Probab. Th. Rel. Fields 77, 481–496 (1988)

Probability Theory and Related Fields

Un théorème de Choquet-Deny pour les groupes moyennables

Albert Raugi

IRMAR, U.E.R. de Mathématiques, Université de Rennes I, Campus Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

Summary. Let G be a connected locally compact separable amenable group. Let σ be a positive measure on the Borel σ-field of G. We study the positive Borel functions h on G which satisfy: $\forall g \in G, \int_G h(gx)\,\sigma(dx) = \int_G h(xg)\,\sigma(dx) = h(g)$. Under "smooth" assumptions on σ, we establish an integral representation of these functions in term of exponentials.

Résumé. Soit G un groupe moyennable connexe, locallement compact, à base dénombrable. Soit σ une mesure positive sur les boréliens de G. Nous étudions les fonctions boréliennes positives h vérifiant: $\forall g \in G, \int_G h(gx)\,\sigma(dx) = \int_G h(xg)\,\sigma(dx) = h(g)$. Sous «de bonnes» hypothèses sur σ, nous obtenons, pour ces fonctions, une représentation intégrale à l'aide d'exponentielles.

1. Enoncé du résultat principal

(1.1) Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et σ une mesure de Radon positive sur G.

Nous disons que σ vérifie *l'hypothèse* (H) si σ possède une densité continue à support compact (par rapport à une mesure de Haar de G) et si le semi-groupe fermé de G engendré par le support de σ est égal à G tout entier.

(1.2) Nous appelons H_σ l'espace des fonctions boréliennes positives h telles que, pour tout $g \in G$,

$$h(g) = \int_G h(gx)\,\sigma(dx) = \int_G h(xg)\,\sigma(dx).$$

Outre la fonction nulle, il est clair que H_σ contient les *exponentielles harmoniques*; c'est-à-dire les homomorphismes de groupe χ de G dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ tels que $\int_G \chi(g)\,\sigma(dg) = 1$.

Le théorème suivant nous dit que tout élément non nul de H_σ est en fait «une moyenne» d'exponentielles harmoniques. Si $[G, G]$ désigne le groupe dérivé de G on a donc, pour tout $h \in H_\sigma$, $h(gx) = h(g)$, $\forall x \in [G, G]$, $\forall g \in G$.

(1.3) **Théorème.** *Soient G un groupe L.C.D. moyennable connexe et σ une mesure de Radon positive sur G vérifiant l'hypothèse (H).*

Alors muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, H_σ est une côn réticulé à base compacte dont les extrémales sont les exponentielles harmoniques.

Dans la Sect. 2, nous montrons que H_σ est un cône réticulé à base compacte. Grâce au théorème de représentation intégrale de Choquet, nous sommes alors amenés à chercher les éléments extrémaux de H_σ.

Dans la Sect. 3, nous associons à tout élément non nul h de H_σ une probabilité ${}^h\mathbb{P}$ et un cocycle multiplicatif ξ^h sur le G-espace $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$ tel que:

$$h(g) = h(e) \int_\Omega \xi^h(g, \omega)\, d\,{}^h\mathbb{P}(\omega).$$

[Ω est un G-espace de façon naturelle: pour $g \in G$ et $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$, $g \cdot \omega = (g, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$. Un *cocycle multiplicatif* ξ sur un G-espace E est une fonction positive sur $G \times E$ vérifiant

$$\xi(xy, u) = \xi(x, y \cdot u)\, \xi(y, u), \ \forall x, y \in G, \ \forall u \in E].$$

Pour rendre la lecture possible sans connaissance de la théorie élémentaire des groupes de Lie, la démonstration du théorème est d'abord faite dans le cas du groupe des matrices triangulaires supérieures (Sect. 4). La démonstration consiste à montrer que pour un élément *extrémal* de H_σ, le cocycle ξ^h est constant sur Ω.

Signalons que dans le cas du groupe affine de la droite réelle, sous l'hypothèse (H), on connaît explicitement (voir [3]) les éléments de HG_σ [ou HD_σ]. Le théorème (1.3) n'en est pas immédiat pour autant.

2. Etude du cône des fonctions bi-σ-harmoniques

(2.0) Dans cette section G est un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et σ une mesure de Radon positive sur G. Nous notons e l'élément neutre de G. Nous désignons par $C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G et par $C_K(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G. Nous notons T_σ le semi-groupe fermé engendré par le support de la mesure σ.

Une fonction borélienne positive h sur G est dite *σ-harmonique à gauche* [respectivement *σ-harmonique à droite*] si elle vérifie l'égalité fonctionnelle:

$$h(s) = \int_G h(sx)\, \sigma(dx), \qquad \forall s \in G$$

$$[\text{respectivement } h(s) = \int_G h(xs)\, \sigma(dx), \ \forall s \in G].$$

Une fonction qui est à la fois σ-harmonique à droite et à gauche sera dite *bi-σ-harmonique.*

Nous désignons par HG_σ l'espace des fonctions continues positives σ-harmoniques à gauche sur G; par HD_σ l'espace des fonctions continues positives σ-harmoniques à droite sur G; et par $H_\sigma = HG_\sigma \cap HD_\sigma$ l'espace des fonctions continues positives bi-σ-harmoniques sur G. Si f est une fonction sur G et u un élément de G on note f^u la translatée à gauche de f par u; $f^u(x) = f(ux)\ \forall\, x \in G$. L'espace HG_σ est stable par translation à gauche. De même HD_σ est stable par translation à droite.

Dans la suite, nous envisageons le cas où H_σ n'est pas réduit à la fonction identiquement nulle sur G; autrement dit $H_\sigma^* = H_\sigma - \{0\}$ n'est pas vide.

(2.1) Lorsque σ vérifie l'hypothèse (H) nous écrivons: $\sigma(dx) = \varphi(x)\,dx$; où dx désigne une mesure de Haar à gauche sur G et φ un élément de $C_K(G)$. En outre nous posons:

$$\lambda(dx) = \sum_{k \geqq 1} 2^{-k} \sigma^{*k}(dx) = \psi(x)\,dx.$$

Puisque $T_\sigma = G$, la fonction ψ ainsi que toute fonction (non nulle) σ-harmonique positive à gauche ou à droite est strictement positive sur G.

(2.2) **Lemme.** *Si σ vérifie l'hypothese (H), alors pour tout élément h de HG_σ, nous avons:*

$$|h(x) - h(y)| \leqq h(e)\, \varepsilon(x, y);$$

où

$$\varepsilon(x, y) = \sup_{u \in G} [|\varphi(x^{-1}u) - \varphi(y^{-1}u)|/\psi(u)].$$

Nous avons évidemment un résultat analogue pour les éléments de HD_σ.

Nous munissons $C(G)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts; $C(G)$ est alors un espace vectoriel topologique métrisable localement convexe. Du lemme (2.2) on déduit:

(2.3) **Corollaire.** *Soient G un groupe L.C.D. et σ une mesure de Radon positive vérifiant l'hypothèse (H). Alors, dans $C(G)$, H_σ est un cône réticulé à base compacte.*

Preuve. Il est clair que H_σ est un cône. Il est réticulé car on voit aisément que pour deux éléments h_1 et h_2 de H_σ, la fonction

$$h(g) = \lim_p \searrow \lim_q \searrow \iint h_1 \wedge h_2(u g v)\, \sigma^p(du)\, \sigma^q(dv)$$

est le plus grand élément de H_σ qui minore h_1 et h_2.

Soit $B = (h \in H_\sigma \colon h(e) = 1)$; B constitue une base du cône H_σ. Du lemme (2.2) il résulte que les restrictions des éléments de B à tout compact de G forment une famille bornée et équicontinue de fonctions. D'après le théorème d'Ascoli, cette famille est donc relativement compacte. Comme H_σ et B sont fermés dans $C(G)$, il s'ensuit que B est compacte. □

D'autre part du lemme (2.2), il résulte que les éléments de HG_σ et HD_σ possèdent les propriétés de continuité suivantes.

(2.4) **Corollaire.** *Si σ vérifient l'hypothèse (H) alors pour tout élément de HG_σ [respectivement HD_σ], il existe une fonction continue δ sur G vérifiant $\delta(e)=0$ et telle que $\forall\, u, g \in G\ |h(ug)-h(u)| \leqq \delta(g)\, h(u)$ [resp. $|h(gu)-h(u)| \leqq \delta(g)\, h(u)$].*

Preuve. Par exemple, pour la première assertion, il suffit d'appliquer le lemme (2.2) à l'élément h^u: $v \to h(uv)$ de HG_σ avec $x=g$ et $y=e$; on a alors $\delta(g) = \varepsilon(g, e)$. □

Au terme de cette section nous avons établi pour les éléments de H_σ des propriétés de continuité importantes et nous avons démontré que H_σ était un cône réticulé à base compacte. D'après le théorème de Choquet nous savons alors que l'ensemble E_σ des éléments extrémaux de H_σ est un borélien de H_σ et pour tout élément de H_σ il existe une unique mesure positive ν portée par E_σ telle que $h(g) = \int \chi(g)\, \nu(d\chi)$, $\forall\, g \in G$. Nous sommes donc amenés à rechercher les éléments extrémaux de H_σ.

3. Fonctions harmoniques et variables aléatoires invariantes

Dans cette section nous associons à tout élément h de H_σ^* un cocycle multiplicatif ξ^h sur le G-espace $G^{\mathbb{N}^*}$. C'est l'étude de ce cocycle qui nous permettra de résoudre le problème posé.

Nous reprenons les notations de la Sect. 2 et nous supposons que σ vérifie l'hypothèse (H).

(3.1) Soit $h \in HG_\sigma^*$. On considère la probabilité de transition ${}^hP$ sur G définie par: ${}^hPf(g) = (1/h(g)) \int_G f(gu)\, h(gu)\, \sigma(du)$.

Pour tout entier $n \geqq 1$, on définit sur G^n la probabilité:

$$\mu_n(dx_1, \ldots, dx_n) = [h(x_1 \ldots x_n)/h(e)]\, \sigma(dx_1) \ldots \sigma(dx_n).$$

D'après le théorème de Kolmogorov, il existe une unique mesure de probabilité ${}^h\mathbb{P}$ sur $G^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier $n \geqq 1$, la projection de ${}^h\mathbb{P}$ sur G^n soit égale à μ_n.

On note $\{Y_n;\, n \geqq 1\}$ les coordonnées de $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$ et on pose

$$X_0 = e; \qquad X_n = Y_1 \ldots Y_n \quad \forall\, n \geqq 1.$$

Pour $n \geqq 1$, on appelle $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{Y_k: 1 \leqq k \leqq n\}$. On désigne par $\mathscr{F}_0$ la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. On vérifie aisément que $(\Omega = G^{\mathbb{N}^*}, \mathscr{F} = \mathscr{B}(G^{\mathbb{N}^*}), (X_n)_{n \geqq 0}, (\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}, {}^h\mathbb{P})$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^hP$, partant de e.

(3.2) De la même façon, si h est un élément de HD_σ^*, considérons: la probabilité de transition ${}^h\tilde{P}$ sur G définie par

$${}^h\tilde{P}f(g) = (1/h(g)) \int_G f(ug)\, h(ug)\, \sigma(du);$$

l'unique probabilité ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$ sur les boréliens de $G^{\mathbb{N}^*}$ dont la projection sur G^n, $n \geqq 1$, est la probabilité $[h(x_n \dots x_1)/h(e)]\, \sigma(dx_1) \dots \sigma(dx_n)$. *Posons*: $\tilde{X}_0 = e$; $\tilde{X}_n = Y_n \dots Y_1$, $n \geqq 1$. $(\Omega, \mathscr{F}(\tilde{X}_n)_{n \geqq 0}, (\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}, {}^h\tilde{\mathbb{P}})$ est alors une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^h\tilde{P}$ partant de e.

(3.3) Supposons désormais que h soit un élément de H_σ^*. D'après le corollaire (2.4), il existe une fonction continue δ sur G, nulle en e, telle que:

$$|h(gx) - h(x)| \leqq \delta(g)\, h(x) \quad \text{et} \quad |h(xg) - h(x)| \leqq \delta(g)\, h(x) \qquad \forall x, g \in G.$$

On en déduit que:

$$(1 + \delta(g^{-1}))^{-1} \leqq h(gx)/h(x),\ h(xg)/h(x) \leqq 1 + \delta(g) \quad \forall x, g \in G.$$

Pour tout $g \in G$ et tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega$, nous posons:

$$\xi^h(g, \omega) = \limsup_n [h(g\omega_1 \dots \omega_n)/h(\omega_1 \dots \omega_n)];$$

$$\tilde{\xi}^h(g, \omega) = \limsup_n [h(\omega_n \dots \omega_1 g)/h(\omega_n \dots \omega_1)].$$

Pour tous $x, g \in G$ et tout $\omega \in \Omega$, nous avons:

$$(1 + \delta(g^{-1}))^{-1} \leqq \xi^h(g, \omega),\ \tilde{\xi}^h(g, \omega) \leqq 1 + \delta(g);$$

$$|\xi^h(g, \omega) - \xi^h(x, \omega)| \leqq (1 + \delta(x))\, \delta(gx^{-1});$$

$$|\tilde{\xi}^h(g, \omega) - \tilde{\xi}^h(x, \omega)| \leqq (1 + \delta(x))\, \delta(x^{-1}g);$$

$$\int_G \xi^h(g, \omega)\, \sigma(dg) \geqq 1 \qquad \forall \omega \in \Omega;$$

et

$$\int_G \tilde{\xi}^h(g, \omega)\, \sigma(dg) \geqq 1 \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Dans la suite si $x = (x_1, \dots, x_r) \in G^r$ et $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega$, nous notons (x, ω) l'élément $(x_1, \dots, x_r, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots)$ de Ω.

(3.4) **Lemme.** *Soit h un élément de H_σ^*. Avec les notations ci-dessus nous avons:*

(i) $h(x) = h(e)\, {}^h\mathbb{E}[\xi^h(x, \cdot)] = h(e)\, {}^h\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\xi}^h(x, \cdot)]$, $\forall x \in G$;

(ii) *Pour ${}^h\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,*

$$\xi^h(gx, \omega) = \xi^h(g, (x, \omega))\, \xi^h(x, \omega) \qquad \forall x, g \in G$$

et pour ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\tilde{\xi}^h(xg, \omega) = \tilde{\xi}^h(g, (x, \omega))\, \tilde{\xi}^h(x, \omega) \qquad \forall x, g \in G;$$

(iii) $\int_G \xi^h(x g, \cdot)\, \sigma(d x) = \xi^h(g, \cdot)\ {}^h\mathbb{P}$-*p.s. et*

$$\int_G \tilde{\xi}^h(g x, \cdot)\, \sigma(d x) = \tilde{\xi}^h(g, \cdot)\quad {}^h\tilde{\mathbb{P}}\text{-}p.s.;$$

(iv) *en considérant* $G^{\mathbb{N}^*}$ *comme le produit cartésien* $G \times G^{\mathbb{N}^*}$, *nous avons*

$${}^h\mathbb{P}(d y, d\omega) = \xi^h(y, \omega)\, \sigma(d y)\, {}^h\mathbb{P}(d\omega);$$

et

$${}^h\tilde{\mathbb{P}}(d y, d\omega) = \tilde{\xi}^h(y, \omega)\, \sigma(d y)\, {}^h\tilde{\mathbb{P}}(d\omega).$$

Preuve. On se borne à prouver les résultats concernant le couple $(\xi^h, {}^h\mathbb{P})$. Pour tout $x \in G$, le processus $\{h(x X_n)/h(X_n\}; n \geqq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}\ {}^h\mathbb{P})$ est une martingale bornée relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}$. Ce processus converge donc ${}^h\mathbb{P}$-presque sûrement et dans tous les espaces L^p, $p \geqq 1$, vers la v.a. $\xi^h(x, \cdot)$ qui vérifie

$$(*) \qquad h(x X_n)/h(X_n) = {}^h\mathbb{E}[\xi^h(x, \cdot) | \mathscr{F}_n] \qquad \forall\, n \geqq 0.$$

Les assertions (i), (ii), et (iii) sont alors claires. A l'aide de la relation $(*)$ on vérifie aisément que les probabilités ${}^h\mathbb{P}$ et $\xi^h(g, \omega)\, \sigma(d g)\, {}^h\mathbb{P}(d\omega)$ coïncident sur l'algèbre de Boole $\bigcup_{n \geqq 0} \mathscr{F}_n$; d'où l'assertion (iv). □

(3.5) Nous introduisons l'opérateur θ de translation sur $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$; θ est l'application de Ω dans Ω qui à l'élément $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ de Ω associe l'élément $(\omega_2, \ldots, \omega_{n+1}, \ldots)$; autrement dit nous avons

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \forall\, n \geqq 1, \qquad Y_n(\theta(\omega)) = Y_{n+1}(\omega).$$

Nous appelons $\mathscr{T}$ la tribu des événements invariants; c'est à dire des éléments A de $\mathscr{F}$ tels que $\theta^{-1}(A) = A$. Une variable aléatoire Z est $\mathscr{T}$-mesurable si et seulement si $Z \circ \theta = Z$. Une telle variable sera dite invariante.

Du lemme (3.4) il résulte que les probabilités ${}^h\mathbb{P}$ et ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$ sont θ-invariantes pour tout élément h de H_σ^*.

(3.6) **Lemme.** *La fonction bi-σ-harmonique h est extrémale si et seulement si le système dynamique $(\Omega, \theta, {}^h\mathbb{P})$ (ou $(\Omega, \theta, {}^h\tilde{\mathbb{P}})$) est ergodique.*

Preuve. Soit A un événement θ-invariant, du lemme (3.4) il résulte que la fonction $f(g) = h(e)\, {}^h\mathbb{E}[1_A(\cdot)\, \xi^h(g, \cdot)]$ $(g \in G)$, est un élément de H_σ qui minore h et vérifie $\lim_n f(X_n)/h(X_n) = 1_A\ {}^h\mathbb{P}$-p.s. Si h est extrémale on a donc nécessairement ${}^h\mathbb{P}[A] = 0$ ou 1.

Réciproquement supposons que le système dynamique $(\Omega, \theta, {}^h\mathbb{P})$ soit ergodique et considérons un élément f de H_σ qui minore h. Pour tout $x \in G$, la martingale bornée $(f(g X_n)/h(X_n); n \geqq 0)$ converge ${}^h\mathbb{P}$-presque sûrement et dans tous les espaces L^p, $p \geqq 1$.

Pour tout $(g, \omega)\in G\times\Omega$, posons:

$$\Psi(g, \omega)=\limsup_n\left[f(gX_n(\omega))/h(gX_n(\omega))\right].$$

Nous avons alors, ${}^h\mathbb{P}$-p.s.:

$$\lim_n f(gX_n)/h(X_n)=\Psi(g,\cdot)\,\xi^h(g,\cdot)\quad\forall g\in G;$$

$$\Psi(g,(x,\cdot))=\Psi(gx,\cdot)\quad\forall g, x\in G;$$

$$\int_G\Psi(ug,\cdot)\,\xi^h(ug,\cdot)\,\sigma(du)=\Psi(g,\cdot)\,\xi^h(g,\cdot)\quad\forall g\in G.$$

Si F est une fonction borélienne positive (ou bornée) sur Ω, nous définissons la fonction:

$$TF(\omega)=\int_G F((u,\omega))\,\xi^h(u,\omega)\,\sigma(du)\qquad(\omega\in\Omega).$$

On vérifie aisément que pour toutes fonctions boréliennes positives (ou bornées) F et G, on a

$$T(F\circ\theta)=F\quad\text{et}\quad\int_\Omega TF(\omega)\,G(\omega)\,{}^h\mathbb{P}(d\omega)=\int_\Omega F(\omega)\,G\circ\theta(\omega)\,{}^h\mathbb{P}(d\omega).$$

Ces relations montrent que ${}^h\mathbb{P}$ est T-invariante et le système dynamique $(\Omega, T, {}^h\mathbb{P})$ est ergodique. De la relation $T\Psi(e,\cdot)=\Psi(e,\cdot)$ il résulte alors que la v.a. $\Psi(e,\cdot)$ est ${}^h\mathbb{P}$-p.s. constante.

On en déduit (assertion iv) du lemme (3.4)) qu'il existe un réel c tel que pour $\sigma\otimes{}^h\mathbb{P}$-presque tout $(g,\omega)\in G\times\Omega$, $\Psi(g,\omega)=\Psi(e,(g,\omega))=c$. Pour des raisons de continuité et en tenant compte du fait que $T_\sigma=G$, on obtient alors ${}^h\mathbb{P}$-p.s., $\Psi(g,\cdot)=c\;\forall g\in G$. Et par suite

$$f(g)=h(e)\,{}^h\mathbb{E}[\Psi(g,\cdot)\,\xi^h(g,\cdot)]=c\,h(g)\qquad\forall g\in G.\quad\square$$

(3.7) **Lemme.** *Soit h un élément extrémal de H_σ^*. Pour tout homomorphisme de groupes Ψ de G dans $(\mathbb{R},+)$, la suite de v.a.r. $\{(1/n)\,\Psi(X_n);\,n\geq 0\}$ converge ${}^h\mathbb{P}$-p.s. et ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$-p.s. vers le réel $\int_G\Psi(g)(h(g)/h(e))\,\sigma(dg)$. Si ce réel est nul sans que Ψ soit nul alors*: $\liminf_n\Psi(X_n)=-\infty$ *et* $\limsup_n\Psi(X_n)=+\infty$ *${}^h\mathbb{P}$-p.s. et ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$-p.s.*

Preuve. La première assertion résulte immédiatement du théorème ergodique via le lemme (3.6).

Les deux événements considérés dans la deuxième assertion sont θ-invariants; ils sont donc (lemme (3.6)) de probabilité 0 ou 1. Supposons par exemple que le second soit de probabilité nulle et posons $\varphi = \limsup_n \Psi(X_n)$. Nous avons $\Psi(g) = \varphi((g, \omega)) - \varphi(\omega)\ \forall g \in G,\ \forall \omega \in \Omega$; et par suite

$$\begin{aligned} {}^h\mathbb{E}[\Psi(Y_1)] &= \int_G \Psi(g)(h(g)/h(e))\, \sigma(dg) \\ &= \int_G \varphi((g, \omega))(h(g)/h(e))\, \sigma(dg) - \varphi(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

La dernière égalité entraîne que φ est presque sûrement constante pour la probabilité produit $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mu$ sur les boréliens de Ω; où $\mu = (h(g)/h(e))\, \sigma(dg)$. Ce qui implique $\Psi(Y_1) = 0$ $\bigotimes_{\mathbb{N}} \mu$-p.s.; d'où l'on déduit, puisque $T_\sigma = G$, que Ψ est l'homomorphisme nul. □

(3.8) **Lemme.** *Soit $h \in H_\sigma^*$. Pour tous $x, g \in G$, la suite de* v.a.r. $\{h(gX_n x)/h(X_n x); n \geqq 0\}$ *converge ${}^h\mathbb{P}$-p.s. vers $\xi^h(g, \cdot)$; et la suite de* v.a.r. $\{h(x\tilde{X}_n g)/h(x\tilde{X}_n); n \geqq 0\}$ *converge ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$-p.s. vers $\tilde{\xi}^h(g, \cdot)$.*

Preuve. Posons $H_g(x) = h(gx)/h(x)\ \forall x, g \in G$ et

$$U_n = \int_G (h(X_n x)/h(X_n))[H_g(X_n x) - H_g(X_n)]^2\, \sigma^r(dx) \quad \forall n \geqq 0\ (r \geqq 1).$$

On vérifie facilement que

$$U_n = ({}^hP^r[(H_g(\cdot) - H_g(X_n))^2])(X_n) = ({}^hP^r H_g^2)(X_n) - H_g^2(X_n);$$

et par suite

$${}^h\mathbb{E}[U_n] = {}^hP^{n+r} H_g^2(e) - {}^hP^n H_g^2(e).$$

Comme la suite $\{{}^hP^n H_g^2(e); n \geqq 0\}$ est croissante et majorée par $(1 + \delta(g))^2$, la série $\sum_{n \geqq 0} {}^h\mathbb{E}[U_n]$ est convergente. On en déduit, en particulier, que la suite de v.a.r. $\{H_g(X_n(\omega)x) - H_g(X_n(\omega)); n \geqq 0\}$ converge vers zéro pour ${}^h\mathbb{P} \otimes \sigma^r$-presque tout (ω, x). Le lemme est alors clair. □

(3.9) **Lemme.** *Soit φ un homomorphisme de groupes de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module* 1. *Alors pour tout ouvert V de $\mathbb{U}$,* $\limsup_n 1_V(\varphi(X_n)) = 1$ *${}^h\mathbb{P}$-p.s. et ${}^h\tilde{\mathbb{P}}$-p.s.*

Preuve. Soit m la mesure de Haar normalisée de $\mathbb{U}$. Nous définissons l'application Θ de $\mathbb{U} \times \Omega$ dans lui-même qui au couple (z, ω) associe le couple $(z\varphi(Y_1(\omega)), \theta\omega)$. La probabilité $m \otimes {}^h\mathbb{P}$ est Θ-invariante. Le lemme est alors une conséquence de la récurrence des systèmes dynamiques en mesure finie (Théorème de Poincaré). □

4. Démonstration du théorème dans le cas du groupe des matrices triangulaires

(4.1) Nous notons $M(d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre d à coefficients réels. Si M est une matrice de $M(d, \mathbb{R})$, nous appelons $\{a_{ij}(M); i, j \in \{1, \ldots, d\}\}$ les coordonnées de M.

Pour tout $(l, k) \in \{1, \ldots, d\}^2$, nous notons $E_{(l,k)}$ la matrice définie par:

$$a_{ij}(E_{l,k}) = 1 \quad \text{si} \quad (i, j) = (l, k); 0 \text{ sinon}.$$

(4.2) Nous désignons: par G le groupe des matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux strictement positifs; par A le groupe des matrices diagonales à éléments strictement positifs et par N le sous-groupe de G formé des matrices ayant des «1» pour éléments diagonaux. A est un sous-groupe fermé abélien de G; N est un sous-groupe fermé nilpotent distingué de G. Tout élément g de G s'écrit de façon unique $g = av$ avec $a \in A$ et $v \in N$; ou encore $g = v'a'$ avec $v' \in N$ et $a' \in A$.

Nous posons $\Lambda = \{(i, j) \in \{1, \ldots, d\}^2 : i < j\}$. Nous désignons par $N_d = \{I\} \subset N_{d-1} \subset \ldots \subset N_2 \subset N_1 = N$, la série centrale descendante du groupe nilpotent N. Nous avons, pour $r \in \{2, \ldots, d-1\}$,

$$N_r = \{g \in N : a_{i,i+l}(g) = 0, \text{ pour tout } (i, i+l) \in \Lambda \text{ avec } 1 \leqq l < r\}.$$

(4.3) Nous introduisons la famille d'homomorphismes de groupes $\{\varphi_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ de G dans $(\mathbb{R}_+^*, X)$ définie par

$$\varphi_\lambda(g) = a_{ii}(g)/a_{jj}(g), \quad \text{si} \quad \lambda = (i, j) \in \Lambda.$$

Pour tout $g = av \in G$ (avec $a \in A$ et $v \in N$) et tout $u \in N_r$, nous avons $gug^{-1} = avuv^{-1}a^{-1} = aua^{-1}[a(u^{-1}vuv^{-1})a^{-1}] = aua^{-1}y$ où $y \in N_{r+1}$.

On en déduit que, pour tous $g \in G$, $\lambda = (i, i+r) \in \Lambda$, $t \in \mathbb{R}$

$$g(I + tE_\lambda)g^{-1} = (I + t\varphi_\lambda(g)E_\lambda)y \quad \text{où} \quad y \in N_{r+1}.$$

(4.4) Nous ordonnons l'ensemble Λ à l'aide de la bijection ρ de Λ dans $\{1, \ldots, d(d-1)/2\}$ qui au couple $(i, i+r)$ de Λ associe l'entier $i + (d-r-1)(d-r)/2$.

Pour tout $\lambda = (i, i+r) \in \Lambda$, nous posons

$$H_{\rho(\lambda)} = N_{r+1}\Big(I + \sum_{1 \leqq k \leqq i} \mathbb{R}E_{(k,k+r)}\Big).$$

Les sous-groupes $(H_{\rho(\lambda)}: \lambda \in \Lambda)$ sont des sous-groupes distingués fermés de N. Nous avons:

$$\forall r \in \{1, \ldots, d-1\}, \qquad N_r = H_{\rho((d-r,d))} = H_{(d-r)(d-r+1)/2};$$

$$H_0 = (I) \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{d(d-1)/2} = N \subset H_{(d(d-1)/2)+1} = G.$$

(4.5) *Définition.* Pour $i \in \{0, \ldots, (d(d-1)/2)+1\}$, nous disons qu'un élément h de H_σ vérifie *la propriété* (P_i) s'il existe un homomorphisme de groupe χ de H_i dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ tel que:

$$(*) \qquad h(x\,g)=h(g\,x)=\chi(x)\,h(g) \qquad \forall\, x\in H_i,\ \forall\, g\in G.$$

(4.6) *Remarque.* Des relations $(*)$ ci-dessus, il résulte, en écrivant $h(g\,x) = h((g\,x\,g^{-1})\,g)$, que

$$\chi(g\,x\,g^{-1})=\chi(x), \qquad \forall\, x\in H_i,\ \forall\, g\in G;$$

et par suite

$$\forall\, n_1, n_2\in N, \forall\, u\in H_{i+1}, \chi(u\,n_1\,n_2\,u^{-1}(n_1\,n_2)^{-1})=\chi(u\,n_1\,u^{-1}\,n_1^{-1})\,\chi(u\,n_2\,u^{-1}\,n_2^{-1}).$$

Le théorème (1.3) résulte alors de la proposition suivante.

(4.7) **Proposition.** *Tout élément extrémal h de H_σ^* vérifiant la propriété (P_i) vérifie la propriété (P_{i+1}).*

Preuve. On voit facilement que h vérifie la propriété (P_i) si et seulement si (notations de la Sect. 3):

i) $\xi^h(x,\cdot)=\chi(x)$ ${}^h\mathbb{P}$-p.s., $\forall\, x\in H_i$.

ii) $\xi^h(g\,x,\cdot)=\xi^h(x\,g,\cdot)=\chi(x)\,\xi^h(g,\cdot)$ ${}^h\mathbb{P}$-p.s., $\forall\, x\in H_i$, $\forall\, g\in G$.

Nous commençons par supposer que $i<d(d-1)/2$. Dans ce cas nous avons (voir (4.4)):

$$H_{i+1}=H_i(I+\mathbb{R}\,E_{\lambda_i}),$$

pour un certain $\lambda_i\in\Lambda$; et pour tous $g\in G$, $t\in\mathbb{R}$

$$g(I+t\,E_{\lambda_i})\,g^{-1}=(I+t\,\varphi_{\lambda_i}(g)\,E_{\lambda_i})\,y \quad \text{où} \quad y\in H_i.$$

Nous envisageons les deux sous cas suivants:

1^er cas: $\int_G \log\varphi_{\lambda_i}(g)\,h(g)\,\sigma(d\,g)\geqq 0.$

(4.8) D'après lemme (3.7), nous savons alors que:

$$\liminf_n \varphi_{\lambda_i}(X_n^{-1})=0 \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Soit $u=I+t\,E_{\lambda_i}$ avec $t\in\mathbb{R}$. Pour tout $g\in G$, nous avons

$$\begin{aligned} h(g\,u\,X_n)/h(u\,X_n) &= h[g\,X_n(X_n^{-1}\,u\,X_n)]/h[X_n(X_n^{-1}\,u\,X_n)] \\ &= h[g\,X_n(1+t\,\varphi_{\lambda_1}(X_n^{-1})\,E_{\lambda_1})]/h[X_n(1+t\,\varphi_{\lambda_1}(X_n^{-1})\,E_{\lambda_1})]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit lemme (3.8):

$$\xi^h(g,(u,\cdot))=\xi^h(g,\cdot) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.};$$

et par suite

$$(1) \qquad \xi^h(g\,u,\cdot)=\xi^h(g,\cdot)\,\xi^h(u,\cdot) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}, \qquad \forall\, g\in G,\ \forall\, u\in H_{i+1}.$$

D'autre part nous avons, pour $v \in N$ et $g \in G$,

$$h(u v g) = h((u v u^{-1} v^{-1}) v u g) = \chi(u v u^{-1} v^{-1})\, h(v u g);$$

d'où l'on déduit, ${}^h\mathbb{P}$-p.s.,

$$\begin{aligned} \xi^h(u v, \cdot) &= \xi^h(v u, \cdot)\, \chi(u v u^{-1} v^{-1}) \\ &= \xi^h(v, \cdot)\, \xi^h(u, \cdot)\, \chi(u v u^{-1} v^{-1}) \quad \text{(relation (1))}; \end{aligned}$$

ou encore:

(2) $$\xi^h(u, (v, \cdot)) = \xi^h(u, \cdot)\, \chi(u v u^{-1} v^{-1}).$$

Or

$$(1 + \delta(x^{-1}))^{-1} \leqq \xi^h(x, \omega) \leqq 1 + \delta(x), \qquad \forall\, x \in G,\ \forall\, \omega \in \Omega;$$

de (2), via la remarque (4.6), il résulte alors que

(3) $$\chi(u v u^{-1} v^{-1}) = 1, \qquad \forall\, v \in N.$$

De (3) il s'ensuit que:

$$h(u g X_n)/h(X_n) = h[g X_n (1 - \varphi_{\lambda_i}((g X_n)^{-1})\, t E_{\lambda_i})]/h(X_n)$$

et par suite, ${}^h\mathbb{P}$-p.s.,

(4) $$\xi^h(u g, \cdot) = \xi^h(g, \cdot), \qquad \forall\, g \in G.$$

De (1) et (4), on déduit que, $\forall\, g \in G$,

$$\xi^h(u g, \cdot) = \xi^h(g u, \cdot) = \xi^h(g, \cdot) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.};$$

et par suite on a la propriété (P_{i+1}).

$2^{\text{ème}}$ *cas.* $\int_G \log \varphi_{\lambda_i}(g)\, h(g)\, \sigma(d g) < 0.$

La démonstration est analogue à la précédente en travaillant avec le triplet «dual» $(\tilde{X}, \tilde{\xi}^h, {}^h\tilde{\mathbb{P}})$.

Supposons à présent que $i = d(d-1)/2$. Nous avons:

$$H_i = N, \qquad H_{i+1} = G = N A$$

et $\forall\, g \in G$, $\forall\, a \in A$, $g a g^{-1} = a y$ avec $y \in N$.

En reprenant la démonstration faite en (4.8), on obtient, en utilisant le lemme (3.8): d'abord

$$\xi^h(g a, \cdot) = \xi^h(g, \cdot)\, \xi^h(a, \cdot) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}, \qquad \forall\, g \in G,\ \forall\, a \in A;$$

puis ensuite

$$\chi(a g a^{-1} g^{-1}) = 1, \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, g \in G;$$

et enfin

$$\xi^h(a g, \cdot) = \xi^h(a, \cdot)\, \xi^h(g, \cdot) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}, \qquad \forall\, a \in A,\ \forall\, g \in G.$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi

$$\xi^h(a,(g,\cdot))=\xi^h(a,\cdot) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}, \qquad \forall g\in G,\ \forall a\in A;$$

ce qui montre que la v.a.r. $\xi^h(a,\cdot)$ est θ-invariante et donc (lemme (3.6)) ${}^h\mathbb{P}$-p.s. constante. D'où la propriété (P_{i+1}). $\square$

5. Démonstration du théorème dans le cas général

(5.1) Le cas d'un groupe L.C.D. connexe, se ramène à celui d'un groupe de Lie connexe. En effet, on sait ([5]) que pour tout groupe L.C.D. connexe, il existe des sous-groupes compacts distingués arbitrairement petits C tels que G/C soit un groupe de Lie connexe. En reprenant le raisonnement fait en (4.8) et en tenant compte du lemme (3.8), on obtient:

$$h(g\,c)=h(c\,g)=h(g), \qquad \forall c\in C,\ \forall g\in G.$$

D'où le résultat.

D'autre part si G est un groupe de Lie moyennable connexe, on sait [2] que G s'écrit RK où R est le radical de G (c-à-d. le plus grand sous-groupe distingué résoluble connexe de G) et K un sous-groupe compact connexe de G.

(5.2) (*Théorème de Lie*). Soit R un groupe de Lie résoluble connexe. Nous désignons: par $\mathscr{L}(R)$ son algèbre de Lie; par exp l'application exponentielle et par Ad la représentation adjointe de R dans $\mathscr{L}(R)$. Nous avons

$$\forall g\in R, \forall X\in\mathscr{L}(R), \qquad g(\exp X)\,g^{-1}=\exp(\operatorname{Ad} g(X)).$$

D'après le théorème de Lie, nous savons qu'il existe une base du complexifié $\mathscr{L}(R)^{\mathbb{C}}$ de $\mathscr{L}(R)$ telle que les matrices de $\operatorname{Ad} R$ soient triangulables simultanément. Les éléments diagonaux de $\operatorname{Ad} R$ définissent des homomorphismes de groupes φ de R dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ appelés *poids* de la représentation adjointe de R.

(5.3) Ceci dit nous démontrons le théorème (1.3) dans le cas où G est un groupe de Lie résoluble connexe. Comme dans le cas du groupe des matrices triangulaires supérieures, nous raisonnons par récurrence.

Supposons qu'il existe un sous-groupe fermé distingué H de G et un homomorphisme χ de H dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ tel que:

$$(*) \qquad h(g\,x)=h(x\,g)=\chi(x)\,h(g), \qquad \forall g\in G,\ \forall x\in H.$$

Le théorème de Lie, appliqué au groupe quotient $R=G/H$, nous dit qu'il existe un homomorphisme φ de G dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ et un élément X de $\mathscr{L}(G)^{\mathbb{C}}$, $X\notin\mathscr{L}(H)^{\mathbb{C}}$, tel que:

$$\forall g\in G, \qquad \operatorname{Ad} g(X)=\varphi(g)\,X+Y \quad \text{avec} \quad Y\in\mathscr{L}(H)^{\mathbb{C}}.$$

Si X est réel, φ est un homomorphisme de G dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et nous avons

$$\forall g \in G, \quad g(\exp tX)\, g^{-1} = \exp(\varphi(g)\, tX)\, u(g) \quad \text{avec} \quad u(g) \in H.$$

Si X est complexe, alors nous avons

$$\forall g \in G, \quad g(\exp(tX + \overline{tX}))\, g^{-1} = \exp(\varphi(g)\, tX + \overline{\varphi(g)\, tX})\, u(g) \quad \text{avec} \quad u(g) \in H.$$

Par un raisonnement en tout point analogue à celui de la Sect. 4, on montre alors que les relations $(*)$ se prolonge au sous-groupe fermé distingué L de G défini par:

$$L = H \exp \mathbb{R} X \qquad \text{dans le cas réel;}$$

$$L = H(\exp(tX + \overline{tX})\colon t \in \mathbb{C}) \quad \text{dans le cas complexe.}$$

Cependant pour ce faire on a besoin du lemme (3.9). En effet, on peut avoir $|\varphi(g)| = 1$, $\forall g \in G$ sans avoir $\varphi(g) = 1$, $\forall g \in G$.

(5.4) Envisageons à présent le cas où $G = RK$ avec K compact non nécessairement connexe.

En écrivant $Y_i = R_i K_i\, i \geqq 1$, nous avons

$$X_n = Y_1 \ldots Y_n = R_1 (K_1 R_2 K^{-1}) \ldots [(K_1 \ldots K_{n-1})\, R_n (K_1 \ldots K_{n-1})^{-1}]\, K_1 \ldots K_n.$$

Nous savons (voir ([6] Lemme (2.8))) que les éléments de K permutent les poids de la représentation adjointe de R. Si cette permutation est l'identité (ce qu'est le cas si K est connexe) nous avons

$$\varphi(k r k^{-1}) = \varphi(r), \qquad \forall r \in R, \ \forall k \in K,$$

pour tout poids φ; la démonstration du cas résoluble s'étend alors aisément au cas présent.

Au passage, on notera que le cas du groupe des matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux non nuls (et non plus strictement positifs) entre dans cette catégorie.

6. Lien avec les théorèmes classiques de Choquet-Deny

Après extension, nous allons montrer que le lemme (3.6) contient des généralisations des résultats de [1].

(6.1) Soient S un semi-groupe L.C.D. possédant un élément neutre e et σ une mesure de Radon positive *quelconque* sur les boréliens de S. Nous posons

$$\lambda = \sum_{n \geqq 0} (1/2)^n \sigma^{*n} \quad (\text{avec } \sigma^{*0} = \varepsilon_e).$$

Comme en (2.0), nous introduisons les espaces HG_σ et H_σ.

Nous posons $HG_\sigma^* = \{h \in HG_\sigma : h(e) > 0\}$ et $H_\sigma^* = \{h \in H_\sigma : h(e) > 0\}$. Pour tout élément h de HG_σ^* nous définissons la probabilité ${}^h\mathbb{P}$ comme en (3.1). Si X_n est comme en (3.1), pour $h \in HG_\sigma^*$, nous avons

$$ {}^h\mathbb{P}[h(X_n) = 0] = 0, \qquad \forall\, n \geqq 0. $$

(6.2) *Définition.* Un élément h de H_σ^* est dit *extrémal* si pour tout élément f de H_σ vérifiant $f \leqq h$ λ-p.p., nous avons $f = [f(e)/h(e)]\, h$ λ-p.p.

(6.3) **Proposition.** *Si $h \in H_\sigma^*$, ${}^h\mathbb{P}$ est θ-invariante et h est extrémale si et seulement si le système dynamique $(\Omega, \theta, {}^h\mathbb{P})$ est ergodique.*

Pour prouver la proposition, nous commençons par établir deux lemmes.

(6.4) **Lemme.** (i) $\forall\, h \in HG_\sigma^*$, $\theta({}^h\mathbb{P}) = {}^{h^\sigma}\mathbb{P}$ *où* $h^\sigma : g \to \int_S h(xg)\, \sigma(dx)$.

(ii) $\forall\, h \in HG_\sigma$, $\int h(x)\, {}^{h^x}\mathbb{P}\, \sigma(dx) = h(e)\, {}^{h^\sigma}\mathbb{P}$.

(iii) $\forall\, h \in H_\sigma$, $\forall\, g \in G$, $\int h(xg)\, {}^{h^{xg}}\mathbb{P}\, \sigma(dx) = h(g)\, {}^{h^g}\mathbb{P}$.

[Pour (ii) et (iii) on convient que $h(u)\, {}^{h^u}\mathbb{P} = 0$ si $h(u) = 0$]

Preuve. On montre l'égalité des mesures en vérifiant qu'elles coïncident sur la tribu $\mathscr{F}_n$, $\forall\, n \geqq 0$. □

(6.5) Pour $s \in S$, nous désignons par τ_S l'application de Ω dans Ω qui à $\omega \in \Omega = S \times \Omega$ associe $(s, \omega) \in \Omega$.

Nous appelons ${}^h\mathbb{P}_S$ la probabilité image de ${}^{h^s}\mathbb{P}$ par τ_S. On vérifie aisément que $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), (\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}, (X_n)_{n \geqq 0}, {}^h\mathbb{P}_S)$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^hP$ partant de s.

(6.6) *Preuve de la proposition.* De la première assertion du lemme (6.4) il résulte que ${}^h\mathbb{P}$ est θ-invariante pour tout $h \in H_\sigma^*$.

Soit h un élément de H_σ^* et A un événement θ-invariant de ${}^h\mathbb{P}$-probabilité non nulle. Du lemme (6.4) il résulte que la fonction f définie par $f(g) = h(g)\, {}^{h^g}\mathbb{P}[A]$, $(g \in G)$, est un élément de H_σ^*.

D'autre part de (6.5), via la propriété de Markov, il résulte que

$$ f(X_n)/h(X_n) = {}^h\mathbb{E}[1_A \mid \mathscr{F}_n] \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.} $$

Si h est un élément extrémal de H_σ^*, alors nous avons:

$$ f = [f(e)/h(e)]\, h \ \lambda\text{-p.p.}; $$

et par suite

$$ 1_A = f(e)/h(e) = 1 \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.} $$

Réciproquement supposons que le système $(\Omega, \theta, {}^h\mathbb{P})$ soit ergodique et soit $f \in H_\sigma$ tel que $f \leqq h$ λ-p.p.

Le processus $(f(X_n)/h(X_n);\, n \geqq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, {}^h\mathbb{P})$ est une martingale bornée; elle converge donc ${}^h\mathbb{P}$-p.s. vers une v.a.r. ψ vérifiant

$$f(X_n)/h(X_n) = {}^h\mathbb{E}[\psi \mid \mathscr{F}_n] \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.};$$

et par suite

$$f(e)\, {}^f\mathbb{P} = \psi(\cdot)\, h(e)\, {}^h\mathbb{P}.$$

De l'ergodité du système dynamique $(\Omega, \theta, {}^h\mathbb{P})$ il résulte alors que ψ est constante ${}^h\mathbb{P}$-p.s. Ce qui entraîne $f(X_n) = [f(e)/h(e)]\, h(X_n)$ ${}^h\mathbb{P}$-p.s. et par suite $f = [f(e)/h(e)]\, h$ λ-p.p. $\square$

(6.7) *Conséquences de la proposition* (6.3). Si σ est une probabilité et $h=1$, ${}^h\mathbb{P}$ est une probabilité produit et le système $(\Omega, \theta, {}^h\mathbb{P})$ est ergodique. La proposition (6.3) nous dit alors que la fonction 1 est extrémale. Toute fonction bi-σ-harmonique bornée h sur un semi-groupe L.C.D. S vérifie donc $h = h(e)$ λ-p.p.

Supposons à présent que S soit un semi-groupe abélien, alors pour tout $h \in H_\sigma$ et tout $s \in S$, h^s est encore un élément de H_σ. L'égalité

$$h(e)\, {}^h\mathbb{P} = \int h(s)\, {}^{h^s}\mathbb{P}\, \lambda(ds)$$

avec h extrémale, donc ${}^h\mathbb{P}$ ergodique, entraîne nécessairement que:

$$\int_A h(s)\, {}^{h^s}\mathbb{P}\, \lambda(ds) = \Big(\int_A h(s)\, \lambda(ds)\Big)\, h(e)\, {}^h\mathbb{P},$$

pour tout borélien A de S.

D'où l'on déduit que:

$$\int_A h(sX_n)\, \lambda(ds) = \int_A h(s)\, \lambda(ds)\, h(X_n) \quad {}^h\mathbb{P}\text{-p.s.}$$

et par suite:

$$h(st) = h(s)\, h(t)$$

pour $\lambda \otimes \lambda$-presque tout $(s, t) \in S^2$.

7. Théorème quotient

Le résultat obtenu permet d'étendre les résultats de [4] au cas d'un groupe L.C.D. moyennable connexe unimodulaire. Dans ce qui suit, nous nous contentons d'énoncer le résultat en laissant le soin au lecteur de consulter [4] pour les détails techniques.

Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe L.C.D. moyennable connexe unimodulaire. Nous supposons que μ vérifie l'hypothèse (H). Nous appelons *exponentielle* sur G tout homomorphisme de groupe de G dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$; nous notons $E(G)$ l'ensemble des exponentielles de G.

Posons $c=\inf\{\int_G \chi(g)\,\mu(dg) : \chi \in E(G)\}$. Alors il existe un unique $\chi_0 \in E(G)$ vérifiant $\int_G \chi_0(g)\,\mu(dg)=c$; si bien que la mesure $\sigma=c^{-1}\mu$ possède χ_0 comme seule fonction bi-σ-harmonique non nulle.

Pour tous éléments φ et ψ de $C_K(G)$, nous avons alors:

$$\lim_n \left(\int_G \varphi(x)\,\mu^n(dx) \Big/ \int_G \psi(x)\,\mu^n(dx)\right) = \int_G \varphi(x)\,\chi_0(x)\,dx \Big/ \int_G \psi(x)\,\chi_0(x)\,dx;$$

ou dx désigne «la mesure de Haar» de G.

References

1. Choquet, G., Deny, J.: Sur l'équation de convolution $\mu=\mu*\sigma$. C.R.A.S., **250**, 799–801 (1960)
2. Chevalley, C.: Théorie des groupes de Lie. Pub. de l'Inst. de Mathématiques de l'Université de Nancago. Paris: Hermann 1968
3. Elie, L.: Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine. Probability measures on groups. Proceedings Oberwolfach 1978. (Lect. Notes Math., vol. 706, pp. 96–110) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
4. Guivarc'h, Y.: Théorèmes quotients pour les marches aléatoires. Astérisque **74**, 15–28 (1980)
5. Montgomery, D., Zippin, L.: Topological transformation groups. New York: Interscience 1955
6. Raugi, A.: Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes. Bull. Soc. Math. Fr. mémoire **54**, 5–118 (1977)
7. Raugi, A.: Un théorème de Choquet-Deny pour les semi-groupes abéliens. Théorie du potentiel, proceedings, Orsay 1983. (Lect. Notes Math., vol. 1096, pp. 502–520) Berlin Heidelberg New York: Springer 1984

Received December 8, 1986; received in revised form November 28, 1987