Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
53, 123–146 (1980)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Changements de temps de processus de markov

G. Weidenfeld

U.E.R. de Math., 33 Rue Saint Leu F-80039 Amiens cedex

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des processus changés de temps d'un processus fortement markovien.

Si C_t est un processus croissant adapté à une filtration $\mathbf{F}_t$ sur Ω satisfaisant aux conditions habituelles, on définit l'inverse à droite j de C par $j_t(\omega) = \inf\{u \mid C_u(\omega) > t\}$. On construit ainsi une nouvelle filtration $\bar{F}_t = \mathbf{F}_{j_t}$ qui est encore continue à droite et complète.

En particulier si $(\Omega, \mathbf{F}_t, X_t, \theta_t, (P^x)\, x \in E)$ est un processus fortement markovien et C une fonctionnelle additive de ce processus on sait que le processus changé de temps $(\Omega, \bar{\mathbf{F}}_t, (X_{j_t}), (\hat{\theta}_{j_t}), (P^x)\, x \in E)$ est encore fortement markovien. Par contre si C n'est pas continue et si T désigne un saut de cette fonctionnelle le processus changé de temps $\bar{X}_t(.) = X_{j_t}(.)$ est constant sur l'intervalle $[C_T(.), (C_T + S_T\, C_T)(.)[$.

Il s'ensuit que ce processus est non homogène. Ceci conduit a introduire un processus a deux composantes dont la prmière est linéaire sur les intervalles de type précédent, ce qui assurera le caractère markovien du processus. Plus précisement on définit sur:

$\hat{\Omega} = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ un semi groupe $(\hat{\theta}_t)$ d'opèrateurs de translation en posant

$$\hat{\theta}_t(\lambda, \omega) = (\bar{R}_{t-\lambda}(\omega), \theta_{j_{t-\lambda}}(\omega)) \quad \text{où} \quad \bar{R}_{t-\lambda}(\omega) = C_{j_{t-\lambda}}(\omega) - (t-\lambda).$$

Définissant alors $\hat{X}_t$ par $\hat{X}_t(\lambda, \omega) = (\bar{R}_{t-\lambda}(\omega),\ X_{j_{t-\lambda}}(\omega))$; on établit que le processus $(\hat{\Omega}, \hat{\mathbf{F}}_t, \hat{\theta}_t, \hat{X}_t, \hat{P}^{(\lambda, x)} = (\varepsilon_\lambda \otimes P^x))$ est fortement markovien, $(\hat{\mathbf{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ étant une famille de tribu satisfaisant aux conditions habituelles et contenant la filtration naturelle de $\hat{X}$.

En fait ce résultat ne dépend que du comportement de X et C sur l'ensemble aléatoire $\bar{M}$ des points de croissance de C, et les hypothèses minimales pour sa validité s'expriment en terme de systèmes régénératifs.

Nous étudions ensuite le «système de Levy» de X.

Deux raisons nous incitent à en faire une étude directe: d'une part nous ne connaissons pas de conditions générales sous lesquelles $\hat{X}$ soit un processus

0044-3719/80/0053/0123/$04.80

droit et surtout nous nous proposons de calculer des projections duales prévisibles relatives à la filtration $(\hat{\mathbf{F}}_t)$.

La première étape consiste en la description des $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêts totalement inaccessibles. Ceux-ci se déduisent aisément des $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêts totalement inaccessibles qui eux-mêmes se décomposent en trois types. Un premier type est lié aux temps de saut du processus initial X que l'on suppose droit. Un second est lié aux sauts de la fonctionnelle additive C; tandis que la troisième classe est en relation avec l'ensemble M des extrémités gauche des intervalles contigus à l'ensemble aléatoire $\bar{M}$.

Soient f une fonction borélienne positive définie sur $(\mathbb{R}_+ \times E - \bar{B})^2$ nulle sur la diagonale et $\hat{K}_t = \sum_{s \leqq t} f(\hat{X}_{s^-}, \hat{X}_s)$, la sommation portant sur l'ensemble aléatoire réunion des graphes des $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêts totalement inaccessibles. On montre que le calcul de la projection $\hat{\mathbf{F}}$ duale prévisible de $\hat{K}$: ${}^p\hat{K}$ se ramène en fait grâce a un résultat de [7] à celui de la projection $\mathbf{F}$ duale prévisible d'un processus croissant K.

La description précédemment esquissée des $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêts totalement inaccessibles permet alors de décomposer K_t en somme de processus croissants dont on sait calculer les projections duales en utilisant les théories du système de Levy et du balayage.

I. Notations et préliminaires

1) Définitions

Soit E un sous espace borélien d'un espace métrique compact. On distingue dans E un point cimetière δ. On désignera par $\mathscr{E}$ la tribu des ensembles boreliens de E et par $\mathscr{E}^*$ celle des ensembles universellement mesurables.

Ω désigne l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E qui conservent la valeur δ après leur temps d'entrée dans $\{\delta\}$ X_t et Θ_t désignent les applications coordonnées et les opérateurs de translations: pour tous $(s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\omega \in \Omega$, on a par définition:

$$X_s(\omega) = \omega(s), \qquad X_s(\Theta_t(\omega)) = X_{s+t}(\omega).$$

On pose $X_\infty(\omega) = \delta$, $\Theta_\infty(\omega) = [\delta]$, l'application constante sur δ.

$\mathbf{F}^0_\infty$ (resp. $\mathbf{F}^0_t$) désigne la tribu sur Ω engendrée par les variables $X_s, s \geqq 0$ (resp. $X_s, 0 \leqq s \leqq t$).

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathbf{F}^0_\infty)$, $\mathbf{F}^p_\infty$ désigne la tribu P complétée de $\mathbf{F}^0_\infty$ et F^p_t la tribu obtenue par adjonction des ensembles P négligeables de F^p_∞ à $\mathbf{F}^0_t + = \bigcap_{\varepsilon > 0} F^0_{t+\varepsilon}$.

D'autre part on se donne pour tout $x \in E$ une probabilité p^x sur $(\Omega, \mathbf{F}^0)$ et on suppose que $p^\delta = \varepsilon_{[\delta]}$ et que l'application $x \to p^x(A)$ est $\mathscr{E}^*$-mesurable pour tout $A \in \mathbf{F}^0$. Si $\mathfrak{N}$ désigne l'ensemble des lois de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$, pour toute μ de $\mathfrak{N}$ on définit la probabilité $p^\mu = \int \mu(sx)\, p^x$ par intégration et on pose

$$\mathbf{F}^\mu = \mathbf{F}^{p^\mu}_\infty, \qquad \mathbf{F}^\mu_t = \mathbf{F}^{p^\mu}_t, \qquad \mathbf{F} = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{N}} \mathbf{F}^\mu, \qquad \mathbf{F}_t = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{N}} \mathbf{F}^\mu_t.$$

La famille $(\mathbf{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille croissante continue à droite de sous tribus de $\mathbf{F}$. Pour tout t et tout μ de $\mathfrak{N}$, F_t contient les ensembles μ négligeables de F.

On désignera par ξ le temps de mort du processus X:

$$\xi(\omega)=\operatorname{Inf}\{t\geqq 0, X_t(\omega)\in[\delta]\}$$

ξ est un $\mathbf{F}$ temps d'arrêt et $X_\xi\equiv\delta$.

Soit $(C_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus croissant, continu à droite, $(\mathbf{F}_t)$ adapté. On n'exige pas que $C_0\equiv 0$, mais par contre on supposera que

$$C_\infty=\lim_{t\to\infty} C_t=C_\xi. \tag{1}$$

On désigne par $\bar{M}$ l'ensemble fermé aléatoire des points de croissance de C et par M le fermé droit aléatoire minimal d'adhérence $\bar{M}$.

Tout point de M isolé à droite dans M est aussi isolé à gauche dans M.

Nous définirons enfin les fonctions aléatoires suivantes:

$$D_t(\omega)=\inf\{s\,|\,s>t, (s,\omega)\in\bar{M}\}=\inf\{s\,|\,s>t, (s,\omega)\in M\} \tag{2}$$

(on convient que $\inf(\emptyset)=+\infty$)

$$L_t(\omega)=\sup\{s\,|\,0\leqq s\leqq t, (s,\omega)\in\bar{M}\}=\sup\{s\,|\,0\leqq s\leqq t, (s,\omega)\in M\} \tag{3}$$

(avec la convention usuelle $\sup[\emptyset]=0$).

$$\ell_t(\omega)=\sup\{s\,|\,0\leqq s<t, (s,\omega)\in\bar{M}\}. \tag{4}$$

Nous allons maintenant rappeler certains résultats sur les changements de temps ([7]).

2) *Changements de temps*

Nous nous placerons dans le cadre décrit précédemment.

Soit

$$z=\inf\{t\,|\,C_t=+\infty\})$$

z est un $\mathbf{F}$ temps d'arrêt vérifiant $C_z=C_\infty$ et en vertu de la relation (1) on a $z\leqq\xi$.

Désignons par j et i les inverses à droite et à gauche de C définis par:

$$\begin{cases} j_t \equiv\inf\{s\,|\,C_s>t\} & \text{si } t<\infty \\ j_\infty=z \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} i_t =\sup\{s\,|\,C_s<t\} & \text{si } t>0 \\ i_0 =0 \end{cases} \tag{6}$$

La relation suivante sera d'un usage courant:

$$a\leqq C_b\Leftrightarrow i_a\leqq b \qquad (a\in\mathbb{R}_+,\ b\in\bar{\mathbb{R}}_+). \tag{7}$$

Pour tout t, j_t et i_t sont des $\mathbf{F}$ temps d'arrêts; ce qui nous permet en posant $\bar{\mathbf{F}}_t = \mathbf{F}_{j_t}$ de définir une filtration $(\bar{\mathbf{F}}_t)$ continue à droite et complète telle que $\bar{\mathbf{F}}_\infty = \mathbf{F}_z$. (j_t) est alors un processus croissant $\bar{\mathbf{F}}$ adapté dont les inverses à droite et à gauche sont C et B.

$$C_t = \inf\{s \mid j_s > t\}; \qquad B_t = \sup\{s \mid j_s < t\}.$$

On vérifie que $B_t = C_{t^-} = \sup_{s<t} C_s$, ce qui implique par symétrie que $i_t = j_{t^-}$.

De même si $\bar{z} = \inf\{t \mid j_t = +\infty\}$, $\bar{z}$ est un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt satisfaisant à $j_{\bar{z}} = j_\infty = z$, $\bar{z} = B_\infty = C_\infty$.

Considérons enfin les composés des processus précédemment définis:

$$\begin{array}{ll} D'_t = j_{C_t} & \bar{D}'_t = C_{j_t} \\ \ell'_t = i_{B_t} & \bar{\ell}_t = B_{i_t} \\ R_t = (D'_t - t \wedge z) & \bar{R}_t = \bar{D}'_t - t \wedge \bar{z}. \end{array} \tag{8}$$

Notons que ces processus sont liés aux fonctions D_t et ℓ_t précedemment définie par les relations

$$\begin{cases} D'_t = D_t \wedge z \\ \ell'_t = \ell_t. \end{cases} \tag{9}$$

Enfin on a les relations:

$$\begin{array}{lll} -)\, z \geqq D'_t \geqq t \wedge z & \text{et} & 1_{\{D'_t > t \wedge z\}} = 1_{\{z \geqq D_t > t\}} = \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{i_s \leqq t < j_s\}} \\ -)\, \bar{z} \geqq \bar{D}'_t \geqq t \wedge \bar{z} & \text{et} & 1_{\{\bar{D}_t > t \wedge \bar{z}\}} = \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{B_s \leqq t < C_s\}} \\ -)\, \ell_t \leqq t \wedge z & \text{et} & 1_{\{\ell_t < t \wedge z\}} = \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{i_s < t \leqq j_s\}} \\ -)\, \bar{\ell}_t \leqq t \wedge \bar{z} & \text{et} & 1_{\{\bar{\ell}_t < t \wedge \bar{z}\}} = \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{B_s < t \leqq C_s\}}. \end{array}$$

Pour tout t, ℓ_t (respectivement $\bar{\ell}_t$) est un $\mathbf{F}$ (respectivement $\bar{\mathbf{F}}$) temps d'arrêt, et le processus ℓ_t (resp. $\bar{\ell}_t$) est $\mathbf{F}$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}$) prévisible.

L'ensemble aléatoire $G = \{\ell_t = t \wedge Z\}$ (resp. $\bar{G} = \{\bar{\ell}_t = t \wedge \bar{Z}\}$) est $\mathbf{F}$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}$) prévisible et ces ensembles sont liés par les relations:

$$\begin{array}{l} t \wedge z \in G \Rightarrow B_{t \wedge z} \in \bar{G} \\ t \wedge \bar{z} \in \bar{G} \Rightarrow i_{t \wedge \bar{z}} \in G. \end{array} \tag{11}$$

Notons que G représente l'ensemble des points d'accumulation à gauche de points de $\bar{M}$ auquel on adjoint (éventuellement) le graphe du temps d'arrêt z.

Pour tout t, D'_t (resp. $\bar{D}'_t$) est un $\mathbf{F}$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}$) temps d'arrêt, mais processus D'_t n'est pas $(\mathbf{F})$ adapté, alors que $\bar{D}'_t$ est $(\bar{\mathbf{F}})$ adapté.

L'ensemble $R = \{D'_t = t \wedge z\}$ est un ensemble $\mathbf{F}$ progressivement mesurable lié à l'ensemble $\bar{\mathbf{F}}$ optionnel $\bar{R} = \{\bar{D}'_t = t \wedge \bar{z}\}$ par les relations:

$$\begin{array}{l} t \in R \Rightarrow C_t \in \bar{R} \\ t \in \bar{R} \Rightarrow j_t \in R. \end{array} \tag{12}$$

Remarquons encore que R est réunion de l'ensemble aléatoire des points d'accumulation à droite de points de M (ou de $\bar{M}$) et du graphe du temps d'arrêt z.

Rappelons enfin les résultats de théorie générale que nous utiliserons:

R.1.: Si T est un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt inférieur à $\bar{z}$, j_T est un $\mathbf{F}$ temps d'arrêt et les tribus $\bar{\mathbf{F}}_T$ et $\mathbf{F}_{j_T}$ coïncident ([7] proposition 2 et corollaire 7).

R.2.: Un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt T inférieur à $\bar{z}$ est totalement inaccessible si et seulement si:

a) le graphe de la variable aléatoire i_T est disjoint de tout graphe de $\mathbf{F}$ temps d'arrêt prévisible.

b) le graphe de T est presque sûrement inclus dans $\bar{G}$ ([7] corollaire 5).

R.3.: Si $\bar{\kappa}_t$ est un processus croissant satisfaisant à $\bar{\kappa}_{\bar{z}-}=\bar{\kappa}_\infty$ et $\bar{\kappa}_0=0$, et dont le support est inclus dans $\bar{G}$, sa projection duale $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible $^{\bar{p}}\bar{\kappa}_t$ est égale à $^p\kappa_{j_t}$, où $^p\kappa$ est la projection duale $\mathbf{F}$ prévisible du processus croissant $\kappa_t=\bar{\kappa}_{C_t}$ ([7] théorème 9).

3) *Présentation des hypothèses et résultats préliminaires*

On sait ([5]) que si X est un processus fortement markovien et C une fonctionnelle additive continue le processus $\bar{X}_t=X_{j_t}$ est encore fortement markovien. Mais on peut voir que cette propriété ne dépend en fait que du comportement de X et C sur l'ensemble $\bar{M}$. Nous allons préciser ce point en introduisant les hypothèses minimales pour la solution de ce problème dans le cas où C est discontinue.

Posons
$$\Gamma=\{(t,\omega)|\,C_t(\omega)>B_t(\omega)\},$$

Γ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêts. D'autre part le fermé droit minimal M d'adhérence $\bar{M}$ peut également s'écrire comme réunion des graphes des $\mathbf{F}$ temps d'arrêts $D_t(t\in\eta\mathbb{R}_+)$.

Soient
$$\hat{M}=M\cup\Gamma \quad \text{et} \quad \tilde{M}=\hat{M}\cup[[0]].$$

Nous les deux hypothèses suivantes:

H.1.: ($\hat{M}$ additivité): Pour toute variable aléatoire positive S et tout $\mathbf{F}$ temps d'arrêt T dont le graphe est inclus dans $\hat{M}$, on a: pour tout ω de

$$\Omega\; C_{S(\omega)+T(\omega)}(\omega)=C_T(\omega)+C_{s(\omega)}(\Theta_T(\omega)). \tag{13}$$

H.2.: ($\tilde{M}$ regenération): Pour tout $\mathbf{F}$ temps d'arrêt T dont le graphe est inclus dans $\tilde{M}$ et pour tout B de $\mathbf{F}$ on a:

$$E^\mu[\Theta_T^{-1}(B)|\mathbf{F}_T]=P^{X_T}(B) \quad P^\mu\,\text{ps pour toute } \mu \text{ de } \mathfrak{M}. \tag{14}$$

Exemple: $\bar{M}$ est un fermé aléatoire homogène M est le fermé droit minimal associé. Le processus croissant $L_t=\sup\{s|s\leqq t, s\in M\}$ vérifie la relation $(L_{s+t}-t)^+=L_s\circ\Theta_t$.

L'ensemble des sauts de L est inclus dans M. L vérifie la propriété H_1, mais n'est pas une fonctionnelle additive.

Quant à la propriété H_2, elle est dans ce cas équivalente à la propriété de régénération de [10].

Revenons au cas général, nous commencerons par établir le résultat suivant:

Lemme 1. *Soit T un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt.*

a) *le graphe du* $\mathbf{F}$ *temps d'arrêt j_T est inclus dans $\hat{M}$.*

b) *Si* $B \in \mathbf{F}, E^\mu(\Theta_{j_T}^{-1}(B)|\bar{\mathbf{F}}_T) = P^{X_{j_T}}(B)$ P^μ p.s. *pour toute μ de $\mathfrak{N}$.*

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$ et $t = j_T(\omega)$ alors

$$\begin{aligned} t &= t\, 1_{\{C_t = B_t\}}\, 1_{\bar{M}}(t) + t\, 1_{\{C_t > B_t\}}\, 1_{\bar{M}}(t) \\ &= D_t\, 1_{\{C_t = B_t\}} + t\, 1_\Gamma(t). \end{aligned}$$

et a) résulte de la rélation $\hat{M} = \bigcup_{t \geqq 0} [[D_t]] \cup \Gamma$. Quant à b) il résulte de H_2, de a) et de la relation $\mathbf{F}_{j_T} = \bar{\mathbf{F}}_T$ (R.1.).

Le lemme 1 permet de mettre en évidence une propriété «presque markovienne» du système $(\Omega, (\bar{\mathbf{F}}_t), (X_{j_t}), \ldots)$. De même le résultat suivant va établir que j est «presque» une $\bar{\mathbf{F}}$ fonctionnelle additive.

Nous ferons dorénavant les conventions suivantes:

Si $a < 0$ $j_a = 0$ et $\bar{R}_a = -a$.

On peut alors établir le résultat suivant:

Lemme 2. *Si S est une variable aléatoire* $\mathbf{F}$ *measurable positive et T un* $\bar{\mathbf{F}}$ *temps d'arrêt, on a:*

$$j_{S+T}(\omega) = j_T(\omega) + j_{(S - \bar{R}_T)(\omega)}(\theta_{j_T}(\omega)) \tag{15}$$

pour tout ω de Ω.

Démonstration. — Sur $\{S < \bar{R}_T\}$ on a $T \leqq S + T < C_{j_T}$. Par suite $j_{S+T} = j_T$ alors que $j_{(S - \bar{R}_T)(\omega)} \equiv 0$.

— Sur $\{S - \bar{R}_T \geqq 0\}$ on a

$$j_{(S - \bar{R}_T)(\omega)}(\theta_{j_T}(\omega)) = \operatorname{Inf}\{u \mid C_u(\theta_{j_T}(\omega)) > (S - \bar{R}_T)(\omega)\}.$$

Puisque d'après le lemme 1 $[[j_T]] \subseteq \hat{M}$, il résulte de H.1 que:

$$C_u \circ \theta_{j_T}(\omega) = C_{u + j_T}(\omega) - C_{j_T}(\omega).$$

Par suite on a:

$$j_{(S - \bar{R}_T)(\omega)}(\theta_{j_T}(\omega)) = \operatorname{Inf}\{u \mid C_{u + j_T}(\omega) > (S + T)(\omega)\} = j_{S+T}(\omega) - j_T(\omega).$$

Il résulte de la relation (15) que, contrairement au cas où C est continue, le système (X_{j_t}, θ_{j_t}) ne permet pas de définir un semi groupe d'opérateurs de translation et un processus homogène sur Ω.

Nous allons, en nous inspirant d'une méthode utilisée dans [10] construire dans le prochain paragraphe une réalisation dans un «espace plus grand» du processus changé de temps qui sera fortement markovienne.

II. Construction d'un processus de Markov

Posons $\hat{\Omega}=\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ et définissons sur $\hat{\Omega}$ les opérateurs $(\hat{\theta}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par:

$$\hat{\theta}_t(\lambda,\omega)=\begin{cases}(\lambda-t,\omega) & \text{si } \lambda>t\\ (C_{j_{t-\lambda}}(\omega)-(t-\lambda),\theta_{j_{t-\lambda}}(\omega)) & \text{si } t\geqq\lambda\end{cases}.$$

Notons qu'avec les conventions faites précédemment:

$$\hat{\theta}_t(\lambda,\omega)=(\bar{R}_{t-\lambda}(\omega),\theta_{j_{t-\lambda}}(\omega)).$$

On a alors:

Lemme 3. *$\hat{\theta}_{s+t}=\hat{\theta}_t(\hat{\theta}_s)$ pour tous $(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.*

La démonstration de ce lemme est routinière et sera omise.

Définition de $\hat{X}_t$. On pose $\hat{X}_t(\lambda,\omega)=(\bar{R}_{t-\lambda}(\omega), X_{j_{t-\lambda}}(\omega))$. Notons que si $\lambda>t$ on a $\hat{X}_t(\lambda,\omega)=(\lambda-t,X_0(\omega))$ et qu'en particulier:

$$\hat{X}_0(\lambda,\omega)=\begin{cases}(\lambda,X_0(\omega)) & \text{si } \lambda>0\\ (C_{j_0}(\omega),X_{j_0}(\omega)) & \text{si } \lambda=0\end{cases}.$$

$\hat{X}$ est à valeurs $\hat{E}=\overline{\mathbb{R}}_+\times E$ que l'on munit de la topologie produit.

On distingue dans $\hat{E}$ le point cimetière $\hat{\delta}=(+\infty,\delta)$ et on pose $\hat{X}_\infty(\hat{\omega})=\hat{\delta}$ et $\hat{\theta}_\infty(\hat{\omega})=[\hat{\delta}]$; $\hat{\omega}\in\hat{\Omega}$, ou $[\hat{\delta}]=(+\infty,\delta)$. On désignera par $\hat{\xi}(\hat{\omega})$ le temps d'entrée de $\hat{X}(\hat{\omega})$ dans $\{\hat{\delta}\}$. Notons que si $C_\infty(\omega)=C_\xi(\omega)=+\infty\hat{\xi}(\hat{\omega})=+\infty$ et que si $C_\infty(\omega)=C_\xi(\omega)<\infty$ on aura $\hat{X}_t(\lambda,\omega)=\hat{\delta}$ si et seulement si $j_{t-\lambda}(\omega)\geqq z$ et $X_{j_{t-\lambda}}(\omega)=\delta$ soit, puisque dans ce cas $z\leqq\xi$.

$$\hat{X}_t(\lambda,\omega)=\hat{\delta}\Leftrightarrow j_{t-\lambda}(\omega)\geqq\xi(\omega)\Leftrightarrow t-\lambda\geqq C_\xi(\omega)=C_\infty(\omega).$$

Par suite dans tous les cas $\hat{\xi}(\lambda,\omega)=C_\infty(\omega)+\lambda$ et il est clair que si $s\geqq\hat{\xi}(\hat{\omega})\,\hat{X}_s(\hat{\omega})=\hat{\delta}$.

Enfin les trajectoires de $\hat{X}$ sont continues à droite.

De plus, nous avons facilement le résultat suivant:

Lemme 4. *$\hat{X}$ est $\hat{\theta}$ homogène: pour tous (s,t,λ,ω), $\hat{X}_{s+t}(\lambda,\omega)=X_s\circ\hat{\theta}_t(\lambda,\omega)$.*

Nous allons définir une filtration sur $\hat{\Omega}$. On peut naturellement considérer la filtration engendrée par $\hat{X}$, soit $\mathbf{G}_t^0=\sigma(\hat{X}_s,s\leqq t)$. Mais en procédant ainsi on ne tient pas compte du comportement de X en dehors de l'ensemble aléatoire $\bar{M}$.

Nous sommes donc amenés à introduire une famille $(\hat{\mathbf{F}}_t^0)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sous tribus de $(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}\otimes\overline{\mathbf{F}}_\infty)$ de la façon suivante:

Convenons que si $U\subset\hat{\Omega}$ et si $\lambda\in\mathbb{R}_+$, U_λ désignera la section de $\hat{U}$ en λ: $\hat{U}_\lambda=\{\omega|(\lambda,\omega)\in\hat{U}\}$.

Posons alors:

$$\hat{\mathbf{F}}_t^0 = \{\hat{U} \mid \hat{U} \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \bar{F}_\infty, \hat{U}_\lambda 1_{\{t \geqq \lambda\}} \in \bar{\mathbf{F}}_{t-\lambda} \text{ et } \hat{U}_\lambda 1_{\{t<\lambda\}} \in \mathbf{F}_0\}$$

$(\hat{\mathbf{F}}_t^0)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille croissante continue à droite de sous tribus de $(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \bar{\mathbf{F}}_\infty)$ et $\hat{X}_t$ est $\hat{\mathbf{F}}_t^0$ adapté. Désignons alors par $\hat{\mathbf{F}}^0$ (resp. $\mathbf{G}^0$) la réunion des $\hat{\mathbf{F}}_t$: $\hat{\mathbf{F}}^0 = \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \hat{F}_t^0$ (resp. $\mathbf{G}^0 = \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} G_t^0$) et par $\hat{\mathbf{F}}^*$ (resp. $\mathbf{G}^*$) la complétée universelle de $\hat{\mathbf{F}}^0$ (resp. $\mathbf{G}^0$).

Si $(\lambda, x) \in \hat{E}$ on pose $\hat{P}^{(\lambda,x)} = \varepsilon_\lambda \otimes P^x$ et si $\hat{\mu}$ est une loi de probabilité sur $\hat{E}$ (ce que l'on notera $\hat{\mu} \in \mathfrak{N}$), $\hat{P}^{\hat{\mu}}$ est défini par intégration: $\hat{P}^{\hat{\mu}} = \int \hat{P}^{(\lambda,x)} d\hat{\mu}(\lambda, x)$. Soit alors $\mathscr{N} = \bigcap_{\hat{\mu}\in\mathfrak{N}} \mathscr{N}_{\hat{\mu}}$ où $\mathscr{N}^{\hat{\mu}} = \{\hat{U} \in \hat{\mathbf{F}}^*, \hat{P}^{\hat{\mu}}(\hat{U}) = 0\}$.

Finalement on définit $\hat{\mathbf{F}}_t = \hat{\mathbf{F}}_t^0\, V\mathscr{N}$, $\mathbf{G}_t = \mathbf{G}_t^0\, V\mathscr{N}$, $\hat{\mathbf{F}} = V\hat{\mathbf{F}}_t\, \mathbf{G} = V\mathbf{G}_t$.

$(\hat{\mathbf{F}}_t)$ (resp. $\mathbf{G}_t$) est une famille continue à droite de sous tribus de $\hat{F}\hat{P}^\mu$ complète pour toute loi $\hat{\mu} \in \mathfrak{N}$.

Nous commencerons par remarquer que les propriétés relatives au système $(\hat{\Omega}, (\hat{\mathbf{F}}_t), \hat{P}^{(\lambda,x)})$ se déduisent de celles relatives au système $(\Omega, (\bar{\mathbf{F}}_t), P^x)$. A cet effet nous introduirons les notations suivantes:

Notations. – Si $\hat{T}(\lambda, \omega)$ est un fonction positive définie sur $\hat{\Omega}$ on pose $\hat{T}_\lambda(\omega) = (\hat{T}(\lambda, \omega) - \lambda) \vee 0$.

– Si $\hat{Z}_t(\lambda, \omega)$ est un processus sur $\hat{\Omega}$ on définit un processus $\hat{Z}^\lambda$ sur Ω par $\hat{Z}_t^\lambda(\omega) = \hat{Z}_{t+\lambda}(\lambda, \omega)$.

– Si $\bar{T}$ est une fonction positive sur Ω on pose $\hat{T}(\lambda, \omega) = \bar{T}(\omega) + \lambda$.

– Si $\bar{Z}$. est un processus sur Ω, on définit un processus $\hat{Z}$ sur $\hat{\Omega}$ par $\hat{Z}_t(\lambda, \omega) = \bar{Z}_{t-\lambda}(\omega)\, 1_{\{t>\lambda\}}$.

On a alors:

Proposition 5. a) *Si $\hat{T}$ est un $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt (resp. prévisible), $\hat{T}_\lambda$ est pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt (resp. prévisible).*

b) *Si $\bar{T}$ est un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt (resp. prévisible), $\hat{T}(\lambda, \omega) = \bar{T}(\omega) + \lambda$ est un $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt (resp. prévisible).*

c) *$\hat{T}$ est un $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt totalement inaccessible si et seulement si pour tout λ, $\hat{T}_\lambda$ est un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt totalement inaccessible.*

d) *Pour tout $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt $\hat{T}$ on a:*

$$(\hat{\mathbf{F}}_{\hat{T}}^0)_\lambda \subseteq \bar{\mathbf{F}}_{\hat{T}_\lambda} \qquad \text{où } (\hat{\mathbf{F}}_\cdot^0)_\lambda = \{\hat{u} \mid \hat{u} \in \hat{\mathbf{F}}_\cdot^0\}$$

e) *Sie $\hat{Z}$ est $\hat{\mathbf{F}}$ prévisible $\hat{Z}_\cdot^\lambda(\ ) = \hat{Z}(\lambda, .)$ est $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible pour tout λ. Réciproquement si $\bar{Z}$ est $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible, $\hat{Z}_t = \bar{Z}_{t-\lambda} 1_{(t>\lambda)}$ est $\hat{\mathbf{F}}$ prévisible.*

On peut grâce au rappel R.2. améliorer le résultat c) ci-dessus pour obtenir une caractérisation des $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt totalement inaccessibles que nous utiliserons ultérieurement.

Corollaire 6. *Un $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt $\hat{T}$ est totalement inaccessible si et seulement si:*

i) *$\hat{T}(\lambda, .) > \lambda$ pour tout réel positif λ*

ii) $[[\hat{T}_\lambda]] \subseteq \bar{G}$

iii) *Le graphe de la variable aléatoire $i_{\hat{T}_\lambda}$ est disjoint de tout graphe de $\mathbf{F}$ temps d'arrêt prévisible.*

Démonstration. Il suffit d'après ce qui précède d'établir a). Remarquons que l'ensemble $U=\{(\lambda,\omega)|\,\hat{T}(\lambda,\omega)\leqq\lambda\}$ est $\hat{\mathbf{F}}_{\hat{T}}$ mesurable. Par suite $\hat{T}_1$ défini par:

$$\hat{T}_1(\lambda,\omega)=\begin{cases}\hat{T}(\lambda,\omega) & \text{si } (\lambda,\omega)\in U\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

est un $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt.

Il suffit maintenant de prouver que $\hat{T}_1$ est prévisible: Soit $t\in\mathbb{R}_+$ et

$$U^n=\left\{(\lambda,\omega)|\,\hat{T}_1(\lambda,\omega)\leqq\frac{n}{n-1}t\right\}$$

$$U^n_\lambda=\left\{\omega|\,\hat{T}_1(\lambda,\omega)\leqq\frac{n}{n-1}t\right\}$$

alors si

$$\frac{n}{n-1}t\geqq\lambda\;U^n_\lambda=\Omega\in\bar{F}_{t-\lambda}$$

et si

$$\frac{n}{n-1}t<\lambda\;U^n_\lambda\in F_0\subset\bar{F}_{t-\lambda}$$

$\frac{n-1}{n}\hat{T}_1$ est donc un $\hat{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt et $\hat{T}_1$ est prévisible.

Nous allons maintenant établir le résultat essentiel de ce paragraphe:

Théorème 7. *Le processus $(\hat{\Omega},\hat{F},\hat{F}_t,\hat{\theta}_t,\hat{X}_t,(\hat{P}^{\hat{\mu}})_{\hat{\mu}\in\mathfrak{M}})$ est fortement markovien.*

Démonstration. Soient $\hat{T}$ un $\hat{\mathbf{F}}^0$ temps d'arrêt fini, $\hat{U}\in\hat{\mathbf{F}}^0_{\hat{T}}$, $(\lambda,x)\in\hat{E}$, $s\in\mathbb{R}_+$ et $f\in(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}\otimes\mathscr{E})$. On veut prouver que:

$$\int 1_{\hat{U}}f(\hat{X}_{s+\hat{T}})\,d\hat{P}^{(\lambda,x)}=\int 1_{\hat{U}}\,\hat{E}^{\hat{X}_{\hat{T}}}[f(\hat{X}_s)]\,d\hat{P}^{(\lambda,x)}\tag{12}$$

or

$$\int 1_{\hat{U}}f(\hat{X}_{s+\hat{T}})\,d\hat{P}^{(\lambda,x)}=\int 1_{\hat{U}_\lambda}f(\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda,.)\,dP^x$$

et de même

$$\int 1_{\hat{U}}\,\hat{E}^{\hat{X}_{\hat{T}}}[f(\hat{X}_s)]\,d\hat{P}^{(\lambda,x)}=\int 1_{\hat{U}_\lambda}\,\hat{E}^{\hat{X}_{\hat{T}(\lambda,.)}}(f(\hat{X}_s))\,dP^x.$$

Notons que $\hat{U}_\lambda=(\hat{U}_\lambda\cap\{\hat{T}(\lambda,.)<\lambda\})\cup(\hat{U}_\lambda\cap\{\hat{T}(\lambda,.)\geqq\lambda\})$ et reportons cette décomposition dans les relations précédentes. L'égalité (12) sera alors démontrée si l'on établi que

i) $\int 1_{\hat{U}_\lambda\cap\{\hat{T}(\lambda,.)<\lambda\}}.\hat{E}^{\hat{X}_{\hat{T}(\lambda,.)}}(f(\hat{X}_s))\,dP^x=\int 1_{\hat{U}_\lambda\cap\{\hat{T}(\lambda,.)<\lambda\}}f(\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda,.)\,dP^x$
et que
ii) $\int 1_{\hat{U}_\lambda\cap\{\hat{T}(\lambda,.)\geqq\lambda\}}\hat{E}^{\hat{X}_{\hat{T}(\lambda,.)}}(f(\hat{X}_s))\,dP^x=\int 1_{\hat{U}_\lambda\cap\{\hat{T}(\lambda,.)\geqq\lambda\}}f(\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda,.)\,dP^x.$
Etablissons d'abord i).

Puisque sur $\{\hat{T}(\lambda,.)<\lambda\}$ on a $\hat{X}_{\hat{T}}(\lambda,.)=(\lambda-\hat{T}(\lambda,.),X_0(.))$; il s'ensuit que:

$$\hat{E}^{\hat{X}_{\hat{T}(\lambda,\omega)}}[f(\hat{X}_s)]=E^{X_0(\omega)}[f(\hat{X}_s(\lambda-\hat{T}(\lambda,\omega),\omega')]$$

et comme

$$\hat{X}_s(\lambda-\hat{T}(\lambda,\omega),\omega')=\begin{cases}(\lambda-s-\hat{T}(\lambda,\omega),X_0(\omega')) & \text{si } \lambda>s+\hat{T}(\lambda,\omega)\\ \hat{X}_s+\hat{T}(\lambda,\omega)^{(\lambda,\omega')} & \text{sinon}\end{cases}.$$

Le membre de gauche de i) sera égal à la somme des deux termes suivants:

$$a_1 = \int 1_A(\omega)\, E^{X_0(\omega)}[f(\lambda - s - \hat{T}(\lambda, \omega), X_0(\omega'))]\, dP^x(\omega).$$
$$a_2 = \int 1_B(\omega)\, E^{X_0(\omega)}[f(\hat{X}_{s+\hat{T}(\lambda,\omega)}(\lambda, \omega'))]\, dP^x(\omega)$$

où

$$A = \hat{U}_\lambda \cap \{\hat{T}(\lambda, .) + s < \lambda\} \in \mathbf{F}_0$$

et

$$B = \hat{U}_\lambda \cap \{\hat{T}(\lambda, .) < \lambda \leqq \hat{T}(\lambda, .) + s\} \in \mathbf{F}_0.$$

Appliquons donc la propriété de régénération en 0 du processus initial. On obtient:

$$a_1 = \int 1_A(\omega) f(\lambda - s - \hat{T}(\lambda, \omega), X_0(\omega))\, dP^x(\omega)$$

et

$$a_2 = \int 1_B(\omega) f(\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda, \omega))\, dP^x(\omega).$$

Puisque sur $\{\hat{T}(\lambda, .) + s < \lambda\}$ on a $\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda, .) = (\lambda - s - \hat{T}(\lambda, .), X_0(.))$ la relation (i) s'obtient en sommant les 2 égalités ci-dessus.

Pour établir la relation ii) notons que:

Sur

$$\{\hat{T}(\lambda, .) \geqq \lambda\}\ \hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda, \omega) = (\bar{R}_{s+\hat{T}_\lambda(\omega)}(\omega), X_{j_{s+\hat{T}_\lambda(\omega)}}(\omega)).$$

Posons $T = \hat{T}_\lambda$ c'est d'après la proposition 5 un $\bar{\mathbf{F}}$ t.a. et

$$A = \{\hat{U}_\lambda \cap \hat{T}(\lambda, .) \geqq \lambda\} \in \bar{\mathbf{F}}_T.$$

De plus il résulte du lemme 2 que:

$$(\bar{R}_{s+T}(\omega), X_{j_{s+T}}(\omega)) = \overline{(\bar{R}_{s-\bar{R}_T(\omega)}, X_{j_{s-\bar{R}_T(\omega)}})} \circ \theta_{j_T(\omega)},$$

si bien que

$$\int_A f(\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda, \omega))\, dP^x(\omega) = \int_A \overline{f(\bar{R}_{s-\bar{R}_T(\omega)}, X_{j_{s-\bar{R}_T(\omega)}})} \circ \theta_{j_T(\omega)}\, dP^x(\omega)$$

Posons

$$\varphi(u, \omega) = f(\bar{R}_u(\omega), X_{j_u(\omega)})$$

$\varphi(u, \omega)$ est $\mathscr{B}_{[0,u]} \otimes \mathbf{F}_u$ mesurable et c'est un processus $\bar{\mathbf{F}}$ optionnel.

Si S est $\bar{\mathbf{F}}_T$ mesurable, la variable aléatoire. $(\omega, \omega') \to \varphi(S(\omega), \omega')$ est $\bar{\mathbf{F}}_T \otimes \bar{\mathbf{F}}_T$ mesurable et si $A \in \bar{\mathbf{F}}_T$ il résulte de la propriété régénérative (14) que:

$$\int_A \varphi(S(\omega), \theta_{j_T}(\omega))\, dP^x(\omega) = \int_A E^{X_{j_T(\omega)}}(\varphi(S(\omega), \omega'))\, dP^x(\omega).$$

Appliquons ceci à $S(\omega) = s - \bar{R}_T(\omega)$ on obtient que:

$$\int_A f(\hat{X}_{s+\hat{T}}(\lambda, \omega))\, dP^x(\omega) = \int_A E^{X_{j_T(\omega)}}(f(\bar{R}_{s-\bar{R}_T(\omega)}(\omega'), X_{j_{s-\bar{R}_T(\omega)}}(\omega'))\, dP^x(\omega)).$$

Or

$$(\bar{R}_{s-\bar{R}_T(\omega)}(\omega'), X_{j_{s-\bar{R}_T(\omega)}}(\omega')) = \hat{X}_s(\bar{R}_T(\omega), \omega')$$

et

$$E^{X_{j_T(\omega)}}[f(\bar{R}_{s-\bar{R}_T(\omega)}(\omega'), X_{j_{s-\bar{R}_T(\omega)}}(\omega')] = \hat{E}^{(\bar{R}_T(\omega), X_{j_T(\omega)})}(f(\hat{X}_s)(\mu, \omega'))$$

et puisque sur $\{\hat{T}(\lambda, .) \geqq \lambda\}$

$$(\bar{R}_T(\omega), X_{j_T}(\omega)) = \hat{X}_{\hat{T}}(\lambda, \omega)$$

la relation ii) et le théorème sont maintenant établis.

On peut maintenant préciser le sime groupe et l'ensemble des points de branchement du processus $\hat{X}$.

Corollaire 8. (a) $(\hat{P}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *défini par* $\hat{P}_t((\lambda, x), f) = \hat{E}^{(\lambda, x)}[f(\hat{X}_t)]$ *est le semi groupe associé à* $\hat{X}$.

(b) *Si* $\hat{B}$ *(resp.* B*) désigne l'ensemble des points de branchement de* $\hat{X}$ *(resp.* X*). On a*

$$\hat{B} = \mathbb{R}_+ \times B \cup \{\{0\} \times F^c\}$$

où

$$F = \{x \mid x \in E, P^x(j_0 = 0) = 1\}$$

est l'ensemble des points réguliers de C.

Nous désignerons par $\tilde{E}$ *l'espace* $\hat{E} - \hat{B}$.

Examinons maintenant un cas particulier du théorème 7:

Nous reprendrons l'exemple étudié en I.3.: $\bar{M}$ est un fermé aléatoire homogène, M le fermé droit minimal associé et le processus croissant considéré est $L_t = \sup\{s \mid s \in M \wedge]0, t]\}$. Ainsi qu'on l'a déjà remarqué les hypothèses H_1 et H_2 sont équivalentes à l'hypothèse de régénération de [10].

La construction précédente permet d'obtenir un processus

$$\hat{X} = (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \hat{\mathbf{F}}^0, \hat{X}_t, \hat{P}^{(\lambda, x)})$$

où

$$\hat{X}_t(\lambda, \omega) = (D_{t-\lambda}(\omega) - (t-\lambda), X_{D_{t-\lambda}}(\omega))$$

et $U \in \hat{\mathbf{F}}_t^0$ si et seulement si

$$U_\lambda 1_{\{t \geqq \lambda\}} \in \mathbf{F}_{D_{t-\lambda}} \quad \text{et} \quad U_\lambda 1_{\{t < \lambda\}} \in \mathbf{F}_0.$$

Le théorème 7 nous assure que le processus $\hat{X}$ est fortement markovien. En fait, on peut montrer que cette propriété caractérise entirèrement les systèmes régénératifs; c'est l'objet de la proposition suivante dont nous omettrons la démonstration.

Proposition 9. *Si le processus* $\hat{X}$ *est fortement markovien, le système* (X, M) *est régénératif.*

III. Etude des sauts de $\hat{X}$

Ce chapitre constitute un préliminaire à l'étude du système de Levy du processus $\hat{X}$ et vise à caractériser ses temps de saut totalement inaccessibles. Comme nous ne connaissons pas de conditions satisfaisantes pour lesquelles $\hat{X}$ soit un processus droit nous allons étudier directement ses sauts. A cet effet nous ferons désormais les hypothèses suivantes:

H'2: X est un processus droit

H'3: $\bar{M}$ est un ensemble aléatoire homogène.

Nous commencerons par poser certaines notations et rappeler quelques conséquences des hypothèses $H'2$ et $H'3$.

Notations et rappels:

On désigne par:

τ: la topologie de E.

$\bar{\tau}$: la topologie de E résultant de la compactification de Ray.

$\hat{\tau}$: la topologie sur $\hat{E}$ produit de la topologie usuelle de $\mathbb{R}_+$ et de τ.

X_{t^-}: (resp. $X^*_{t^-}$, resp. $\hat{X}_{t^-}$) la limite à gauche (resp. lorsqu'elle existe) en t de X (resp. X, resp. $\hat{X}$) dans les topologies $\bar{\tau}$ (resp. τ, resp. $\hat{\tau}$)

$$\mathscr{S} = \{(t,\omega) \mid X_{t^-}(\omega) \neq X_t(\omega), X_{t^-}(\omega) \notin B\}.$$

Rappelons qu'un $\mathbf{F}$ temps d'arrêt T est totalement inaccessible si et seulement si son graphe est inclus dans $\mathscr{S}$ [8].

Rappelons maintenant les deux résultats suivants [1]:

R.4.: Il existe un système de Levy (N, L) constitué d'un noyau positif N sur E transformant les fonctions boréliennes en fonctions mesurables par rapport à la tribu engendrée par les fonctions excessives, tel que $N(x, \{x\}) = 0 \; \forall x \in E$ et d'une fonctionnelle additive continue L telle que $E^x[L_t] < \infty \, \forall t, \forall x$.

Le couple (N, L) jouit de la propriété suivante: pour toute fonction borélienne f, positive sur $E \times E$, le processus croissant $\sum\limits_{0<s\leq t} f(X_{s^-}, X_s) 1_{\mathscr{S}}(s)$ a pour projection duale prévisible le processus $\int_0^t dL_s \int_E N(X_{s^-}, dy) f(X_{s^-}, y)$. ([1] théorème 1).

R.5.: Soit A une fonctionnelle additive $\mathbf{F}_t$ adaptée, purement discontinue et dont les sauts sont totalement inaccessibles. Il existe alors une fonction positive h sur $E \times E$, $\mathscr{E}^1 \otimes \mathscr{E}$ mesurable ($\mathscr{E}^1$ désigne la tribu des universellement mesurables) telle que A soit indistinguable de la fonctionnelle additive $\sum\limits_{0<s\leq t} h(X_{s^-}, X_s) 1_{\mathscr{S}}(s)$. ([1] théorème 2).

Rappelons maintenant la décomposition suivante de l'ensemble aléatoire $\bar{M}$ que l'on peut trouver dans [11] ou dans [4].

Soit $M^{\rightarrow}$ l'ensemble des extrémités gauche des intervalles contingus à $\bar{M}$: $M^{\rightarrow} = \{t > 0, L_t = t, D_t > t\}$.

F désignant toujours l'ensemble des points réguliers de C, c'est-à-dire $\{x \mid P^x(j_0 = 0) = 1\}$, posons

$-)$ $\rho_F = \{(t,\omega), t > 0, X_t(\omega) \in F\}$.

Notons que ρ_F est la projection optionnelle de l'ensemble $\{t = D_t\}$.

–) $M_\pi^{\to}=M^{\to}\cap\rho_F$ alors $t\in M_\pi^{\to} \Leftrightarrow X_t\in F,\ X_t=X_{t^-}$ il ne passe aucun graphe de $\mathbf{F}$ t a dans $M_\pi^{\to}$.(ps)

–) $M_b^{\to}=M^{\to}\cap\rho_F^c$

–) $M_s^{\to}=M_b^{\to}\cap\{(t,\omega),\ X_{t^-}(\omega)\notin B,\ X_t\neq X_{t^-}\}$

–) $M_a^{\to}=M_b^{\to}-M_s^{\to}$; $M_a^{\to}$ est la réunion dénombrable de graphes de $\mathbf{F}$ t.a. accessibles.

–) $M_{s,r}^{\to}=M_s^{\to}\cap\{X_{t^-}\in F\}$; $t\in M_{s,r}^{\to} \Leftrightarrow X_t\in F^c, X_{t^-}\in F$

–) $M_{s,i}^{\to}=M_s^{\to}\cap\{X_{t^-}\notin F\}$

Rappelons enfin le théorème de balayage que l'on peut trouver dans [4]:

R.6.: Il existe une mesure σ finie de transition de $(E,\mathscr{B}^*(E))$ vers $(\Omega,\mathbf{F}_\infty^0)$, $\hat{E}_X$, et une fonctionnelle additive continue, J, de support contenu dans F, tels que pour toute variable aléatoire positive Φ, telle que $\Phi([\delta])=0$, la projection duale optionnelle et prévisible de

$$\sum_{0<g\leq t}\Phi\circ\theta_g 1_{M_\pi^{\to}}(g) \qquad \text{soit égale à } \int_0^t dJ_s\hat{E}_{X_s}(\Phi).$$

Nous commencerons par étudier l'ensemble des sauts de $\hat{X}$, c'est-à-dire $\{(t,\lambda,\omega)\,|\,\hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)$ existe et $X_{t^-}(\lambda,\omega)\neq\hat{X}_t(\lambda,\omega)\}$.
Soient $\hat{\omega}=(\lambda,\omega)$, $t\in\mathbb{R}_+$ fixés et (s_n) une suite de $\mathbb{R}_+$ croissant vers t.

–) Si $\lambda\geq t$ $\hat{X}_{s_n}(\lambda,\omega)=(\lambda-s_n,X_0(\omega))$ et $\hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)=(\lambda-t,X_0(\omega))$

–) Si $t>\lambda$ alors $s_n\geq\lambda$ à partir d'un certain rang et

$$\hat{X}_{s_n}(\lambda,\omega)=(C_{j_{s_n-\lambda}}(\omega)-(s_n-\lambda),X_{j_{s_n-\lambda}}(\omega)).$$

On distingue alors deux cas:

a) – La suite $j_{s_n-\lambda}(\omega)$ est strictement croissante, autrement dit

$$(t-\lambda,\omega)\in\bar{G} \qquad \text{et } \lim_{n\to\infty} j_{s_n-\lambda}(\omega)=i_{t-\lambda}(\omega),$$

alors

$$\hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)=(B_{i_{t-\lambda}}(\omega)-(t-\lambda),X^*_{i_{t-\lambda}-}(\omega))=(0,X^*_{i_{t-\lambda}-}(\omega)).$$

b) – La suite $j_{s_n-\lambda}(\omega)$ est stationnaire;

$$(t-\lambda,\omega)\in\bar{G}^c \qquad \text{et } \hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)=(C_{i_{t-\lambda}}(\omega)-(t-\lambda),X_{i_{t-\lambda}}(\omega)).$$

En résumé:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)=&(\lambda-t,X_0(\omega))1_{\{\lambda\geq t\}}+(0,X_{i_{t-\lambda}-}(\omega))1_{\bar{G}}(t-\lambda,\omega)\\&+(C_{i_{t-\lambda}}(\omega)-(t-\lambda),X_{i_{t-\lambda}}(\omega))1_{\bar{G}^c}(t-\lambda,\omega)1_{\mathbb{R}_+^*}(t-\lambda).\end{aligned}$$

On peut maintenant décrire les sauts de $\hat{X}$ au dessus de ses points de non branchement, c'est-à-dire les sauts de $\hat{X}$ appartenant à l'ensemble $\hat{\mathscr{S}}$ décrit ci-dessous

$$\hat{\mathscr{S}}=\{(s,\lambda,\omega),\ \hat{X}_{s^-}(\lambda,\omega)\neq\hat{X}_s(\lambda,\omega),\ \hat{X}_{s^-}(\lambda,\omega)\notin\bar{B},\ \hat{X}_s(\lambda,\omega)\notin\bar{B}\}.$$

Proposition 10. *Soit* $\hat{T}$ *un* $\hat{\mathbf{F}}$ t a *tel que* $[[\hat{T}]] \subset \hat{\mathscr{S}}$. *Alors:* $\hat{T}(\lambda, .) > \lambda$ *et* $\hat{T}_\lambda = \hat{T}(\lambda) - \lambda$ *a son graphe inclus dans* $\bar{G}$.

Démonstration. Considérons d'abord $\mathscr{S}_1 = \{(\omega, \lambda, s) | (\omega, \lambda, s) \in \hat{\mathscr{S}}, \lambda \geqq s\}$.

Il résulte de l'étude ci-dessus que:

$$\mathscr{S}_1 = \{(s, \lambda, \omega), s = \lambda, (0, X_0) \neq (\bar{R}_0, X_{j_0}), X_0 \in F \cap B^c\}.$$

Si $\hat{T}$ est un $\hat{\mathbf{F}}$ *t a* tel que $[[\hat{T}]] \subset \mathscr{S}_1$ alors $X_{\hat{T}^-}(\lambda, \omega) = (0, X_0(\omega))$, et on a pour tout $\omega \in \Omega$:

$$P^{X_0(\omega)}[j_0 = 0, X_{j_0} = X_0(\omega)] = P^{X_0(\omega)}[\hat{X}_{\hat{T}}(\lambda, .) = \hat{X}_{\hat{T}^-}(\lambda, \omega)]$$

D'autre part puisque $X_0(\omega) \in F \cap B^c$, on a:

$$P^{X_0(\omega)}[j_0 = 0, X_{j_0} = X_0(\omega)] = 1$$

et aussi d'après la propriété de régénération en 0

$$P^{X_0(\omega)}[\hat{X}_{\hat{T}}(\lambda, .) = \hat{X}_{\hat{T}}(\lambda, \omega)] = P^x[\hat{X}_{\hat{T}}(\lambda, \omega) = \hat{X}_{\hat{T}^-}(\lambda, \omega)] = 0 \qquad P^x \text{ ps.}$$

Par suite $\mathscr{S}_1$ ne contient aucun graphe de temps d'arrêt et la première assertion en découle.

Soit maintenant:

$$\mathscr{S}_2 = \{(s, \lambda, \omega) \in \hat{\mathscr{S}}, s > \lambda, (s - \lambda, \omega) \notin \bar{G}\}.$$

Toujours d'après l'étude précédente, on a aussi:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_2 = \{(s, \lambda, \omega) | &(C_{i_{s-\lambda}}(\omega) - (s - \lambda), X_{i_{s-\lambda}}(\omega)) \\ &\neq (C_{j_{s-\lambda}}(\omega) - (s - \lambda), X_{j_{s-\lambda}}(\omega))(s - \lambda, \omega) \in \bar{G}^c, (C_{i_{s-\lambda}}(\omega) - (s - \lambda), X_{i_{s-\lambda}}(\omega)) \notin \bar{B}\}.\end{aligned}$$

Or nous avons vu que P^x ps $\bar{G}^c = \bigcup_n]]B_{T_n}, C_{T_n}]]$ où (T_n) est une suite de t.a qui épuise les sauts de C, et si

$$s - \lambda \in]B_{T_n}(\omega), C_{T_n}(\omega)] \qquad i_{s-\lambda}(\omega) = T_n(\omega).$$

De plus si:

$$s - \lambda \in]B_{T_n}(\omega), C_{T_n}(\omega)[, \qquad j_{s-\lambda}(\omega) = i_{s-\lambda}(\omega) = T_n(\omega)$$

on a donc:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_2 = \bigcup_{n \in N} \{(s, \lambda, \omega); s - \lambda = C_{T_n}(\omega), &(C_{j_{T_n}}(\omega) - T_n(\omega), X_{j_{C_{T_n}}}(\omega)) \\ &\neq (C_{i_{C_{T_n}}}(\omega) - C_{T_n}(\omega), X_{i_{C_{T_n}}}(\omega)) \text{ et } (C_{i_{C_{T_n}}}(\omega) - C_{T_n}(\omega), X_{i_{C_{T_n}}}(\omega)) \in \bar{B}^c\}\end{aligned}$$

or puisque $i_{C_{T_n}} = T_n$ et $C_{i_{C_{T_n}}} - C_{T_n} = 0$ on a finalement que

$$\mathscr{S}_2 = \bigcup_{n \in N} \{(s, \lambda, \omega), s - \lambda = C_{T_n}(\omega), D_{T_n}(\omega) > T_n(\omega), X_{T_n}(\omega) \in F\}$$

or

$$P^x\{X_{T_n} \in F, D_{T_n} > T_n\} = 0 \qquad \forall x \in E \qquad \text{et } \mathscr{S}_2 = \emptyset\, P^x \text{ ps.}$$

Notons que les hypothèses H'_2 et H'_3 n'interviennent pas dans cette démonstration.

Dans le corollaire 6 nous avons donné une première caractérisation des $\hat{F}$ temps d'arrêts totalement inaccessibles. La décomposition de l'ensemble aléatoire $M_\pi^{\rightarrow}$ que nous avons précédemment rappelée d'affiner cette caractérisation.

Proposition 11. *Soit $\bar{T}$ un $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêt. $\bar{T}$ est totalement inaccessible si et seulement si, il existe une variable aléatoire $\mathbf{F}_\infty$ measurable positive S dont le graphe est inclus dans l'ensemble:*

$$(\mathcal{S} \cup M_\pi^{\rightarrow}) \wedge G \qquad \textit{et telle que } \bar{T} = B_s.$$

Demonstration. Définissons

$$\bar{T}_1 = \begin{cases} \bar{T} & \text{si } i_T = j_T \text{ et } D_{i_T} = j_T \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bar{T}_2 = \begin{cases} \bar{T} & \text{si } i_T = j_T \text{ et } D_{i_T} < j_T \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bar{T}_3 = \begin{cases} \bar{T} & \text{si } i_T < j_T \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

$\bar{T}_1, \bar{T}_2$ et $\bar{T}_3$ sont manifestement des $\bar{\mathbf{F}}$ temps d'arrêts et $\bar{T}$ est totalement inaccessible si et seulement si $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ et $\bar{T}_3$ sont totalement inaccessibles. Il suffit donc pour établir la condition nécessaire de la proposition, de le faire pour des temps d'arrêts tels que $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ et $\bar{T}_3$.

Supposons d'abord que $i_T = j_T$, $D_{i_T} = j_T$ sur $\{\bar{T} < \infty\}$ alors d'après le rappel R.2., le graphe du $\mathbf{F}$ temps d'arrêt i_T est inclus dans $\mathcal{S} \cap G \cap \{(t, \omega) | t = D_t(\omega)\}$.

De même si $i_T = j_T$, $D_{iT} > j_T$ sur $\{\bar{T} < \infty\}$, le graphe du ta i_T est inclus dans $\mathcal{S} \cap G \cap M^{\rightarrow} = \mathcal{S} \cap G \cap \{t < D_t\}$.

Si maintenant $i_T < j_T$ sur $\{\bar{T} < \infty\}$, on ne peut plus affirmer que i_T soit un $\mathbf{F}$ temps d'arrêt, mais par contre on sait, toujours d'après le rappel précité, que $\bar{T} = \ell_{i_T}$ et que le graphe de i_T est disjoint de tout graphe de t.a. prévisible. De plus on a $i_T < j_T = j_{B_{i_T}} \leqq j_{C_{i_T}} = D_{i_T}$.

Il en résulte que le graphe de i_T est inclus dans $(M^{\rightarrow} - M_a^{\rightarrow}) \cap G$.

On a donc prouvé que si $\bar{T}$ est $\bar{\mathbf{F}}$ totslement inaccessible la variable aléatoire i_T a son graphe inclus dans $\mathcal{S} \cap G \cup (M^{\rightarrow} - M_a^{\rightarrow}) \cap G$, et vérifie $\bar{T} = B_{i_T}$. La réciproque de cette assertion découle immédiatement du rappel précité.

Il ne nous reste qu'à montrer que l'ensemble aléatoire décrit dans l'énoncé de la proposition est égal à $\mathcal{S} \cap G \cup (M^{\rightarrow} - M_a^{\rightarrow}) \cap G$.

Pour cela commençons par établir la relation:

$$D_s = j \circ \theta_s + s \qquad \text{si } s \in \bar{M}.$$

On a $j \circ \theta_s = \operatorname{Inf}\{u | C_u \circ \theta_s > 0\}$, or si $s \in \bar{M}$,

$$C_u \circ \theta_s = C_{u+s} - C_s \qquad \text{et } j \circ \theta_s = \operatorname{Inf}\{u | C_{u+s} > C_s\} = j\, C_s - s = D_s - s.$$

Il s'ensuit que si T est $\mathbf{F}$ t.a. dont le graphe est contenu dans $\bar{M}$:

$$X_T \in F\ P^x \text{ ps} \Leftrightarrow D_T = T P^x \text{ ps}.$$

En effet d'après la propriété de Markov forte, on a:

$$E^x(E^{X_T}(j_0=0))=E^x(j_0\circ\theta_T=0)=E^x(D_T=T).$$

Par suite on a:

$-)\ \mathscr{S}\cap G\cap\{t=D_t\}=\mathscr{S}\wedge\rho_F\wedge G$

$-)\ \mathscr{S}\cap G\cap\{t<D_t\}=\mathscr{S}\wedge\rho_F^c\wedge G$

$-)\ (M^{\rightarrow}-M_a^{\rightarrow})\wedge G=M_\pi^{\rightarrow}\wedge G\cup\mathscr{S}\wedge\rho_F^c\wedge G$

ce qui prouve la proposition.

Posons

$$\bar{\mathscr{S}}^i=\{(t,\omega)\,|\,(i_t(\omega),\omega)\in(\mathscr{S}\cup M_\pi^{\rightarrow})\wedge G\}$$
$$\hat{\mathscr{S}}^i=\{(t,\lambda,\omega)\,|\,(t-\lambda,\omega)\in\bar{\mathscr{S}}^i\}.$$

Le corollaire 6 et la proposition 11 peuvent alors se formuler de la façon suivante:

Corollaire 12. *Soit $\hat{T}$ (resp. $\bar{T}$) un $\hat{\mathbf{F}}$ (resp. $\bar{\mathbf{F}}$) temps d'arrêt. $\hat{T}$ (resp. $\bar{T}$) est totalement inaccessible si et seulement si son graphe est inclus dans $\hat{\mathscr{S}}^i$ (resp. $\bar{\mathscr{S}}^i$).*

On peut aussi exprimer une relation entre les ensembles $\hat{\mathscr{S}}^i$ et $\bar{\mathscr{S}}^i$, et les temps de sauts de processus, ce sera l'objet de la proposition suivante.

Proposition 13. 1) *L'ensemble $\bar{\mathscr{S}}^i$ est inclus dans l'ensemble des sauts du processus (X_{j_t},j_t).*

2) *Si $(t,\lambda,\omega)\in\hat{\mathscr{S}}^i$, la limite à gauche $\hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)$ existe et*

$$\hat{P}^{(\lambda,x)}\{(t,\lambda,\omega)\,|\,(t,\lambda,\omega)\in\hat{\mathscr{S}}^i,\ \hat{X}_{t^-}(\lambda,\omega)\in\bar{B}\}=0$$

pour tout $(\lambda,x)\in\mathbb{R}_+\times E$.

Démonstration. L'assertion 1) résulte de la décomposition de $\bar{\mathscr{S}}^i$ obtenue dans la proposition 13: si $(t,\omega)\in\bar{\mathscr{S}}^i$ et $i_t(\omega)=j_t(\omega)$ alors $X_{j_{t^-}}(\omega)=X_{i_{t^-}}(\omega)\neq X_{i_t}(\omega)=X_{j_t}(\omega)$, et si $i_t(\omega)<j_t(\omega)$ le résultat est immédiat.

Soit maintenant $(t,\lambda,\omega)\in\hat{\mathscr{S}}^i$, $\bar{R}$. étant un processus cadlag il suffit de vérifier que le terme lié au processus X admet une limite $X_{i_{t-\lambda}^-}(\omega)$ dans E. Or d'après la proposition 11: $i_{t-\lambda}\in\mathscr{S}\cup M_\pi^{\rightarrow}$ et on sait alors que $X^*_{i_{t-\lambda}^-}$ existe. Le seul point non immédiat est le fait que cette limite $\hat{X}_-$ ne soit pas un point de branchement. D'après la description de $\bar{B}$, il nous suffit en fait de montrer que $X_{i_{(t-\lambda)}^-}(\omega)$ n'appartient pas à $F\cap B$, P^x ps. D'après la proposition 11, cela revient à établir que:

i) $$1_{\{X_{g^-}\notin F\}}1_{\{X_g\in F\}}1_G(g)\,1_{\{D_g>g\}}=0 \qquad P^x\text{ ps}$$

et que

ii) $$1_{\{X_{g^-}\notin F\}}1_{\{X_g\in F^c\}}1_{\{X_g\neq X_{g^-},\,X_{g^-}\in B\}}1_G(g)=0 \qquad P^x\text{ ps.}$$

Prouvons la deuxième relation, à cet effet considérons une fonction h

borélienne strictement positive telle que:

$$E^0(\sum_{0<s<\infty} h(X_{s-}, X_s)) < \infty$$

(l'existence d'une telle h est établie dans [1]).

D'après le rappel R.4., on peut écrire que:

$$E^0(\sum_{0<g<\infty} 1_G(g)\, 1_{\{X_{g^-}\notin F\}} 1_{\{X_g\in F\}} h(X_{g^-}, X_g))$$
$$= E^0 \int_0^\infty dL_s 1_G(s) \int_E N(X_{s^-}, dy)\, 1_{\{X_{s^-}\notin F\}} 1_{\{y\in F\}} h(X_{s^-}, y).$$

Or $\{X_{s-}\notin F\} \wedge G$ ne diffère de $\{s=D_s\} \cap \{X_s \notin F\} \wedge G$ que sur une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêts. De plus nous avons remarqué que $\rho_F = \{X_s \in F\}$ est la projection optionnelle de $\{s=D_s\}$ ces deux ensembles ne diffèrent donc que sur un ensemble à coupe dénombrable. Par suite $1_G(s)$. $1_{\{X_{S^-}\notin F\}}$ est sauf sur un ensemble à coupes dénombrables qui n'est pas chargé par la fonctionnelle continue L, donc

$$E^0(\sum_{0<g<\infty} 1_G(g)\, 1_{\{X_g\notin F\}} 1_{\{X_g\in F\}} h(X_{g^-}, X_g)) = 0$$

et ceci prouve la relation ii). La démonstration de i) s'effectue de façon analogue en utilisant le theorème de balayage (R.6).

Remarques: 1) Si $(s, \lambda, \omega) \in \mathscr{S}^i$, on n'a pas nécessairement:

$$\hat{X}_{s-}(\lambda, \omega) \neq \hat{X}_s(\lambda, \omega), \qquad \hat{X}_{s-}(\lambda, \omega) \notin \bar{B}.$$

Si $i_{s-\lambda} \notin M_\pi^{\rightarrow}$ cette relation est vérifiée mais par contre si $i_{s-\lambda} \in M_\pi^{\rightarrow}$ ce n'est en général pas vrai, il suffit que l'excursion en dehors de M soit une boucle et que l'extrémité droite ne soit pas un saut de C. Ceci n'est pas contradictoire avec le fait que le processus $\hat{X}$ puisse être droit car on n'a pas considéré ici les tribus canoniques de ce processus.

2) Par contre un phénomène opposé peut avoir lieu: l'ensemble

$$\{(t, \lambda, \omega) \mid \hat{X}_{t-} \neq \hat{X}_t,\ \hat{X}_{t-} \in \bar{B}^c\} \wedge \mathscr{S}^{ic},$$

des sauts de $\hat{X}$ (pour la topologie $\hat{\tau}$) au dessus de ses points de non branchement, qui ne sont pas totalement inaccessibles peut n'être pas vide et même contenir un temps d'arrêt prévisible. Ceci n'est pas non plus contradictoire avec le fait que $\hat{X}$ puisse être un processus droit. Dans ce cas cela tient moins au fait que l'on n'ait pas considéré les tribus canoniques (on pourrait préciser les rapports entre les $\hat{\mathbf{F}}$ t.a. prévisibles et les temps d'arrêts prévisibles du processus à l'aide par exemple de [5]) mais plutôt comme l'a fait remarquer J.M. Bismut parce que la topologie de $\bar{E}$ n'est pas nécessairement la même que celle du compactifié de Ray de $\hat{X}$ et que la compactification peut gommer des sauts de la topologie initiale.

Un exemple de cette situation est donné dans [15].

IV. Systeme de Levy de $\hat{\mathbf{X}}$.

On désigne toujours par E l'espace $\mathbb{R}_+ \times E$ et par E l'espace $\hat{E} - \hat{B}$.

Soit f une fonction positive définie sur $\bar{E} \times \bar{E}$, borélienne nulle sur $(\tilde{E} \times \tilde{E})^c$ et sur la diagonale. On se propose de calculer la projection $\hat{\mathbf{F}}$ duale prévisible de la fonctionnelle:

$$\hat{K}_t = \sum_{0 < s \leqq t} f(\hat{X}_{s-}, \hat{X}_s) 1_{\hat{\mathscr{S}}^i}(s).$$

Pour établir ce résultat nous procéderons en plusieurs étapes.

$-$) Dans la première nous montrons que l'on peut ramener cette étude à celle de la projection duale $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible d'un processus $\bar{K}$ croissant dont le support est inclus dans $\bar{G}$.

$-$) On sait alors grâce au rappel R.3. exprimer une telle projection en fonction de la projection duale $\mathbf{F}$ prévisible d'un processus croissant K.

$-$) On montre ensuite que l'on peut décomposer cette fonctionnelle en une somme de processus croissants dont on sait calculer explicitement les projections $\mathbf{F}$ duales prévisibles au moyen de résultats sur les systèmes de Levy de processus droits et sur le balayage (Rappels R.4.–R.6.).

Lemme 15. *Désignons par $\bar{K}_t$ le processus croissant:*

$$\sum_{0 < u \leqq t} f(0, X_{i_u -}, C_{j_u} - u, X_{j_u})(.) 1_{\bar{\mathscr{S}}^i}(u, .)$$

et par $\bar{K}_t^p$ sa projection duale $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible. Le processus croissant $\hat{K}_t^p$ défini par:

$$\hat{K}_t^p(\lambda, \omega) = \bar{K}_{t-\lambda}^p(\omega) 1_{\{t > \lambda\}}.$$

($(\lambda, \omega) \in \hat{\Omega}$) est alors pour toute loi $\hat{P}^{(\lambda, x)} = \varepsilon_\lambda \otimes P^x$, la projection duale $\hat{\mathbf{F}}$ prévisible de $\hat{K}_t$.

Démonstration: Soit (λ, x) fixé et $\hat{Z}$ un processus $\hat{\mathbf{F}}$ prévisible. On a alors:

$$\hat{E}^{(\lambda, x)} \int_0^\infty \hat{Z}_t \, d\hat{K}_t = E^x \int_0^\infty \hat{Z}_t(\lambda, .) \, d\hat{K}_t(\lambda, .)$$

puis

$$E^x \int_0^\infty \hat{Z}_t(\lambda, .) \, d\hat{K}_t(\lambda, .) = E^x \int_0^\lambda \hat{Z}_t(\lambda, .) \, d\hat{K}_t(\lambda, .) + E^x \int_0^\infty \hat{Z}_{t+\lambda}(\lambda, .) \, d\hat{K}_{t+\lambda}(\lambda, .)$$

or d'après la proposition 10 $K_t(\lambda, \omega) = 0$ si $t \leqq \lambda$, par suite

$$\hat{E}^{(\lambda, x)} \int_0^\infty \hat{Z}_t \, d\hat{K}_t = E^x \int_0^\infty \hat{Z}_{t+\lambda}(\lambda, \omega) \, d\hat{K}_{t+\lambda}(\lambda, \omega).$$

Il résulte alors de la définition de $\bar{\mathscr{S}}^i$ et $\hat{\mathscr{S}}^i$ que:

$$\hat{K}_{t+\lambda}(\lambda, \omega) = \bar{K}_t(\omega) = \sum_{0 < u \leqq t} f(0, X_{i_u -}, C_{j_u} - u, X_{j_u})(\omega) 1_{\bar{\mathscr{S}}^i}(u, \omega)$$

Posons alors $\bar{Z}_t(\omega)=\hat{Z}_{t+\lambda}(\lambda,\omega)$, c'est d'après la proposition 5.e. un processus $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible.

On a donc:

$$\hat{E}^{(\lambda,x)}\int_0^\infty \hat{Z}_t d\hat{K}_t=E^x\int_0^\infty \bar{Z}_t d\bar{K}_t$$

et

$$E^x\int_0^\infty \bar{Z}_t d\bar{K}_t=E_x\int_0^\infty \bar{Z}_t d\bar{K}_t^p$$

par définition de la projection duale prévisible.

Un calcul analogue prouve alors que $\hat{K}_t^p$ étant défini comme dans l'énoncé du lemme on a aussi:

$$E^x\int_0^\infty \bar{Z}_t d\bar{K}_t^p=\hat{E}^{(\lambda,x)}\int_0^\infty \hat{Z}_t d\hat{K}_t^p$$

et puisque $\hat{K}^p$ est un processus croissant prévisible le lemme est établi.

Nous nous sommes donc ramenés à l'étude de la projection duale $\bar{\mathbf{F}}$ prévisible de $\bar{K}_t$.

Notons que le support de $\bar{K}_t$ est inclus dans $\bar{G}$.

Le théorème 9 de [7] nous donne un moyen explicite de calculer sa projection duale prévisible. Il suffit d'introduire le processus $K_t=\bar{K}_{C_t}$ et on alors $\bar{K}_t^p=(K^p)_{i_t}=(K^p)_{j_t}$.

Nous allons donc calculer K^p, à cette effet nous commencerons par établir le lemme suivant:

Lemme 16. *Posons*

$$K_t^1=\sum_{0<g\leq t} f(0,X_g,\Delta C_g,X_g)1_{\mathscr{S}}(g)1_G(g)$$

$$K_t^2=\sum_{0<g\leq t} f(0,X_g,C_{D_g}-C_g,X_{D_g})1_{M_\pi^-}g$$

$$K_t^3=\sum_{0<g\leq t} f(0,X_{g-},C_{D_g}-C_g,X_{D_g})1_{M_{\bar{s},r}^-}(g)1_{G\wedge\Gamma^c}(g)$$

où Γ désigne l'ensemble aléatoire des sauts de C, c'est-à-dire

$$\Gamma=\{(\omega,s);\Delta C_s(\omega)\neq 0\}$$

Alors $K_t=K_t^1+K_t^2+K_t^3$.

Démonstration. On a tout d'abord:

$$\begin{aligned}K_t&=\sum_{0<u\leq C_t} f(0,X_{i_u-},C_{j_u}-u,X_{j_u})1_{\mathscr{S}^i}(u)\\&=\sum_{0<u\leq C_t} f(0,X_{i_u-},C_{j_u}-u,X_{j_u})1_{\{i_u=j_u\}}1_{\mathscr{S}}(u)\\&\quad+\sum_{0<u\leq C_t} f(0,X_{i_u-},C_{j_u}-u,X_{j_u})1_{\{i_u<j_u\}}1_{\mathscr{S}_i}(u).\end{aligned}$$

Commençons par remarquer que si $u=B_{i_u}$ et $i_u<j_u$ alors $i_u\notin\Gamma$ et donc que $D_{i_u}=j_{C_{i_u}}=j_{B_{i_u}}=j_u$.

D'autre part si $u \in \bar{G}$, $\ell_{i_u} = i_u$

Il résulte alors de la relation $u \leqq C_t \Leftrightarrow i_u \leqq t$ et de la proposition (11) que:

$$\sum_{0<u\leqq C_t} f(0, X_{i_u -}, C_{j_u} - u, X_{j_u}) 1_{\{i_u < j_u\}} 1_{\mathscr{S}^i}(u)$$
$$= \sum_{0<g\leqq t} f(0, X_{g-}, C_{D_g} - C_g, X_{D_g}) 1_G(g) 1_{(M^{\rightarrow} - M_a^{\rightarrow})}(g) 1_{\Gamma^c}(g).$$

Or $G \cap (M^{\rightarrow} - M_a^{\rightarrow}) = G \cap (M_\pi^{\rightarrow} \cup M_{s,r}^{\rightarrow})$ et si $g \in M_\pi^{\rightarrow}$ on sait que $X_g = X_{g-}$.

Par ailleurs, $M_\pi^{\rightarrow} \cap \Gamma^c = M_\pi^+$ puisque aucun graphe de t.a. ne passa dans $M_\pi^{\rightarrow}$ (ps).

Par suite:

$$\sum_{0<u\leqq C_t} f(0, X_{i_u -}, C_{j_u} - u, X_{j_u}) 1_{\{i_u < j_u\}} 1_{\mathscr{S}^i}(u) = K_t^2 + K_t^3 \text{ ps.}$$

Montrons enfin que:

$$\sum_{0<u\leqq C_t} f(0, X_{i_u -}, C_{j_u} - u, X_{j_u}) 1_{\{i_u = j_u\}} 1_{\mathscr{S}^i}(u)$$
$$= \sum_{0<g\leqq t} f(0, X_{g-}, \Delta C_g, X_g) 1_{\mathscr{S}}(g) 1_G(g)$$

Il résulte de la proposition 11 que si $u \in \bar{\mathscr{S}}^i$ et $i_u = j_u = g$ on a $g \in \mathscr{S} \wedge G$ et

$$f(0, X_{i_u -}, C_{j_u} - u, X_{j_u}) = f(0, X_{g-}, C_g - B_g, X_g).$$

Réciproquement si $g \in \mathscr{S} \wedge G$, on a toujours d'après la proposition précitée $u = B_g \in \bar{\mathscr{S}}^i$ et:

i) si $Dg = g: g = i_{B_g} \leqq j_{B_g} \leqq j_{C_g} = g$ soit $i_{B_g} = j_{B_g}$.

ii) si $g < D_g$ et $i_u < j_u$ alors nécessairement $g \notin \Gamma$ et par suite si $g < D_g$ et $X_g \notin M_\pi^{\rightarrow}$ alors $X_g \notin F$ et $(\Delta C_g, X_g) = (0, X_g) \in \hat{B}$ et donc $f(0, X_{g-}, \Delta C_g, X_g) = 0$.

L'égalité requise résulte alors de la relation $\{u \leqq C_t\} \Leftrightarrow \{i_u \leqq t\}$.

Notons enfin une conséquence immédiate du rappel R.5.:

Lemme 17. *Il existe une fonction positive α sur $E \times E$, $\mathscr{E}' \otimes \mathscr{E}$ mesurable telle que:*

$$\sum_{0<s\leqq t} \Delta C_s 1_{\mathscr{S}}(s) = \sum_{0<s\leqq t} \alpha(X_{s-}, X_s) 1_{\mathscr{S}}(s).$$

Nous pouvons maintenant exprimer les projections duales prévisibles des processus K_t^i ($i = 1, 2, 3$).

Calcul de K_t^{1p}: Posons $h(a,b) = f(0, a, \alpha(a,b), b)$. Alors d'après le lemme 17

$$K_t^1 = \sum_{0<g\leqq t} f(0, X_{g-}, \Delta C_g, X_g) 1_{\mathscr{S} \wedge G}(g)$$
$$= \sum_{0<g\leqq t} h(X_{g-}, X_g) 1_{\mathscr{S} \wedge G}(g)$$

et G étant un ensemble prévisible on à d'après R.5.:

$$K_t^{1p} = \int_0^t 1_G(s)\, dL_s \int N(X_{s-}, dy)\, h(X_{s-}, y)$$

soit encore

$$K_t^{1p} = \int_0^t 1_G(s) dL_s \int N(X_{s-}, dy) f(0, X_{s-}, \alpha(X_{s-}, y), y).$$

Calcul de K_t^{2p}: Il résulte de la relation $D_s = j_0 \circ \theta_s + s$ (démonstration de la proposition (11) que:

$$X_{D_g} = X_{j_0} \circ \theta_g \quad \text{et que} \quad C_{D_g} - C_g = C_{j_0}(\theta_g)$$

Posons

$$H(\omega) = f(0, X_0(\omega), C_{j_0}(\omega), X_{j_0}(\omega))$$

alors

$$K_t^2 = \sum_{0<g\leq t} H \circ \theta_g 1_{M_\pi^{\rightarrow}}(g)$$

est une fonctionnelle additive homogène à laquelle on applique le théorème de balayage R.6. On obtient:

$$K_t^{2p} = K_t^{2\,0} = \int_0^t dJ_s 1_G(s) \hat{E}_{X_s}(f, X_0, C_{j_0}, X_{j_0})).$$

Calcul de K_t^{3p}: Notons d'abord que:

$$K_t^3 = \sum_{0<g\leq t} f(0, X_{g-}, C_{D_g} - C_g, X_{D_g}) 1_{M_{s,r}^{\rightarrow} \wedge G}(g) 1_{\Gamma^c}(g) = K_t^4 - K_t^5$$

où

$$K_t^4 = \sum_{0<g\leq t} f(0, X_{g-}, C_{D_g} - C_g, X_{Dg}) 1_{M_{s,r}^{\rightarrow} \wedge G}(g)$$

et

$$K_t^5 = \sum_{0<g\leq t} f(0, X_{g-} - C_g, X_{D_g}) 1_{M_{s,r}^{\rightarrow} \Lambda G}(g) 1_\Gamma(g)$$

Calculons d'abord K_t^{4p}. Nous commencerons par supposer que $f = f_1 \times f_2$, $f_1, f_2 \in b\hat{E}$.

$$K_t^4 = \sum_{0<g\leq t} f_1(0, X_{g-}) f_2(C_{D_g} - C_g, X_{D_g}) 1_{M_{s,r}^{\rightarrow} \wedge G}(g)$$

Or

$$f_2(C_{D_g} - C_g, X_{Dg}) = f_2(C_{j_0}, X_{j_0}) \circ \theta_g \ldots$$

On sait alors ([6]) que la projection duale prévisible du processus

$$\sum_{0<g\leq t} f_2(C_{j_0}, X_{j_0}) \circ \theta_g 1_{M_{s,r}^{\rightarrow}}(g)$$

est égale à

$$\int_0^t dL_s \int N(X_s, dy) E_y[f_2(C_{j_0}, X_{j_0})] 1_{F^c}(y).$$

Le processus $\sum_{0<g\leq t} f_1(0, X_{g-}) 1_G(g)$ étant prévisible, le processus K_t^{4p} vaut donc:

$$K_t^{4p} = \int_0^t 1_G(s) dL_s \int N(X_s, dy) E_y[f(0, X_{s-}, C_{j_0}, X_{j_0})] 1_{F^c}(y).$$

Ce résultat subsiste pour tout f par classe monotone.

Quant à K_t^5 notons que:

$$1_{M_{s,r}^{\to}}(g)\,1_\Gamma(g)=1_{M_{s,r}^{\to}}(g)\,1_{\mathscr{S}}(g)\,1_{\{\Delta C_g\neq 0\}}=1_{M_{s,r}^{\to}}(g)\,1_{\{\Delta C_g 1_{\mathscr{S}}(g)\neq 0\}}$$

et puisque les processus $\sum_{0<g\leq t}\Delta C_g 1_{\mathscr{S}}(g)$ et $\sum_{0<s\leq t}\alpha(X_{s-},X_s)$ sont indistinguables, il en est de même pour les processus:

$$K_t^5 \quad \text{et} \quad \sum_{0<g\leq t} f(0,X_{g-},C_{D_g}-C_g,X_{D_g})\,1_G(g)\,1_{M_{s,r}^{\to}}(g)\,1_{\{\alpha(X_{g-},X_g)\neq 0\}}$$

Mais $M_{s,r}^{\to}=\{(g,\omega)\,|\,g<D_g(\omega),\ X_{g-}\in F,\ X_g\notin F\}$, ce qui permet d'écrire que:

$$K_t^5=\sum_{0<g\leq t} f(0,X_{g-},C_{D_g}-C_g,X_{D_g})\,1_G(g)\,1_{\{g<D_g,X_{g-}\in F,X_g\notin F\}}\,1_{\{\alpha(X_{g-},X_g)>0\}}$$

Posons

$$\ell(x,y)=E_y f(0,x,C_{j_0},X_{j_0})\,1_{\{j_0>0\}}$$

et

$$K_t^6=\sum_{0<g\leq t}\ell(X_{g-},X_g)\,1_{\{X_{g-}\in F,X_g\notin F\}}\,1_G(g)\,1_{\{\alpha(X_{g-},X_g)\neq 0\}}.$$

K_t^6 est la projection duale optionnelle de K^5, par suite les projections duales prévisibles de K^5 et K^6 sontidentiques. Or la théorie des systèmes de Levy permet de calculer aisément K_t^{6p}:

$$K_t^{6p}=\int_0^t dL_s\,1_G(s)\,1_{\{X_{s-}\in F\}}\int N(X_{s-},dy)\ \ell(X_{s-},y)\,1_{\{\alpha(X_{s-},y)\neq 0\}}\,1_{F^c}(y).$$

Résumons le long calcul qui précède:

Théorème 17. *Pour toute loi $\hat{P}^{\hat{\mu}}$, la projection duale $\hat{\mathbf{F}}$ prévisible du processus croissant $\hat{K}_t=\sum_{0<s\leq t} f(\hat{X}_{s-},\hat{X}_s)\,1_{\mathscr{S}^i}(s)$ est le processus continu $\hat{K}_t^{\hat{p}}$ défini par:*

$$\hat{K}_t^{\hat{p}}(\lambda,\omega)=(U)_{i_{t-\lambda}}(\omega)\,1_{\{t>\lambda\}}=U_{j_{t-\lambda}}(\omega)\,1_{\{t>\lambda\}}$$

où U est le processus croissant $\mathbf{F}$ adapté continu défini par:

$$\begin{aligned}U(\omega)=&\int_0^t 1_G(s)\,dL_s(\omega)\int N(X_{s-}(\omega),dy)\,\{[f(0,X_{s-}(\omega),\alpha(X_{s-}(\omega),y),y)]\\&-1_{F^c}(y)\,E^y[f(0,X_{s-},C_{j_0},X_{j_0})(1_{\{\alpha(X_{s-}(\omega),X_0)\neq 0\}}]\}\\&+\int_0^t 1_G(s)\,dJ_s(\omega)\,\hat{E}_{X_s}(\omega)[f(0,X_0,C_{j_0},X_{j_0})]\end{aligned}$$

où L et J sont des fonctionnelles continues, N est le noyau de Levy du processus X et où α est une fonction positive sur $E\times E-\Delta$ vérifiant

$$\sum_{0<s\leq t}\Delta C_s\,1_{\mathscr{S}}(s)=\sum_{0<s\leq t}\alpha(X_{s-},X_s).$$

Corollaire 18. *Le processus $\hat{K}^{\hat{p}}$ défini précédemment est pour toute loi $\hat{P}^{\hat{\mu}}$ la* *projection duale* **G** *prévisible du processus croissant:*

$$\hat{K}_t = \sum_{0<s\leq t} f(\hat{X}_{s^-}, \hat{X}_s)\, 1_{\mathscr{S}^i}(s).$$

(*Rappelons que* $\mathbf{G}_t$ *désigne la filtration canonique de* $\hat{X}$.)

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer que $\hat{K}^p$ est **G** adaptée. Pour cela nous reprendrons un argument qui figure dans [5], théorème 14.

Un calcul simple mais fastdieux permet d'établir que $\hat{K}^p$ est une $\hat{\theta}$ fonctionnelle additive. Ceci permet d'écrire que:

$$\hat{E}^{\mu}\left(\int_t^{\infty} e^{-s}\, d\hat{K}_s^p \,|\, \hat{\mathbf{F}}_s\right) = e^{-t}\, \hat{E}^{\mu}\left(\int_0^{\infty} e^{-s}\, d\hat{K}_s^p \circ \hat{\theta}_t \,|\, \hat{\mathbf{F}}_s\right)$$
$$= e^{-t}\, \hat{E}^{\mu}\left(\hat{E}^{\hat{X}_t} \int_0^{\infty} e^{-s}\, d\hat{K}_s^p\right).$$

Posons $u(\lambda, x) = \hat{E}^{(\lambda, x)}\left(\int_0^{\infty} e^{-s}\, d\hat{K}_s^p\right)$. La fonction u est universellement mesurable et le processus $u(\hat{X}_t)$ est **G** adapté.

D'autre part $u(\hat{X}_t)$ est un potentiel de la classe D d'après la relation précédente. La formule de Meyer sur les Laplaciens approchés (cf. par exemple [3]) montre que puisque $\hat{K}^p$ est continue, pour toute loi μ, $\hat{P}^{\mu}$ ps.

$$\int_0^t e^{-s}\, d\hat{K}_s^p = \lim_{L^1(P^{\mu})} \frac{1}{h}\left\{\int_0^t e^{-s}(u(\hat{X}_s) - e^{-h}\, \hat{E}^{\hat{X}_s}[u(\hat{X}_h)]\, \mathrm{ds.}\right\}$$

Les processus qui interviennent dans le membre de droite sont $\mathbf{G}_t$ mesurables et leur limite $\int_0^t e^{-s}\, d\hat{K}_s^p$, indépendante de μ est aussi $\mathbf{G}_t$ mesurable puisque les tribus $\mathbf{G}_t$ sont $\hat{P}^{\hat{\mu}}$ complètes pour toute loi $\hat{\mu}$. Il s'ensuit que $\hat{K}^p$ est **G** adapté.

Remarque. En fait nous n'avons pas calculé le système de Levy au sens habituel du terme: dans le processus croissant $\hat{K}_t$ la sommation ne porte que sur les temps d'arrêts totalement inaccessibles des tribus $\hat{\mathbf{F}}_t$ plus «grosses» que les tribus canoniques $\mathbf{G}_t$.

Lorsque $\hat{X}$ est un processus droit, on peut établir (cf. [5]) que $\hat{K}^p$ est bien la projection duale **G** prévisible du processus croissant $\sum_{0<s\leq t} f(\hat{X}_{s^-}, X_s)$ où la somme est effectuée sur tous les t.a. **G** totalement inaccessibles.

Par contre si l'on ne sait pas que $\hat{X}$ est droit, un tel résultat nécessite une étude des **G** temps d'arrêts totalement inaccessibles qui n'entre pas dans le cadre de ce travail.

Bibliographie

1. Benveniste, A., Jacod, J.: Systèmes de Levy des processus de Markov. Invent. Math. **21**, 183–198 (1973)
2. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processus and potential theory. New York: Academic Press 1968

3. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Dans Ergebnisse der Mathematik und Grenzgebiete. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
4. El Karoui, N., Reinhard, H.: Compactification et balayage de processus droits. Asterisque **21**, Note (1975)
5. El Karoui, N.: Balayage et changement de temps (à paraître)
6. El Karoui, N., Meyer, P.A.: Changement de temps en théorie générale. Sém. de Probabilités Strasbourg XI. Lecture Notes in Mathematics **581**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
7. El Karoui, N., Weidenfeld, G.: Théorie générale et changement de temps. Sém. de Probabilités - Strasbourg XI. Lecture Notes in Mathematics **581**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
8. Getoor, R.K.: Markov processes: Ray processes and right processes. Lecture Notes in Math. **440**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
9. Jacod, J.: Systèmes regeneratifs et processus semi-markoviens. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **31**, 1-23 (1974)
10. Maisonneuve, B.: Systèmes regeneratifs. Asterisque **15**, pages (1974)
11. Maisonneuve, B., Meyer, P.A.: Ensembles aléatoires markoviens homogènes. Sém. de Probabilités Strasbourg VIII. Lecture Notes in Mathematics **381**, (172-261). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
12. Meyer, P.A.: Processus de Markov. Lecture notes in Math. **26**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
13. Sharpe, M.J.: Fonctionnelles additives de processus de Markov. Cours de 3ème cycle à l'université de Paris VI (1973-74)
14. Walsh, J.B.: The perfection of multiplicative functionnels. Sém. de Probabilités - Strasbourg VI. Lecture notes in Math. **258**, 233-242. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
15. Weidenfeld, G.: Changement de temps et processus de Markov. Thèse de 3ème cycle; Université Paris 6. Paris 1977
16. Weidenfeld, G.: Changement de temps et processus de Markov. C.R. Acad. Sci. Paris Séries A-B t. 285 pp. (1977)

Reçu le 8 Juin 1978; en forme révisée le 5 Févrièr 1980