(\Delta_{\pi/2}^{\varepsilon_p}) | \mathcal{F}_\tau] \geq \bar{C} \varepsilon_p^2 |\log \varepsilon_p| \text{Card} \{k; n_k < p\}$$

d'où aussi

$$E[m(\Delta_{\pi/2}^{\varepsilon_p})] \geq \bar{C} \varepsilon_p^2 |\log \varepsilon_p| E[1_{(\tau < \infty)} \text{Card} \{k; n_k < p\}].$$

Si on suppose  $P(\tau < \infty) > 0$ , cette minoration entraîne

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} (\varepsilon_p^2 |\log \varepsilon_p|)^{-1} E[m(\Delta_{\pi/2}^{\varepsilon_p})] = +\infty.$$

Or la majoration du lemme 3 entraîne

$$E[m(A_{\pi/2}^\varepsilon)] = \int_{m \leq |y| \leq M} dy P \left[ \hat{\theta}_{T_c}^y - \check{\theta}_{T_c}^y \leq \frac{\pi}{2} \right] \leq C \varepsilon^2 |\log \varepsilon|.$$

On obtient une contradiction qui complète la preuve du théorème 1.  $\square$

## References

1. Burdzy, K.: Brownian paths and cones. *Ann. Probab.* **13**, 1006–1010 (1985)
2. Burdzy, K.: Cut points on Brownian paths. *Ann. Probab.* **17**, 1012–1036 (1989)
3. Burdzy, K.: Geometric properties of two-dimensional Brownian paths. *Probab. Theory Relat. Fields* **81**, 485–505 (1989)
4. Evans, S.: On the Hausdorff dimension of Brownian cone points. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **98**, 343–353 (1985)
5. Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications, II*. New York: Wiley 1971
6. Le Gall, J.F.: Mouvement brownien, cônes et processus stables. *Probab. Theory Relat. Fields* **76**, 587–627 (1987)
7. Le Gall, J.F.: Some properties of planar Brownian motion. In: *Cours de l'Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1990*. (Lect. Notes Math.) Berlin Heidelberg New York: Springer (à paraître)
8. Shimura, M.: Excursions in a cone for two-dimensional Brownian motion. *J. Math. Kyoto Univ.* **25**, 433–443 (1985)
9. Shimura, M.: Meandering points of two-dimensional Brownian motion. *Kodai Math. J.* **11**, 169–176 (1988)
10. Shimura, M.: Flat points of two-dimensional Brownian motion. (Preprint 1991)