Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
55, 55–71 (1981)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Théorèmes de section et de projection pour les processus a deux indices

D. Bakry

Institut de Recherche Mathématique Avancée (Laboratoire associé au CNRS),
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg-Cedex, France

Introduction

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des processus à deux indices telle qu'elle a été développée par R. Cairoli et J.B. Walsh dans [2]: sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, on se donne deux filtrations $(\mathscr{F}_s^1)_{s \geqq 0}$ et $(\mathscr{F}_t^2)_{t \geqq 0}$ vérifiant les «conditions habituelles», ainsi que la propriété de commutation notée (F.4) dans [2]: pour tout point (s,t), les opérateurs $E(\cdot|\mathscr{F}_s^1)$ et $E(\cdot|\mathscr{F}_s^2)$ commutent. Sous ces hypothèses, C. Doléans et P.A. Meyer ont montré dans [6] comment un théorème de projection prévisible pouvait être ramené à l'existence d'une version limitée à gauche pour des martingales bornées à deux indices. Nous nous proposons de prolonger cette étude: dans une première partie, nous donnons des théorèmes de section, puis de projection prévisible et optionelle, droite et duale, pour des processus à un indice dépendant mesurablement d'un «bon» paramètre. Cette étude reprend les résultats de [8], par une méthode différente. Dans la seconde partie, en nous appuyant sur des résultats très récents de régularité des martingales à deux indices [1, 9, 10], nous donnons les théorèmes de projection droite et duale, prévisible et optionnelle associés aux processus à deux indices. Enfin, dans une troisième partie, prolongeant l'étude de [7], nous donnons des théorèmes de section, pour ces différentes tribus, par des «lignes d'arrêt faibles», puis des résultats d'annonçabilité de débuts comparables à ceux que l'on connaît pour les processus à un indice.

Notations: nous suivons pour l'essentiel celles de [9]; si $z=(t_1, \dots, t_n)$ et $z'=(t'_1, \dots, t'_n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, nous noterons

$$z \leqq z' \Leftrightarrow \forall\, i, \quad t_i \leqq t'_i$$

et

$$z < z' \Leftrightarrow \forall\, i, \quad t_i < t'_i.$$

Nous emploierons sans autre commentaire les notations $[z, z']$, $]-\infty, z]$, pour les intervalles, etc.... On dira qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *limitée à droite* (en

0044-3719/81/0055/0055/$03.40

abrégé *làd.*) si

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \qquad \lim_{z' \to z,\, z' > z} f(z') \text{ existe.}$$

Si cette limite vaut partout $f(z)$, on dit que f est *continue à droite (càd.)*. Dans ce cas, on a en fait

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \qquad \lim_{z' \to z,\, z' \geqq z} f(z') = f(z).$$

A partir du second chapitre, nous ne nous intéresserons qu'au cas $n=2$: nous dirons alors que f est *limitée à gauche (làg.)* si

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \qquad \lim_{z' < z,\, z' \to z} f(z') \text{ existe.}$$

Et de même, qu'elle est $(-, +)$-*limitée* si

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \lim_{s' < s,\, t' > t,\, (s',t') \to (s,t)} f(s',t') \text{ existe.}$$

Nous définissons de façon symétrique la notion de fonction $(+, -)$-*limitée*, et de même que plus haut, nous parlerons de fonction continue à gauche, etc.

Supposons que l'on se soit donné un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathscr{F}, P)$: un processus $X: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sera dit làd., càd., etc..., si, pour presque tout élément ω de Ω, la trajectoire $X(\omega, .)$: $E \to \mathbb{R}$ est làd., càd. etc.... Cela s'étend de manière triviale à des processus définis seulement sur une partie de $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Si l'on s'est donné sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ une filtration $(\mathscr{F}_s)_{s \geqq 0}$ vérifiant les conditions habituelles, $\mathfrak{O}(\mathscr{F}_.)$ (resp. $\mathfrak{P}(\mathscr{F}_.)$) désignera la tribu optionnelle (resp. prévisible) sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Pour tout pavage $\mathscr{I}$ sur un ensemble E, on notera $\mathscr{I}_\delta$(resp. $\mathscr{I}_\sigma$) le pavage stabilisé de $\mathscr{I}$ pour l'opération d'intersection (resp. de réunion) dénombrable, et $\mathfrak{A}(\mathscr{I})$ la classe des ensembles $\mathscr{I}$-analytiques.

Pour tout espace topologique E, $\mathfrak{B}(E)$ désigne la tribu borélienne.

Dans la première partie, nous considérons un espace mesurable $(\mathbb{T}, \mathscr{T})$ de paramètres, que nous supposons souslinien (dans les parties suivantes, ce sera $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$. Désignons par π la projection canonique: $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \to \Omega$. On dira qu'un processus $X: \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est *évanescent* si $P(\pi\{X \neq 0\}) = 0$. Une partie A de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ est *évanescente* si son indicatrice 1_A est un processus évanescent; deux processus sont dits *indistinguables* si leur différence est un processus évanescent. Nous désignons par $\mathfrak{E}$ la tribu constituée par les ensembles $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{T})$-mesurables, qui sont évanescents ou de complémentaire évanescent. Pour toute sous-tribu $\mathfrak{A}$ de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{T}$, nous notons $\mathring{\ell}(\mathfrak{A})$ l'espace des fonctions bornées $\mathfrak{A}$-mesurables, et $\ell(\mathfrak{A})$ son quotient par la relation d'indistinguabilité.

Comme dans [8], nous définissons les tribus optionnelle et prévisible de processus dépendant d'un paramètre: nous noterons $\tilde{\mathfrak{O}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{P}}$) la tribu $(\mathfrak{O}(\mathscr{F}_.) \otimes \mathscr{T}) \vee \mathfrak{E}$ (resp. $(\mathfrak{P}(\mathscr{F}_.) \otimes \mathscr{T}) \vee \mathfrak{E}$).

Nous ajoutons à $\mathbb{T}$ un point, noté ∞ (le contexte permettra de le distinguer du point à l'infini de $\mathbb{R}_+$, et la confusion ne présente d'ailleurs aucun danger). Si

Z est une v.a. définie sur Ω, à valeurs dans $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \cup \{(\infty, \infty)\}$, nous appelons *graphe* de Z, et nous notons $[Z]$, l'ensemble des points $(\omega, s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ tels que $(s, t) = Z(\omega)$.

I. Théorèmes de section pour processus dépendant d'un paramètre

Dans ce paragraphe, nous allons établir un *théorème de section par points d'arrêt* pour des processus dépendant mesurablement d'un paramètre, et, comme application, nous établirons des théorèmes de projection et de projection duale. La démarche est donc inverse de celle de [8]. Nous devons à un travail (non publié) d'E. Merzbach pour le cas des processus à deux indices, l'idée d'utiliser des points d'arrêt.

Définition 1. On dit qu'une v.a. $Z\colon \Omega \to (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \cup \{(\infty, \infty)\}$ est un *point d'arrêt* (resp. un *point d'arrêt prévisible*) s'il existe un temps d'arrêt S, une v.a. $\mathscr{F}_S$-mesurable T (resp. un temps prévisible et une v.a. $\mathscr{F}_{S-}$-mesurable) tels que l'on ait $T(\omega) = \infty$ si $S(\omega) = +\infty$, $T(\omega) \neq \infty$ si $S(\omega) < +\infty$, et $Z(\omega) = (S(\omega), T(\omega))$ pour tout ω.

Il est assez facile de voir (cf. la fin de la démonstration du théorème 1, et la remarque qui suit) que les points d'arrêt (resp. les points d'arrêt prévisibles) sont *identiques* aux variables aléatoires Z qui apparaissent dans la définition suivante. Le lecteur peut donc, s'il le désire, y supposer simplement que Z y est un point d'arrêt (un point d'arrêt prévisible), et omettre entièrement cette nuance de démonstration.

Définition 2. Soit A une partie de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$; nous dirons que *$A$ vérifie le théorème de section optionnelle* (resp. *prévisible*) si:

1) la projection $\pi(A)$ de A sur Ω est $\mathscr{F}$-mesurable

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Z\colon \Omega \to (R_+ \times \mathbb{T}) \cup \{(\infty, \infty)\}$, vérifiant:

$$[Z] \in \tilde{\mathfrak{O}} \text{ (resp. } \tilde{\mathfrak{P}})$$
$$[Z] \subset A \quad \text{et} \quad P(\pi([Z])) \geqq P(\pi(A)) - \varepsilon.$$

Théorème 1. *Tout élément A de $\mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{O}})$ (resp. de $\mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{P}})$) vérifie le théorème de section optionnelle (resp. prévisible). Cela s'applique en particulier* à *$\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{P}}$ elles mêmes.*

Preuve. Nous allons commencer par ramener le problème à une forme un peu plus simple. Nous ne traitons que le cas optionnel.

1) A est le noyau d'un schéma de Souslin (A_s) ([5], app. au chap. III, n° 75) formé d'éléments de $(\mathfrak{O} \otimes \mathscr{T}) \vee \mathfrak{E}$. Il existe pour tout s un ensemble $H_s \in \mathscr{F}$ P-négligeable (donc appartenant à $\mathscr{F}_0$) et un élément A'_s de $\mathfrak{O} \otimes \mathscr{T}$, tels que A_s et A'_s ne diffèrent que par un sous-ensemble de $H_s \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$. L'ensemble des suites finies d'entiers étant dénombrable, l'ensemble $H = \bigcup_s H_s$ est encore P-négligeable. Il nous suffit donc de construire une section Z' pour le noyau A' du schéma de Souslin (A'_s), puis de remplacer Z' par (∞, ∞) si $\omega \in H$. Autrement dit, *on peut se ramener au cas où A est $(\mathfrak{O} \otimes \mathscr{T})$-analytique.*

2) Puisque $(\mathbb{T}, \mathscr{T})$ est souslinien, on peut supposer ([5], III, n° 20) que $\mathbb{T}$ est une partie analytique de la droite, munie de sa tribu borélienne. Mais alors tout élément de $\mathfrak{O} \otimes \mathscr{T}$ est $(\mathfrak{O} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-analytique, et donc ([5], chap. III n° 10) *on peut se ramener au cas où* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Passons à la démonstration proprement dite. Soit B la projection de $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$; alors B est $\mathfrak{O}$-analytique ([5], chap. III, n° 13). Nous remarquons maintenant que le théorème de section optionnel usuel ([5], chap. IV, n° 84) est vrai, non seulement pour les éléments de $\mathfrak{O}$, mais pour les ensembles $\mathfrak{O}$-analytiques, avec la même démonstration. Il existe donc un temps d'arrêt S tel que

$$[S] \subset B, \qquad P\{S < +\infty\} \geqq P(\pi(A)) - \varepsilon$$

(pour le côté droit, remarquer que A et B ont même projection sur Ω).

Soit alors $C = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}\colon\; S(\omega) < +\infty,\; (\omega, S(\omega), t) \in A\}$. Lorsque $A \in \mathfrak{O} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, il est facile de vérifier que $C \in \mathscr{F}_S \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$; un argument simple de schémas de Souslin montre alors que si A est $(\mathfrak{O} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-analytique, C est $(\mathscr{F}_S \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-analytique. Le théorème de section usuel sans filtration ([5], chap. III n° 44) montre alors qu'il existe une v.a. T, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathscr{F}_S$-measurable et telle que

$$(\omega, T(\omega)) \in C \quad \text{pour tout } \omega \text{ tel que } T(\omega) \neq \infty$$
$$T(\omega) \neq \infty \quad \text{pour presque tout } \omega \text{ tel que } C(\omega) \neq \emptyset$$

Posons alors $Z(\omega) = (S(\omega), T(\omega))$ si $S(\omega) < +\infty$, $T(\omega) \neq \infty$, $Z(\omega) = (+\infty, \infty)$ sinon. Le point $(\omega, Z(\omega)) = (\omega, S(\omega), T(\omega))$ appartient à A pour tout ω tel que $Z(\omega) \neq (+\infty, \infty)$ – en particulier, Z est à valeurs dans $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \cup \{(+\infty, \infty)\}$. Le graphe $[Z]$ appartient à $\mathfrak{O} \otimes \mathscr{T}$: en effet, il suffit de vérifier qu'il appartient à $\mathfrak{O} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, or on a

$$[Z] = \bigcap_n \left[S, S + \frac{1}{n}\right[\times \left[T, T + \frac{1}{n}\right[.$$

Enfin, il est clair que Z satisfait à la définition 2. Le cas prévisible est identique: S est seulement un temps prévisible, et T est $\mathscr{F}_{S-}$-mesurable.

Remarque. Revenant à la définition 2, on peut appliquer le théoreme de section au graphe de $[Z]$ et en déduire que, chaque fois qu'un ensemble A satisfait à la définition 1, il admet des sections par points d'arrêt (prévisibles si A est prévisible).

Comme en théorie générale des processus à un indice, les théorèmes de section conduisent aux théorèmes de projection:

Théorème 2. *Soit $X(\omega, s, t)$ un processus appartenant à $b[(\mathscr{F} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{T}) \vee \mathfrak{E}]$ (que nous désignerons simplement par b). Il existe alors un processus Y appartenant à $b(\tilde{\mathfrak{O}})$* (resp. $b(\tilde{\mathfrak{P}})$), *unique à l'indistinguabilité près, et vérifiant pour tout point d'arrêt Z (resp. tout point d'arrêt prévisible Z) on a*

$$E[X_Z 1_{\{Z \neq (\infty, \infty)\}}] = E[Y_Z 1_{\{Z \neq (\infty, \infty)\}}].$$

On dit que Y est la *projection optionnelle* (resp. *prévisible*) de X, et on écrit $Y = P_{\tilde{\mathfrak{O}}}(X)$ (resp. $P_{\tilde{\mathfrak{P}}}(X)$).

Nous n'insisterons pas sur la démonstration, qui est classique: l'unicité résulte du théorème de section, ainsi que la possibilité de définir Y par classes monotones à partir du cas où $X(\omega, s, t)$ est de la forme $X(\omega)\, g(s, t)$, où le théorème se réduit à l'existence de bonnes versions pour les martingales ordinaires. De même, il nous arrivera d'appliquer le théorème 1, sans autre commentaire, à des processus X positifs, non nécessairement bornés.

Enfin, les théorèmes de projection conduisent aux théorèmes de projection duale (dans [8], le cheminement était inverse: les théorèmes de projection duale venaient en premier, puis l'existence de projections, et un théorème de «sections par mesures aléatoires» venait en dernier). Rappelons les définitions de [8]:

Une *mesure aléatoire* (intégrable) est un noyau μ de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{T})$, positif, tel que $\mu(\omega, .)$ soit bornée pour tout ω de Ω, et que $E(\mu(1)) < +\infty$.

Deux mesures μ et μ' sont *indistinguables* si, pour presque tout ω, on a $\mu(\omega, .) = \mu'(\omega, .)$.

On dira que μ est *optionnelle* (resp. *prévisible*) si, pour tout H dans $\mathscr{T}$, le processus, croissant au sens habituel:

$$B_s^H(\omega) = \mu(\omega, [0, s] \times H) \qquad \text{est optionnel (resp. prévisible).}$$

Remarque. Lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la mesure aléatoire est entièrement déterminée par son «processus croissant associé»

$$A_{s,t}(\omega) = \mu(\omega, [0, s] \times]-\infty, t])$$

et il est clair que μ est optionnelle (prévisible) si et seulement si le processus A est mesurable par rapport à $\tilde{\mathfrak{O}}$ ($\tilde{\mathfrak{P}}$). Plus généralement, on peut associer un «processus croissant» à une mesure aléatoire lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}^n$, $]-\infty, t]$ ayant alors le sens indiqué dans l'introduction.

Comme d'habitude, pour tout élément X de $\mathscr{b}$, nous notons:

$$\langle \mu, X \rangle = E\Big[\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}} X(\omega, s, t)\, \mu(\omega, ds, dt)\Big]$$

Théorème 3. *Soit μ une mesure aléatoire; μ est optionnelle (resp. prévisible) si, et seulement si:*

$$\forall X \in b \qquad \langle \mu, X \rangle = \langle \mu, P_{\tilde{\mathfrak{O}}}(X) \rangle \qquad (\text{resp. } \langle \mu, X \rangle = \langle \mu, P_{\tilde{\mathfrak{P}}}(X) \rangle).$$

Preuve. Soient H un élément de $\mathscr{T}$ et $B_s^H(\omega) = \mu(\omega, [0, s] \times H)$; B^H est optionnel si, et seulement si, pour toute martingale càdlàg. bornée Z_s, de variable terminale Z, et pour toute fonction borélienne g, on *a*

$$E\Big(Z \int g(s)\, dB_s^H\Big) = E\Big(\int Z_s\, g(s)\, dB_s^H\Big).$$

Ce qui s'exprime encore:

$$\langle \mu, X \rangle = \langle \mu, P_{\tilde{\mathfrak{O}}}(X) \rangle$$

où $X(\omega, s, t)$ désigne le processus $X(\omega)\, g(s)\, 1_H(t)$.

Ce résultat nous conduit au théorème de projection duale:

Théorème 4. *Soit μ une mesure aléatorie sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$; il existe une unique mesure aléatorie optionnelle (resp. prévisible) notée $P_{\mathfrak{O}}^*(\mu)$ (resp. $P_{\mathfrak{P}}^*(\mu)$), telle que:*

$$\forall X \in \mathscr{b}; \qquad \langle \mu, P_{\tilde{\mathfrak{O}}}(X) \rangle = \langle P_{\tilde{\mathfrak{O}}}^*(\mu), X \rangle \qquad (\text{resp. } \langle \mu, P_{\tilde{\mathfrak{P}}}(X) \rangle = \langle P_{\tilde{\mathfrak{P}}}^*(\mu), X \rangle).$$

On obtient alors la forme duale du théorème 3.

Théorème 5. *Soit X un élément de $\mathscr{b}$; X est dans $\mathscr{b}(\tilde{\mathfrak{O}})$ (resp. $\mathscr{b}(\tilde{\mathfrak{P}})$) si, et seulement si, pour toute mesure aléatoire μ*

$$\langle \mu, X \rangle = \langle P_{\tilde{\mathfrak{O}}}^*(\mu), X \rangle \qquad (\text{resp. } \langle \mu, X \rangle = \langle P_{\tilde{\mathfrak{P}}}^*(\mu), X \rangle).$$

II. Processus a deux indices: Théorèmes de projection

Nous considérons désormais, sur l'espace $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ deux filtrations $(\mathscr{F}_s^1)_{s \geq 0}$ et $(\mathscr{F}_t^2)_{t \geq 0}$, vérifiant les conditions habituelles, ainsi que l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F.4) de [2]:

pour tout (s,t), les opérateurs d'espérance conditionnelle

$E(.|\mathscr{F}_s^1)$ et $E(.|\mathscr{F}_t^2)$ commutent.

Traduisons dans ce cadre les notions introduites au chapitre 1: un processus $X(\omega, s, t)$: $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dit *1-optionnel* (resp. *1-prévisible*), s'il est mesurable par rapport à la tribu $\mathfrak{O}(\mathscr{F}_\cdot^1) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ (resp. $\mathfrak{P}(\mathscr{F}_\cdot^1) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$), augmentée des évanescents. Cette tribu, notée $\mathfrak{O}_1$ (resp. $\mathfrak{P}_1$), est donc la tribu $\tilde{\mathfrak{O}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{P}}$) du premier chapitre, lorsque $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est muni de la filtration $\mathscr{F}_\cdot^1$ le second indice jouant le rôle du paramètre.

Si nous échangeons les rôles des deux indices, ainsi que les filtrations $\mathscr{F}_\cdot^1$ et $\mathscr{F}_\cdot^2$, nous obtenons, sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^2$, des tribus *2-optionnelle* et *2-prévisible*, que nous notons $\mathfrak{O}_2$ et $\mathfrak{P}_2$ (c'est alors le premier indice qui joue le rôle du paramètre). Nous pouvons donc définir sur $\mathscr{b}$ les opérateurs de projection $P_{\mathfrak{O}_1}, P_{\mathfrak{O}_2}, P_{\mathfrak{P}_1}, P_{\mathfrak{P}_2}$.

Un *1-point d'arrêt* (resp. un *1-point prévisible*) sera une application (S, T): $\Omega \to \mathbb{R}_+^2 \cup \{(\infty, \infty)\}$, telle que S soit un temps d'arrêt de $\mathscr{F}_\cdot^1$, T une variable $\mathscr{F}_S^1$ mesurable (resp. S prévisible dans $\mathscr{F}_\cdot^1$, $T \mathscr{F}_{S-}^1$ mesurable). Les *2-points d'arrêt* sont définis de manière symétrique.

Pour tout processus $X(\omega, z) \in \mathscr{b}$, $P_{\mathfrak{O}_i}(X)$ (resp. $P_{\mathfrak{P}_i}(X)$) est caractérisé par la propriété suivante: c'est l'unique processus borné Y, $\mathfrak{O}_i$-mesurable (resp. $\mathfrak{P}_i$-mesurable) tel que l'on ait

$$E[X(.,Z) 1_{\{Z \neq (\infty,\infty)\}}] = E[Y(.,Z) 1_{\{Z \neq (\infty,\infty)\}}]$$

pour tout i-point d'arrêt Z (resp. tout i-point prévisible Z). Comme d'habitude, l'unicité se comprend «à un évanescent près».

Une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+^2$ est représentée par un unique processus croissant $A(\omega, z)$, tel que $E[A(.,\infty)] < +\infty$. Tout processus croissant A admet une unique *i-projection duale optionnelle* notée $P^*_{\mathfrak{O}_i}(A)$, ou prévisible, notée $P^*_{\mathfrak{P}_i}(A)$. Elle est entièrement caractérisée par:

$$\forall X \in \mathscr{E}, \quad \langle P^*_{\mathfrak{O}_i}(A), X\rangle = \langle A, P_{\mathfrak{O}_i}(X)\rangle \qquad (\text{resp. } \langle P^*_{\mathfrak{P}_i}(A), X\rangle = \langle A, P_{\mathfrak{P}_i}(X)\rangle.)$$

Pour tout point (s,t) de $\mathbb{R}^2_+$, notons $\mathscr{F}_{s,t} = \mathscr{F}^1_s \cap \mathscr{F}^2_t$. On dira qu'un processus $X(\omega, z)$: $\Omega \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ est *adapté* si, pour tout $z \in \mathbb{R}^2_+$, $X(.,z)$ est $\mathscr{F}_z$-mesurable. Une *martingale* est un processus X tel que

$$.\forall z \in \mathbb{R}^2_+, \quad E|X(\omega,z)| < +\infty$$
$$.\forall z \leqq z', \quad X(\omega,z) = E(X(\omega,z')|\mathscr{F}_z) \quad \text{p.s.}$$

Si $\sup_z E(|X(\omega,z)\operatorname{Log}^+|X(\omega,z)|) < +\infty$ (on dit alors que X est *bornée dans* $L\operatorname{Log} L$), il existe une variable aléatoire $Z \in L\operatorname{Log} L$, telle que

$$\forall z,\ X(.,z) = E(Z|\mathscr{F}_z) \text{ p.s.,} \qquad \text{et de plus } \sup_z |X(\omega,z)| \in L^1$$

Dans ces conditions, il existe une modification de X, unique à un évanescent près, qui est continue à droite. Cette modification est, de plus, limitée dans les quadrants $(-,+)$, $(+,-)$, $(-,-)$ ([1, 9, 10]).

Si l'on désigne par $X_{s,t}(\omega)$ cette version, ces limites seront notées respectivement $X_{\underline{s},t}, X_{s,\underline{t}}, X_{\underline{s},\underline{t}}$, et nous conviendrons d'interprèter toujours le symbole $\underline{0}$ comme 0, (ainsi $X_{\underline{0},s} = X_{0,s}$, etc ...).

Théorème 6. *Soient Y une variable bornée $\mathscr{F}$-mesurable, $X_{s,t}$ la martingale continue à droite $E(Y|\mathscr{F}_{s,t})$. Notons X, X_{+-}, X_{-+}, X_{--} les processus $(X_{s,t})$, $(X_{s,\underline{t}})$, $(X_{\underline{s},t})$, $(X_{\underline{s},\underline{t}})$ respectivement. On a alors à un ensemble évanescent près*[1]

a) $P_{\mathfrak{O}_1} P_{\mathfrak{O}_2}(Y) = P_{\mathfrak{O}_2} \circ P_{\mathfrak{O}_1}(Y) = X$

b) $P_{\mathfrak{P}_1} \circ P_{\mathfrak{P}_2}(Y) = P_{\mathfrak{P}_2} \circ P_{\mathfrak{P}_1}(Y) = X_{--}$

c) $P_{\mathfrak{O}_1} \circ P_{\mathfrak{P}_2}(Y) = P_{\mathfrak{P}_2} \circ P_{\mathfrak{O}_1}(Y) = X_{+-}$

d) $P_{\mathfrak{O}_2} \circ P_{\mathfrak{P}_1}(Y) = P_{\mathfrak{P}_1} \circ P_{\mathfrak{O}_2}(Y) = X_{-+}$

Preuve. Désignons par $(Y_t)_{t \geqq 0}$ la martingale à un indice $E[Y|\mathscr{F}^2_t]$, par $(Y_{\underline{t}})$ le processus de ses limites à gauche. On vérifie alors aussitôt que

$$E[Y_t|\mathscr{F}^1_s] = X_{s,t}, \qquad E[Y_{\underline{t}}|\mathscr{F}^1_s] = X_{s,\underline{t}} \qquad (\text{p.s. pour } s,\ t \text{ fixés}).$$

Soit S un temps d'arrêt (resp. un temps prévisible) de la filtration $\mathscr{F}^1_\bullet$. On en déduit que, pour t fixé, on a p.s.

$$E[Y_t|\mathscr{F}^1_S] = X_{S,t} \qquad (\text{resp. } E[Y_t|\mathscr{F}^1_{S-}] = X_{\underline{S},t})$$
$$E[Y_{\underline{t}}|\mathscr{F}^1_S] = X_{S,\underline{t}} \qquad (\text{resp. } E[Y_{\underline{t}}|\mathscr{F}^1_{S-}] = X_{\underline{S},\underline{t}})$$

Soit ensuite T une v.a. étagée, mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{F}^1_S$ (resp. $\mathscr{F}^1_{S-}$) et telle que $\{S = +\infty\} = \{T = +\infty\}$; on en déduit

$$E[Y_T 1_{\{S<\infty\}}] = E[X_{S,T} 1_{\{S<\infty\}}] \qquad (\text{resp. } E[Y_T 1_{\{S<\infty\}}] = E[X_{\underline{S},T} 1_{\{S<\infty\}}]$$
$$E[Y_{\underline{T}} 1_{\{S<\infty\}}] = E[X_{S,\underline{T}} 1_{\{S<\infty\}}] \qquad (\text{resp. } E[Y_{\underline{T}} 1_{\{S<\infty\}}] = E[X_{\underline{S},\underline{T}} 1_{\{S<\infty\}}]$$

[1] La notation ne distingue pas la v.a. Y du processus contant égal à Y.

Approchant T, du côté convenable, par une suite de variables aléatoires étagées mesurables pour $\mathscr{F}_S^1$ (resp. $\mathscr{F}_{S-}^1$), et remarquant que Y est bornée, on étend ces formules à des variables aléatoires T non nécessairement étagées. Remarquons que (Y_t) est le processus $P_{\mathfrak{O}_2}(Y)$, $(Y_{\underline{t}})$ le processus $P_{\mathfrak{P}_2}(Y)$. Les égalités précédentes expriment donc que

$$P_{\mathfrak{O}_1} \circ P_{\mathfrak{O}_2}(Y) = X \qquad (\text{resp. } P_{\mathfrak{P}_1} \circ P_{\mathfrak{O}_2}(Y) = X_{-+})$$
$$P_{\mathfrak{O}_1} \circ P_{\mathfrak{P}_2}(Y) = X_{+-} \qquad (\text{resp. } P_{\mathfrak{P}_1} \circ P_{\mathfrak{P}_2}(Y) = X_{--})$$

à condition de savoir que le second membre de chacune de ces égalités est mesurable par rapport à la tribu appropriée. Traitons par exemple le premier cas: il s'agit de démontrer que la fonction $((\omega, s); t) \mapsto X_{s,t}(\omega)$ est mesurable par rapport à $\mathfrak{O}_1$, c'est à dire au produit de la tribu 1-optionnelle en (ω, s) par la tribut borélienne en t. Or désignons par t_n la n-ième approximation dyadique supérieure de t; on a

$$X_{s,t}(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{s,t_n}(\omega)$$

et il est clair que le second membre est un processus $\mathfrak{O}_1$-mesurable.

Il ne reste plus alors qu'à échanger les indices 1 et 2.

Une application directe du théorème des classes monotones donne immédiatement, comme corollaire:

Théorème 7. *Les quatre types de projections i-prévisible et i-optionnelle commutent entre elles et il en va de même pour les projections duales.*

Comme C. Doléans et P.A. Meyer l'ont remarqué dans [6], cela entraîne l'égalité $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$, et l'existence d'un opérateur de projection prévisible $P_{\mathfrak{P}} = P_{\mathfrak{P}_1} \circ P_{\mathfrak{P}_2} = P_{\mathfrak{P}_2} \circ P_{\mathfrak{P}_1}$. En effet, il est clair que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$. Inversement, le processus X_{--} du théorème 6 étant prévisible, on montre par un argument de classes monotones que $P_{\mathfrak{P}_1} \circ P_{\mathfrak{P}_2}(Y) = P_{\mathfrak{P}_2} \circ P_{\mathfrak{P}_1}(Y)$ est prévisible pour tout processus mesurable borné Y. En particulier, si Y est $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)$-mesurable, on voit que Y est prévisible (l'adjonction des ensembles évanescents aux diverses tribus joue ici un rôle essentiel).

Nous allons consacrer la fin de ce paragraphe à l'étude des résultats analogues pour les autres tribus.

Définition 3. La tribu $\mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2$ est appelée *tribu optionnelle* sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^2$, et notée $\mathfrak{O}$. La tribu $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$ (resp. $\mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{O}_1$) est appelée 1-*prévisible*, 2-*optionnelle* (resp. 2-*prévisible*, 1-*optionnelle*).

L'opérateur $P_{\mathfrak{O}_1} \circ P_{\mathfrak{O}_2} = P_{\mathfrak{O}_2} \circ P_{\mathfrak{O}_1}$ sur les processus sera appelé opérateur de *projection optionnelle*, et noté $P_{\mathfrak{O}}$. De même, opérateur $P^*_{\mathfrak{O}_1} \circ P^*_{\mathfrak{O}_2} = P^*_{\mathfrak{O}_2} \circ P^*_{\mathfrak{O}_1}$ sur les mesures aléatoires ou les processus croissants sera noté $P^*_{\mathfrak{O}}$.

L'étude la plus importante est celle de la tribu optionnelle: en théorie des processus à un indice, on montre que celle-ci est engendrée par les processus càdlàg. adaptés, ou encore par les intervalles stochastiques $[S, T[$. On montre aussi qu'une mesure aléatoire μ est optionnelle (i.e. $P^*_{\mathfrak{O}}(\mu) = \mu$) si et seulement si le processus croissant associé A est optionnel. Nous allons étendre tous ces résultats aux processus à deux indices (mais la génération par intervalles stochastiques sera traitée au paragraphe suivant).

Théorème 8. a) *Soit X un processus adapté, dont presque toutes les trajectoires sont continues à droite. Alors X est optionnel.*

b) *Inversement, la tribu optionnelle est engendrée par les processus déterministes de la forme $f(s,t)$, où f est continue, par les processus évanescents, et par les versions continues à droite des martingales bornées. Elle est donc aussi engendrée par les processus évanescents, et par les processus adaptés dont les trajectoires sont continues à droite et limitées dans les quadrants.*

Preuve. a) Soit N l'ensemble des ω tels que $X(\omega,.,.)$ ne soit pas continue à droite. En vertu des conditions habituelles, N appartient à toutes les tribus $\mathscr{F}_z$, donc X est somme du processus évanescent $X 1_N$ et du processus $Y = X 1_{N^c}$, qui est adapté et a toutes ses trajectoires continues à droite. On vérifie alors aussitôt que Y est mesurable par rapport à $\mathfrak{O}_1$ et $\mathfrak{O}_2$ (cf. th. 6).

b) Soit $\mathfrak{O}'$ la tribu engendrée par les versions continues à droite des martingales bornées, et par les fonctions déterministes continues (ou boréliennes: cela revient au même). Le théorème 6 nous montre que la projection optionnelle de tout processus constant $Y(\omega,s,t) = Y(\omega)$, où Y est une v.a. bornée, est $\mathfrak{O}'$-mesurable. Cela s'étend aussitôt à un processus de la forme $Y(\omega,s,t) = Y(\omega) f(s,t)$, où f est borélienne bornée, puis (par classes monotones) à un processus mesurable borné Y quelconque. Prenant Y optionnel, on voit que Y est indistinguable d'un processus $\mathfrak{O}'$-mesurable, d'où l'énoncé.

Théorème 9. *Soient μ une mesure aléatoire, A le processus croissant intégrable associé à μ. Pour que A soit optionnel, il faut et il suffit que la mesure aléatoire μ soit optionnelle, i.e. que l'on ait*

$$E[\mu(X)] = E[\mu(P_{\mathfrak{O}}(X))] \quad \textit{pour tout } X \in \mathscr{E}.$$

Preuve. D'après le théorème 3, dire que μ est i-optionnelle, i.e., que

$$E[\mu(X)] = E[\mu(P_{\mathfrak{O}_i}(X))] \quad \text{pour tout } X \in \mathscr{E}$$

équivaut à dire que A est un processus i-optionnel. L'énoncé est alors une conséquence évidente des relations $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1 \cap \mathfrak{O}_2$, $P_{\mathfrak{O}} = P_{\mathfrak{O}_1} \circ P_{\mathfrak{O}_2} = P_{\mathfrak{O}_2} \circ P_{\mathfrak{O}_1}$.

Nous passons à la tribu 1-prévisible, 2-optionnelle. Dans ce cas, la présence d'un facteur prévisible nous permet d'expliciter des intervalles stochastiques engendrant la tribu.

Théorème 10. *La tribu $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$ est engendrée par les processus bornés, $(-,+)$-continus et adaptés. Elle est également engendrée par les processus évanescents, les processus déterministes continus et les processus de la forme $X_{s,t}(\omega)$, où X est une martingale càd·bornée. C'est également la tribu engendrée par les processus évanescents et les ensembles de la forme*

$$X(\omega, z) = 1_{]s,s'] \times [T(\omega), T'(\omega)[}(z)$$

où $s<s'$ sont deux constantes, et T et T' sont des temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{F}_{s,t})_{t \geqq 0}$ (on permet à s d'être <0, en convenant qu'alors $]s,s']=[0,s']$ et $\mathscr{F}_{s,t}=\mathscr{F}_{0,t}$).

Preuve. Nous n'insisterons pas sur la première phrase de l'énoncé (qui se démontre comme dans le cas optionnel), et nous bornerons à montrer que les ensembles indiqués engendrent bien la tribu 1-prévisible, 2-optionnelle, avec les processus évanescents. Notons $\mathfrak{R}$ la tribu qu'ils engendrent. On vérifie d'abord aussitôt que tout élément de $\mathfrak{R}$ est un ensemble à la fois 1-prévisible et 2-optionnel. Ensuite, il nous suffit de vérifier qu'un processus déterministe continu, ou une version de martingale de la forme $X_{\underline{s},t}$, sont des processus $\mathfrak{R}$-mesurables. C'est immédiat pour le premier type (avec des temps d'arrêt T, T' constants). Pour le second, désignons par $f_n(s)$ la fonction sur $\mathbb{R}_+$ qui vaut $k2^{-n}$ si $s \in I_k =]k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$, et $f_n(0)=0$. Posons

$$X^n_{st}(\omega)=\sum_{k \geqq 0} X(\omega, f_n(s), t)\, 1_{I_k}(s) + X(\omega, 0, t)\, 1_{\{0\}}(s)$$

Alors X^n_{st} converge vers $X_{\underline{s},t}$ hors d'un ensemble évanescent, et X^n est un processus $\mathfrak{R}$-mesurable, car le processus à un indice $X(\omega, k2^{-n}, .)$ est optionnel par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_{k2^{-n},t})_{t \geqq 0}$, et on sait que les tribus optionnelles de processus à un seul indice sont engendrées par des intervalles stochastiques $[T, T'[$.

Notation. Nous désignerons par P_{-+}, P^*_{-+} les opérateurs de projection et de projection duale relativement à la tribu 1-prévisible, 2-optionnelle (on pourra utiliser les notations analogues P_{++}, P_{--}, P_{+-} pour les autres tribus).

Théorème 11. *Soit μ une mesure aléatoire, et soit A le processus croissant intégrable associé. Pour que A soit 1-prévisible, 2-optionnel, il faut et il suffit que l'on ait*

$$E[\mu(X)] = E[\mu(P_{-+}(X))] \quad \textit{pour tout } X \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$$

Démonstration identique à celle du théorème 9.

III. Lignes d'arret et théorèmes de section

Nous étendons dans ce paragraphe le théorème de section prévisible de Merzbach (théorème de section par *lignes d'arrêt*) aux trois autres tribus, et nous montrons que toute ligne d'arrêt prévisible est annonçable. Il nous sera commode de poser $\mathscr{F}^1_u = \mathscr{F}^1_0$, $\mathscr{F}^2_u = \mathscr{F}^2_0$ pour $u<0$, et de travailler sur $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^2_+$ (cependant, nous interdirons la valeur $-\infty$ aux temps d'arrêt).

Nous avons défini plus haut les tribus optionnelle, prévisible, et 1-prévisible-2-optionnelle. Suivant [9], nous dirons qu'un ensemble est *progressif* si:

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \quad A \cap]-\infty, z[\in (\mathscr{F}_z \otimes \mathfrak{B}(]-\infty, z[)) \vee \mathfrak{E}.$$

Les ensembles progressifs forment une tribu qui contient la tribu optionnelle.

Si A est une partie de $\Omega\times\mathbb{R}^2$, nous noterons, pour tout ω de Ω, $A(\omega)=\{z\in\mathbb{R}^2, (\omega,z)\in A\}$, sa *coupe* en ω. Nous ne nous interessons qu'aux parties de $\Omega\times\mathbb{R}^2$, bornées inférieurement par un élément fixe de $\mathbb{R}^2$. Suivant [9], *l'enveloppe* de A est l'ouvert aléatoire $]A,\infty[$ défini par

$$]A,+\infty[(\omega)=\bigcap_{z\in A(\omega)}]z,+\infty[\qquad \text{pour tout } \omega\in\Omega,$$

et le *début* de A est la frontière de $]A,+\infty[$, qu'on note D_A. Puisque A est borné inférieurement, $(D_A\neq\emptyset)\Leftrightarrow(A\neq\emptyset)$.

Si A est progressif, $]A,+\infty[$ est prévisible, et $[A,+\infty[=]A,+\infty[\cup D_A$ est optionnel d'après le théorème 8. Donc D_A lui même est optionnel. On appelle *ligne d'arrêt* une partie progressive de $\Omega\times\mathbb{R}^2$, bornée inférieurement, qui est indistinguable de son propre début (donc une ligne d'arrêt est simplement un début d'ensemble progressif). D'après ce qui précède. toute ligne d'arrêt est optionnelle.

Plus généralement, on appelle *ligne d'arrêt faible* tout ensemble progressif λ tel que $\lambda\subset D_\lambda$.

Si $\ell=D_A$ est une ligne d'arrêt, on appelle *points exposés* de ℓ les points minimaux dans l pour l'ordre $\leqq$. L'ensemble des points exposés est noté d_ℓ (ou d_A) et appelé *début exposé* de l ou A. Soit l'_n (resp. l''_n) la ligne obtenue en translatant l de $1/n$ vers le haut (resp. la droite); on a $d_l=\bigcup_n l\setminus(l'_n\cup l''_n)$. On en déduit sans peine les propriétés suivantes:

- $d_A\subset\bar{A}$; $\quad D_{d_A}=D_A$;
- si A est progressif, d_A est une ligne d'arrêt faible optionnelle;
- si D_A appartient à $\mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{O}_2$), il en va de même de d_A.

On dira qu'une ligne d'arrêt est *étagée* si son début exposé a toutes ses coupes finies; pour toute ligne d'arrêt l, on définit les propriétés suivantes:

- $(z>l(\omega))\Leftrightarrow(z\in]l,+\infty[(\omega))$
- $(z\geqq l(\omega))\Leftrightarrow(z\in]l,+\infty[(\omega)\cup l(\omega))$
- $(z<l(\omega))\Leftrightarrow(z\notin[l,+\infty[(\omega))$.

Si l' est une autre ligne d'arrêt:

- $(l(\omega)\leqq l'(\omega))\Leftrightarrow(]l',+\infty[(\omega)\subset]]l,+\infty[(\omega))$
- $(l(\omega)<l'(\omega))\Leftrightarrow([l',+\infty[(\omega)\subset]l,+\infty[(\omega))$
- $(l\leqq l')\Leftrightarrow(\text{p.s. }\forall\,\omega\; l(\omega)\leqq l'(\omega))$, $\qquad$ etc...

Dès lors, les notations $[l,l'[$, $]l,l']$, etc..., se comprenennent d'elles mêmes.

On dira qu'une ligne d'arrêt l est *annonçable* s'il existe une suite $(l_n)_{n\geqq 0}$ de lignes d'arrêt, telles que:

$$\bigcap_n]l_n,+\infty[=[l,+\infty[;$$

on dit alors que la suite (l_n) *annonce* l. Toute ligne d'arrêt annonçable est prévisible.

Nous allons définir une notion similaire pour la tribu $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$; on appelera 1-*processus d'arrêt décroissant* (en abrégé 1-pad) tout processus $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, vérifiant:

1) $\forall t$, S_t est un $\mathscr{F}_{\cdot}^{1}$-temps d'arrêt, et une v.a. $\mathscr{F}_t^{2}$-mesurable
2) $t \to S_t$ est un processus décroissant, continu à droite
3) $\lim\limits_{t\to+\infty} S_t(\omega) > -\infty$, $S_t(\omega) = +\infty$ pour t assez voisin de $-\infty$.

On a une notion symétrique (qu'on appellera *2-pad*) en échangeant les rôles de s et t. En vertu de la relation de commutation, pour tout t, S_t est en fait un temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{F}_{st})_{s\in\mathbb{R}}$.

Les 1-pad (ou 2-pad) sont simplement une autre façon de considérer les lignes d'arrêt, comme le montre le lemme suivant:

Lemme 1. a) *Soit l une ligne d'arrêt. Alors le processus (S_t^l) défini par*

$$S_t^l = \inf\{s\colon (s,t) \geqq l\} = \inf\{s\colon (s,t) \in l\}$$

est un 1-pad (avec la convention usuelle $\inf(\emptyset) = +\infty$).

b) *Inversement, si (S_t) est un 1-pad, et si l est le début de l'ensemble des points (S_t, t) $(t \in \mathbb{Q})$, l est une ligne d'arrêt, et on a $S_t = S_t^l$.*

Nous dirons que le 1-pad et la ligne d'arrêt l sont *associés* l'un à l'autre.

Preuve. Soit $A =]l, \infty[$; A est un ensemble prévisible, ouvert, tel que $(z \in A,\ z < z') \Rightarrow (z' \in A)$. Soit $\sigma_t = \inf\{s\colon (s,t) \in A\}$; la dernière propriété de A entraîne que $(t' \geqq t) \Rightarrow (\sigma_{t'} \leqq \sigma_t)$; d'autre part, le caractère progressif de A entraîne que σ_t est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{F}_{st})_s$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $S_t^l = \sigma_{t+}$, ce que nous laissons au lecteur. Tout point exposé de $l = D_A$ est de la forme (S_t^l, t), de sorte que l est le début de l'ensemble des points (S_t, t), pour t réel, ou seulement pour t rationnel.

Inversement, soit B l'ensemble des (S_t, t) pour t rationnel. On vérifie que B est progressif, donc son début l est une ligne d'arrêt, et 1 est aussi le début de $\bar{B}$, donc de l'ensemble des (S_t, t) pour t réel. Nous laisserons au lecteur la vérification que $S = S^l$.

Lemme 2. *Soient ℓ ligne une d'arrêt, S le 1-pad associé à l; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) $l \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$
2) $[l, +\infty[\in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$
3) $\{(S_t, t)_{t\in\mathbb{R}}\} \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$
4) $\forall t$, S_t est prévisible dans la filtration $(\mathscr{F}_s^{1})_{s\in\mathbb{R}}$
5) $\forall t$, S_t est prévisible dans la filtration $(\mathscr{F}_{s,t})_{s\in\mathbb{R}}$

Preuve. Il est clair que 1) $\Leftrightarrow$ 2), car pour toute ligne d'arrêt l on a $]l, +\infty[\in \mathfrak{P}$.

2) $\Leftrightarrow$ 3). Soit l_n la ligne d'arrêt définie par $(s,t) \in l_n \Leftrightarrow (s - 1/n, t) \in l$. On a

$$\{(S_t, t)_{t\in\mathbb{R}}\} = \bigcap_n [l, l_n[= [l, +\infty[\setminus \Big(\bigcup_n [l_n, +\infty[\Big).$$

et on vérifie aisément que $[l_n, +\infty[\in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$ pour tout n.

3) $\Leftrightarrow$ 4). Soit $A=\{(S_t,t)_{t\in\mathbb{R}}\}$; on a $A\in\mathfrak{P}_1$, et cela entraîne que, pour tout t, $\{(\omega,s): (\omega,s,t)\in A\}$ est prévisible dans la filtration $\mathscr{F}^1_{\bullet}$. Or cet ensemble est le graphe de S_t.

4) $\Leftrightarrow$ 5). Il s'agit d'un résultat général: si S est un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_{st})_{s\in\mathbb{R}}$, prévisible dans la plus grande famille $(\mathscr{F}_{s\infty})_{s\in\mathbb{R}}$, S est aussi prévisible dans la petite filtration. En effet, sout (M_s) une martingale bornée de la petite filtration; d'après l'hypothèse (F.4) c'est aussi une martingale de la grande filtration, donc $E(M_S)=E(M_{S-})$ puisque S est prévisible dans la grande filtration. Comme M est arbitraire, S est prévisible dans la petite ([5], chap. VI, th. 62).

4) $\Leftrightarrow$ 2). Il suffit de montrer que $[l,+\infty[\in\mathfrak{P}_1$. Or pour tout t, sa coupe en t est égale à $[S_t,\infty[\in\mathfrak{P}(\mathscr{F}^1_{\bullet})$. Puisque $1_{[l,+\infty[}$ est càd. en t, on en déduit que $[l,+\infty[\in\mathfrak{P}(\mathscr{F}^1_{\bullet})\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R})=\mathfrak{P}_1$.

On dira qu'une ligne d'arrêt l est *1-annonçable* s'il existe une suite $(l_n)_{n\geq 0}$ de lignes d'arrêt vérifiant:

1) $\forall n$, $[l,+\infty[<[l_n,+\infty[$

2) Si S^n (resp. S) désigne le 1-pad associé à l, alors, pour tout t, S^n_t annonce S_t.

On dit alors que la suite (l_n) 1-*annonce* l. On a dans ce cas d'après 4)

$$\bigcap_n [l_n,+\infty[=[l,+\infty[\quad \text{et} \quad l\in\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{O}_2.$$

Théorème 12. *La tribu optionnelle (resp. prèvisible, resp.* 1-*prévisible* 2-*optionnelle) est engendrée par les intervalles stochastiques $[l,l'[\,(l\leq l')$, où l et l' sont des lignes d'arrêt (resp. annonçables, 1-annonçables) et par les ensembles évanescents.*

Preuve. Traitons d'abord le cas prévisible. $\mathfrak{P}$ est engendrée par les ensembles évanescents et les pavés $A\times]z,z']$, $A\in\mathscr{F}_z$. $\mathfrak{P}$ est donc engendrée par les pavés $A\times[z',z''[$, $A\in\mathscr{F}_z$, $z<z'<z''$, et les ensembles évanescents. Or de tels pavés sont de la forme $[l,l'[$, où l et l' sont des lignes d'arrêt annonçables: prendre pour l le début de $A\times\{z'\}$, et pour l' le début de $A\times\{(s',t''),(s'',t')\}$ si $(s',t')=z'$ et $(s'',t'')=z''$.

Le cas de $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{O}_2$ se traite de la même manière, en remarquant que $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{O}_2$ est engendrée, aux évanescents près, par les ensembles $[T,T'[\times[s',s''[$ où T,T' sont des temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_{s,t})_{t\geq 0}$, et $s<s'<s''$.

Le cas optionnel est plus délicat: Soit $\mathfrak{O}'$ la tribu engendrée par les intervalles $[l,l'[$, où l et l' sont des lignes d'arrêt étagées, et par les processus évanescents; on a $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{O}_2\subset\mathfrak{O}'\subset\mathfrak{O}$. D'après le théorème 8, il suffit, pour voir que $\mathfrak{O}'=\mathfrak{O}$, de montrer qu'une martingale bornée, continue à droite, est $\mathfrak{O}'$-mesurable. Soient $M_{s,t}$ cette martingale, $M_{\underline{s},t}$, $M_{s,\underline{t}}$, $M_{\underline{s},\underline{t}}$ ses limites quadrantales, et soit

$$(\Delta M)_{s,t}=M_{s,t}-M_{s,\underline{t}}-M_{\underline{s},t}-M_{\underline{s},t}+M_{\underline{s},t}.$$

Montrons d'abord que $\{|\Delta M|>0\}\in\mathfrak{O}'$. Il suffit de montrer que, pour tout n:

$$A_n=(|\Delta M|>1/n)\cap[(-n,-n),(n,n)]\in\mathfrak{O}'.$$

Or, puisque les trajectoires de M ont des limites dans les quatre quadrants, toutes les coupes de A_n sont finies, et il suffit donc de montrer qu'un ensemble optionnel A dont toutes les coupes sont finies est $\mathfrak{O}'$-mesurable. Définissions par récurrence:

$$A_0=A, \quad l_0=D_A, \quad \lambda_0=d_A$$
$$A_{p+1}=A_p\setminus\lambda_p, \quad l_{p+1}=D_{A_{p+1}}, \quad \lambda_{p+1}=d_{A_{p+1}}.$$

Pour tout p, λ_p et l_p sont $\mathfrak{O}'$-mesurables et on a $A=\bigcup_{p=0}^{\infty}\lambda_p$.

D'autre part $M_{s,t}=(M_{\underline{s},t}+M_{s,\underline{t}}-M_{\underline{s},\underline{t}})1_{\{\Delta M=0\}}+M_{s,t}1_{\{|\Delta M|>0\}}$; le premier terme est dans $\mathfrak{O}'$, quant au second, il est égal à $\sum_n M_{s,t}1_{A_n}$. Comme précédemment, il suffit de montrer que, si λ est le début exposé d'une ligne d'arrêt étagée, $M1_\lambda$ est $\mathfrak{O}'$-mesurable. Or, si A est un ensemble progressif, on a $A\cap\lambda=d_{A\cap\lambda}$ et donc $A\cap\lambda$ est $\mathfrak{O}'$-mesurable. □

Nous étendons maintenant aux autres tribus le théorème de section par des lignes d'arrêt faibles, dû à Merzbach [7].

Théorème 13. *Soient A un ensemble optionnel borné inférieurement, et $\pi(A)$ sa projection sur Ω. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une ligne d'arrêt faible λ, fermée à droite, optionnelle, telle que $\lambda\subset A$ et $P\{\lambda\neq\emptyset\}\geqq P(\pi(A))-\varepsilon$.*

Si de plus A appartient à $\mathfrak{P}$ (resp. à $\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{O}_2$) on peut supposer que λ y appartient aussi, et que D_λ est annonçable (resp. 1-annonçable).

Preuve. Nous traiterons seulement le cas optionnel, les autres étant analogues.

Soit $\mathscr{I}$ le pavage, stable par $(\cup f, \cap f)$, constitué par les réunions finies d'intervalles stochastiques $[l,l'[$, où l et l' sont des lignes d'arrêt bornées inférieurement par z, où z est tel que $A\subset[z,\infty[$. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que $z=0$, et nous nous restreindrons alors à $\mathbb{R}^2_+$. L'algèbre engendrée par $\mathscr{I}$ est incluse dans $\mathscr{I}_\sigma$; le début d'un élément B de $\mathscr{I}_\delta$ est une ligne d'arrêt l, qui est aussi, puisque B est fermé à droite, le début de $l\cap B$. Appliquons alors le raisonnement des théorèmes de section ordinaires ([5], n° IV.84, p. 219): pour tout $\varepsilon>0$, il existe $B\in\mathscr{I}_\delta$ contenu dans A, et tel que $P(\pi(B))\geqq P(\pi(A))-\varepsilon$. Il suffit alors de prendre $\lambda=D_B\cap B$.

Remarque. Dans le cas prévisible, au lieu du pavage $\mathscr{I}$, on travaillera avec les réunions finies de pavés de la forme $A\times[z,z']$ $(z<z',\ A\in\mathscr{F}_{z-})$. L'ensemble B et la ligne d'arrêt faible λ seront alors *fermés*.

Voici le résultat principal de cette section. La démonstration en est adaptée d'une démonstration de Cairoli et Walsh [3], montrant l'annonçabilité de toutes les lignes d'arrêt des tribus du processus de Wiener.

Théorème 14. *Soit A un fermé aléatoire prévisible* (*resp.* 1-*prévisible* 2-*optionnel*). *Alors, le début D_A de A est annonçable (resp. 1-annonçable). En particulier, une ligne d'arrêt l est annonçable (resp. 1-annonçable) si et seulement si elle est prévisible* (*resp.* 1-*prévisible* 2-*optionnelle*).

Nous utiliserons le lemme suivant, établi dans [3]:

Lemme. *Si* $(X_z)_{z\in\mathbb{Q}_+^2}$ *est un processus positif qui vérifie*

1) $\forall z\in\mathbb{Q}_+^2$; X_z *est* $\mathscr{F}_z$*-mesurable,*

2) $z\leqq z' \Rightarrow X_z\geqq E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)$.

Alors, pour tout z *rationnel*

$$P(\inf_{\xi<z} X_\xi=0;\ X_z>0)=0.$$

Preuve du théorème. Comme nous ne travaillons que sur des ensembles aléatoires bornés inférieurement, nous ne restreignons pas la généralité en supposant que $A(\omega)\subset\,]0,\infty[^2$ pour tout ω. Commençons par le cas prévisible.

Soit μ une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}_+^2$, équivalente à la mesure de Lebesgue. Pour tout point z de $\mathbb{Q}_+^2$, posons

$$d_z(\omega)=\mu([z,+\infty[\,\cap[0,l](\omega)),$$

où l désigne le début de A, et soit $X_z=E(d_z|\mathscr{F}_z)$. On a $X_z=0$ sur $\{z\in[l,\infty[\}\in\mathscr{F}_z$, et

$$z\leqq z' \Rightarrow d_z\geqq d_{z'} \Rightarrow X_z\geqq E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)\geqq 0 \qquad \text{p.s.}$$

Choisissons, pour tout z de $\mathbb{Q}_+^2$, une version de X_z, telle que

$$\forall z\leqq z'\ \ X_z\geqq E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)\geqq 0 \text{ (partout)}, \qquad X_z=0 \text{ sur } \{z\in[l,\infty[\}$$

Pour tout point z de $\mathbb{R}_+^{*2}$, posons alors

$$Y_z=\limsup_{z'<z,\, z'\in\mathbb{Q}_+^2,\, z'\to z} X_{z'} \qquad (\text{noter que } Y_z=0 \text{ sur } \{z\in]l,\infty[\})$$

Montrons que $\{Y>0\}\cap A$ est évanescent. Puisque Y et A sont prévisibles, en appliquant le théorème 13, il suffit de démontrer que, si λ est une ligne d'arrêt faible incluse dans $\{Y>0\}\cap A$, dont le début l^1 est annonçable, alors $\lambda=\emptyset$ p.s. Comme $Y=0$ sur $]l,+\infty[$, on a $\lambda\subset l$, et $l^1\geqq l$. Soit (l_n^1) une suite de lignes d'arrêt annonçant l^1, et soit $Y^n(\omega)=\mu(]l_n^1,l^1](\omega))$, qui tend vers 0 pour $n\to\infty$. Pour tout rationnel $z\in]l_n^1,l^1]$ on a $d_z\leqq Y^n$ puisque $l^1\geqq l$, et donc $X_z\leqq E(Y^n|\mathscr{F}_z)$. D'après le lemme maximal de Cairoli, quitte à remplacer la suite (l_n^1) par une suite extraite, on peut supposer que $\sup_z E(Y^n|\mathscr{F}_z)$ tend vers 0 p.s.; alors on a aussi $\sup_z X_z 1_{]l_n^1,l^1]}\to 0$ p.s., et enfin $Y=0$ p.s. sur l^1, ce qui entraîne que λ est évanescente.

Soit alors $A_n=\{(\omega,z)\in\Omega\times\mathbb{Q}_+^2:\ X_z(\omega)\leqq 1/n\}$. Nous allons montrer que le début l_n de A_n annonce l, ce qui achèvera la démonstration du cas prévisible. Il est clair que l_n croît, et que $l_n\leqq l$. Comme $l=D_A$ et A est fermé, tout point exposé z de l appartient à A; d'après ce qui précède on a $Y_z=0$, donc $z\in]l_n,\infty[$; on en déduit que $l_n<l$, et il reste à prouver que la ligne d'arrêt $l'=\sup_n l_n$ est égale à l p.s..

Or supposons le contraire: il existe alors un z rationnel tel que $P\{z\in]l', l[\}>0$, donc $d_z 1_{]l',l[}$ n'est pas négligeable, et $X_z 1_{]l',l[}$ non plus. Mais par ailleurs si $z \in]l_n, l[$ pour tout n, on a $\inf_{y \leqq z} X_y = 0$, donc $X_z = 0$ d'après le lemme, ce qui constitue la contradiction cherchée.

Passons au cas où A appartient à $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$. Nous reprenons le raisonnement précédent, mais en remplaçant l'ensemble $\mathbb{Q}_+^2$ par l'ensemble $D = \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{R}_+$ des points «1-rationnels»; X_z est donc défini pour $z \in D$, et nous en choisissons une version telle que, pour tout (ω, s) avec s rationnel, $X_{s,\bullet}(\omega)$ soit une fonction càdlàg. en t-ce qui est possible, car c'est une $\mathscr{F}_\bullet^2$-surmartingale d'espérance continue. De même, nous modifions la définition de Y_z en posant, pour $z = (s, t)$

$$Y_{s,t}(\omega) = \limsup_{s' \to s} X_{s',t}(\omega), \qquad \text{avec } s' \in \mathbb{Q}_+, \ s' < s.$$

Il est facile de voir que ce processus est $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$-mesurable. Exactement comme ci-dessus, on montre que $\{Y > 0\} \cap A$ est évanescent, et que l_n 1-annonce l, le lemme du début de la démonstration étant remplacé par la propriété classique, suivant laquelle une surmartingale positive à un indice conserve la valeur 0 à partir de sa première valeur d'adhérence nulle.

Remarques. a) On aura noté que la partie prévisible du théorème 14 se démontre sans faire appel aux résultats de régularité des trajectoires des martinales.

b) Merzbach a anoncé le théorème 14, comme corollaire du théorème de section prévisible, mais sans indiquer sa démonstration ([11], corollaire 2.9). Il en affaiblit même légèrement les hypothèses: *si A est prévisible* (*1-prévisible 2-optionnel*) *et contient son début D_A, alors celui-ci est annonçable* (*resp.* *1-annonçable*). En fait ce résultat se ramène au théorème 14, et il est vrai en supposant seulement que le début *exposé* d_A est contenu dans A. Indiquons rapidement la démonstration de ce point.

Commençons par le cas où $A \in \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{O}_2$. Pour tout t, on a $(S_t, t) \in d_A$. Alors la coupe A_t de A est dans $\mathfrak{P}(\mathscr{F}_\bullet^1)$ et continent son début S_t, donc (résultat classique pour les processus à un indice) S_t est prévisible dans la filtration $\mathscr{F}_\bullet^1$. Le lemme 2 entraîne alors que $D_A \in \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$. Mais D_A étant fermé, le théorème 14 entraîne que D_A est 1-annonçable.

Si A est prévisible, ce raisonnement entraîne que D_A appartient à $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{O}_2$ et $\mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{O}_1$, donc à leur intersection $\mathfrak{P}$, et le théorème 14 permet à nouveau de conclure.

References

1. Bakry, D.: Sur la régularité des trajectoires des martingales à deux indices. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **50**, 149–157 (1979)
2. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. **134**, 111–183 (1975)
3. Cairoli, R., Walsh, J.B.: Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **44**, 279–306 (1978)
4. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
5. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Propabilitités et potentiel, vol. 1. Paris: Hermann 1975; Vol. 2, Paris: Hermann 1980

6. Doleans, C., Meyer, P.A.: Un petit théorème de projection pour processus à deux indices. Sém. Prob. XIII. Lecture Notes in Math. No. **721**, 204–215. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
7. Merzbach, E.: Stopping for two dimensionnal stochastic process. A paraître dans Stochastic Processes and Their Applications 1980
8. Meyer, P.A.: Une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Sém. Prob. XIII, Lecture Notes **721**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
9. Meyer, P.A., Bakry, D.: Exposés sur la théorie des processus à deux indices *A* paraître. Colloque E.N.S.T. Lect. Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1981
10. Millet, A., Sucheston, L.: On regularity of multiparameter amarts and martingales. *A* paraître.
11. Merzbach, E.: Processus stochastiques à indices partiellement ordonnés. Rapport interne n°55, Centre de Math. Appl. Ecole Polytechnique 1980

Reçu le 20 Mai 1980