Probab. Th. Rel. Fields 73, 463–480 (1986)

Probability Theory and Related Fields

Étude de processus généralisant l'Aire de Lévy

R. Berthuet

Département de Mathématiques Appliquées, Université de Clermont II, B.P. 45, F-63170 Aubiere, France

Summary. Given an n-dimensional Brownian motion $B(t)=(B_1(t), \ldots, B_n(t))$, we consider the stochastic process

"n-dimensional Lévy's Stochastic Area"

$$L_n(t)=\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \int_0^t \ldots \int_0^{t_2} B_{\sigma(1)}(t_1)\, dB_{\sigma(2)}(t_1) \ldots dB_{\sigma(n)}(t_{n-1})$$

where $\varepsilon(\sigma)$ is the signature of the permutation σ.

We show that this process can be explicitly expressed, as a functional F of 2-dimensional (ordinary) Lévy's Stochastic Areas.

F is calculated then evaluation of the characteristic function of $L_3(t)$ follows.

Then an iterated logarithm theorem is proved for $(L_n(t))$.

0. Introduction

Etant donné un mouvement brownien $B(t)=(B_1(t), \ldots, B_n(t))$ standard de $\mathbb{R}^n$, à toute permutation σ de (n), on associe l'intégrale stochastique itérée:

$$B_\sigma(t)=\int_0^t \ldots \int_0^{t_3} \left[\int_0^{t_2} B_{\sigma(1)}(t_1)\, dB_{\sigma(2)}(t_1)\right] dB_{\sigma(3)}(t_2) \ldots dB_{\sigma(n)}(t_{n-1}).$$

Des fonctions de ces intégrales itérées interviennent naturellement dans la formule de Taylor et comme solution de certaines équations différentielles stochastiques: voir notamment Yamato [15] qui donne une caractérisation intéressante; Fliess et Normand-Cyrot donnant dans [7] une autre approche.

Certaines combinaisons linéaires de ces intégrales itérées possèdent des propriétés intéressantes; c'est le cas de l'importante Aire de Lévy: $B_{12}(t)-B_{21}(t)$ pour $n=2$.

Des généralisations de celle-ci ont été étudiées par Gaveau [8], notamment la diffusion associée au laplacien de Kohn du groupe d'Heisenberg H_{2n+1}, et par Helmes et Schwane [9].

Nous proposons, dans le présent article, d'étudier une autre généralisation naturelle; nous appellerons processus de l'Aire de Lévy d'ordre n, le processus $L_n(t) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma B_\sigma(t)$ où ε_σ est la signature de σ.

Il nous semblait intéressant, notamment, de savoir si L_n pouvait être considéré comme une composante d'une diffusion M_n associée au laplacien de Kohn d'un groupe de Lie nilpotent d'ordre $p>2$.

Dans le premier paragraphe, nous montrons, que p.s., $L_n(t)$ est une fonctionnelle simple d'Aires de Lévy (ordinaires) d'ordre 2; comme, nous le montrons, ce résultat peut être considéré comme le calcul explicite d'une fonctionnelle de Yamato [15], l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs associés au système différentiel définissant M_n étant nilpotente d'ordre 2.

Ceci nous permet de donner dans le paragraphe 2, une expression simple de la transformée de Fourier et de la densité de $L_3(1)$.

Dans le dernier paragraphe, en utilisant une autre technique (formules à la Ventcell-Freidlin) nous donnons une estimation de la queue de la répartition de $L_n(t)$ ce qui nous permet d'établir une loi du logarithme itéré de $L_n(t)$ avec une expression presque explicite (maximum d'une fonction calculable simplement pour $n=2, 3$) de la limite supérieure.

Signalons une expression explicite de la transformée de Fourier du couple (B_{12}, B_{21}) dans [3], une estimation de la densité de $B_\sigma(1)$ par Schott [13], une loi fonctionnelle du logarithme itéré par Baldi [2] et l'article de X. Fernique [6].

1. Étude du support du processus $L_n(t)$

Nous montrons, que p.s., toute Aire de Lévy d'ordre n est une fonctionnelle simple d'Aire de Lévy d'ordre 2 puis, nous montrons que ces relations proviennent en fait des relations algébriques de structure de l'Algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs associés au «système différentiel de $L_n(t)$». Ce résultat peut être considéré comme le calcul explicite d'une fonctionnelle de Yamato [15] (voir aussi [10, 11]).

Si $[x]$ est la partie entière de x et $L_{(n)-\{j,k\}}$ l'Aire de Lévy d'ordre $n-2$, associée au mouvement brownien $(B_1(t), \ldots, B_{j-1}(t), B_{j+1}(t), \ldots, B_{k-1}(t), B_{k+1}(t), \ldots, B_n(t))$, nous avons:

Théorème 1.1. *Pour tout* $n \geqq 3$,

$$[n/2]\, L_n \underset{\text{p.s.}}{=} \sum_{1 \leqq j < k \leqq n} (-1)^{j+k+1} L_{(n)-\{j,k\}} L_{(j,k)}. \tag{1.1}$$

Ce théorème est la conséquence de 2 lemmes obtenus par une bonne utilisation de la formule d'Itô.

Introduisons les notations suivantes; pour tout $n \geqq 1$, $1 \leqq k \leqq n$:

- $I_{n,k}$ l'ensemble des k-uplets $a=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ d'éléments de $(n)=\{1, \ldots, n\}$ tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$.
- Σ_k l'ensemble des permutations σ de (k) et ε_σ la signature de σ.
- Pour $a=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ élément de $I_{n,k}$

$$\begin{aligned} L_a(t) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon_\sigma \int_0^t \ldots \int_0^{t_2} B_{\alpha_{\sigma(1)}}(t_1)\, dB_{\alpha_{\sigma(2)}}(t_1) \ldots dB_{\alpha_{\sigma(k)}}(t_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \int_0^t L_{a-\{\alpha_j\}}(s)\, dB_{\alpha_j}(s). \end{aligned}$$

(Aire de Lévy d'ordre k associée au mouvement brownien $(B_{\alpha_j}(t), 1 \leqq j \leqq k)$. Soit $M_n(t)$ le processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ avec $N=2^n-1$, de composantes $L_{I_{n,k}}(t)$, $1 \leqq k \leqq n$ où $L_{I_{n,k}}(t)$ a les $\binom{n}{k}$ composantes $L_a(t)$ ordonnées de la manière suivante:

si a, a^* sont deux éléments distincts de $I_{n,k}$

$$[a < a^*] \Leftrightarrow [\exists\, i;\ \forall j < i\ \ \alpha_j = \alpha_j^*,\ \alpha_i < \alpha_i^*].$$

Si $x=(x_a, a \in I_{n,k}, 1 \leqq k \leqq n)$ est l'élément générique de $\mathbb{R}^N$, on note par convention:

$$x_{a-\{j\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin a \\ 1 & \text{si } a=\{j\} \\ x_{a^*} & \text{où } a^* \text{ est } (k-1)\text{-uplet naturel associé à} \\ & a-\{j\}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}-\{j\}. \end{cases}$$

Enfin, on note $A(x)$ la matrice (N, n) de coefficients $A_a^j(x)=(-1)^{|a|-I(j)} x_{a-\{j\}}$ où

- $|a|$ est la longueur de la suite a
- $I(j)$ est le rang de j dans la suite a si $j \in a$ et 0, par exemple, sinon.

Par construction $(M_n(t), t \geqq 0)$ est solution du système différentiel stochastique.

$$\begin{aligned} dM_n(t) &= A[M_n(t)]\, dB(t) \\ M_n(0) &= (0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Exemple.

$$dM_2(t) = \begin{bmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \\ dL_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -B_2(t) & B_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1(t) \\ \\ dB_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{pour l'Aire de Lévy ordinaire.}$$

Preuve du théorème 1.1, reposant sur les deux lemmes suivants

Lemme 1. *Si* $a \in I_{n,k}$, $R_a(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k-I(j)} L_{a-\{j\}}(t)\, B_j(t)$ *alors, p.s.,*

$$R_a = \begin{cases} 0 & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ L_a & \textit{si } k \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Par la formule d'Itô, nous avons:

$$dR_a(t) = dL_a(t) + d\tilde{L}_a(t)$$

avec

$$d\tilde{L}_a(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-I(j)} B_j(t) \sum_{i \neq j} (-1)^{k+1-I_j(i)} L_{a-\{i,j\}}(t)\, dB_i(t)$$

où $I_j(i)$ est le rang de i dans la suite $a-\{j\}$ soit, par réarrangement, $d\tilde{L}_a(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+1-I(i)} R_{a-\{i\}}(t)\, dB_i(t)$.

En remarquant que:

$$\begin{aligned} &\text{si } a=\{j\} && R_a(t) = B_j(t) \\ &\text{si } a=(i,j) && R_a(t) = -B_j(t)\, B_i(t) + B_i(t)\, B_j(t) = 0 \end{aligned}$$

on déduit, par récurrence sur $k=|a|$, le résultat annoncé.

Lemme 2. *Si* $a \in I_{n,k}$,

$$S_a(t) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(j)+I(i)+1} L_{a-\{i,j\}}(t)\, L_{(i,j)}(t)$$

alors p.s., $S_a = [k/2]\, L_a$.

Par la formule d'Itô, nous avons:

$$dS_a(t) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(j)+I(i)+1} L_{a-\{i,j\}}(t)\, dL_{(i,j)}(t) + d\tilde{S}_a(t)$$

avec

$$d\tilde{S}_a(t) = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(j)+I(i)+1} L_{a-\{i,j\}}(t) \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k-2-I_{i,j}(l)} L_{a-\{i,j,l\}}(t)\, dB_l(t)$$

où $I_{i,j}(l)$ est le rang de l dans la suite $a-\{i,j\}$ soit, par réarrangement,

$$d\tilde{S}_a(t) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k-I(l)} S_{a-\{l\}}(t)\, dB_l(t).$$

D'autre part, il est facile de voir, par réarrangement, que:

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1} L_{a-\{i,j\}}(t)\, [B_i(t)\, dB_j(t) - B_j(t)\, dB_i(t)] \\ &\qquad = (-1)^k \sum_{j=1}^{n} (-1)^{I(j)} R_{a-\{j\}}(t)\, dB_j(t) \end{aligned}$$

d'où

$$dS_a(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-I(j)} [S_{a-\{j\}}(t) + R_{a-\{j\}}(t)]\, dB_j(t)$$

et le résultat annoncé, par récurrence sur $k=|a|$.

Montrons maintenant, que les relations (1.1) proviennent en fait des relations algébriques de structure de l'Algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs associés au système (1.2) réécrit, d'où le résultat suivant:

Théorème 1.2. *Le support du processus M_n est l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans la sous-variété de $\mathbb{R}^N$ définie par les relations* (1):
pour tout $k \geqq 3$, $a \in I_{n,k}$

$$[k/2]\, x_a = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1} x_{a-\{i,j\}} x_{(i,j)}.$$

1. Étude de l'Algèbre de Lie associée au système (1–2) *de la diffusion $M_n(t)$*

Ecrivons ce système (1–2) sous la forme (1–3)

$$dM_n(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j(M_n(t)) \circ dB_j(t)$$
$$M_n(0) = (0)$$

où $(A_j(x),\ 1 \leqq j \leqq n)$ sont n champs de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ définis par:

$$A_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=2}^{n} \sum_{a \in I_{n,k}} (-1)^{k-I(j)} x_{a-\{j\}} \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Si $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A_1, \ldots, A_n)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathscr{X}(\mathbb{R}^N)$ engendrée par les n champs A_j, il est clair que:

1. Les champs A_j, $1 \leqq j \leqq n$ sont linéairement indépendants; soit V_1 l'espace vectoriel engendré par ceux-ci.

2. Pour tout $1 \leqq i < j \leqq n$,

$$A_{i,j}(x) = \tfrac{1}{2}[A_i, A_j](x) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{a \in I_{n,k}} (-1)^{I(i)+I(j)+1} x_{a-\{i,j\}} \frac{\partial}{\partial x_a}$$

$\{A_{i,j},\ 1 \leqq i < j \leqq n\}$ est une base de $V_2 = [V_1, V_1]$.

3. $\mathscr{L}$ est nilpotente d'ordre 2. En effet, pour tout $1 \leqq i < j \leqq n$, $l \notin \{i,j\}$

$$[A_{i,j}, A_l](x) = \sum_{k=3}^{n} \sum_{a \in I_{n,k}} (-1)^{I_l(i)+I_l(j)+1} x_{a-\{i,j,l\}} (-1)^{k-I(l)} \frac{\partial}{\partial x_a}$$
$$- \sum_{k=3}^{n} \sum_{a \in I_{n,k}} (-1)^{I_{i,j}(l)} x_{a-\{i,j,l\}} (-1)^{I(i)+I(j)+1} \frac{\partial}{\partial x_a} = 0$$

avec, rappelons, $I_l(i)$ est le rang de i dans la suite $a - \{l\}$; $I_{i,j}(l)$ est le rang de l dans la suite $a - \{i,j\}$.

2. Détermination de la variété intégrale maximale

Nous déterminons la varieté integrale maximale H contenant (0) du champ $m = n(n+1)/2$-direction défini par $B(x) = (A_j(x),\ 1 \leqq j \leqq n;\ A_{i,j}(x),\ 1 \leqq i < j \leqq n)$:

$$B\colon \mathbb{R}^N \to G_m(T(\mathbb{R}^N)) \text{ grassmannienne d'indice } (N, m)$$
$$x \to V_1 \oplus V_2.$$

Considérons la nouvelle base $B'(x)$ de $V_1 \oplus V_2$ définie par:

$$B'_j(x) = A_j(x) - \sum_{i<j} x_i A_{i,j}(x) + \sum_{i>j} x_i A_{j,i}(x) \qquad 1 \leqq j \leqq n$$
$$B'_{i,j}(x) = A_{i,j}(x) \qquad 1 \leqq i < j \leqq n.$$

La projection dans $\mathbb{R}^m$ de $B'(x)$ étant la base canonique, H est la sous-variété de $\mathbb{R}^N$ sur laquelle $N-m$ formes différentielles sont nulles: Système de Pfaff (voir par exemple Dieudonne [5]), celles-ci étant définies par les formules:

$$\forall k \geqq 3, \ \forall a \in I_{n,k}$$
$$\omega_a(x) = dx_a - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-I(j)} (x_{a-\{j\}} - \sum_{i \neq j} (-1)^{k+1-I_j(i)} x_i x_{a-\{i,j\}}) \, dx_j$$
$$- \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1} x_{a-\{i,j\}} \, dx_{ij}. \tag{1.4}$$

$\mathscr{L}$ étant nilpotente, le système de Pfaff est complètement intégrable.

3. Preuve du théorème 1.2 (intégration de (1.4))

En plus des relations (1) du théorème 1.2, considérons les relations (2) suivantes:

$$\text{pour tout } k \geqq 3, \ a \in I_{n,k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{I(j)+1} x_j x_{a-\{j\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ x_a & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il est immédiat d'obtenir les relations (1) pour $k=3, 4$ et (2) pour $k=3$. Pour $k=4$ et $a \in I_{n,k}$, on a:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{I(j)+1} x_j x_{a-\{j\}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(j)+I_j(l)+I_j(m)} x_j x_{(l,m)} x_{a-\{j,l,m\}} = 0$$

en remarquant que si $i = a - \{j, l, m\}$ alors

$$I(j) + I_j(l) + I_j(m) = I(i) + I_i(l) + I_i(m) + (\text{nombre impair}).$$

Posons

$$dy_a = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1} x_{ij} \, dx_{a-\{i,j\}}, \qquad a \in I_{n,k}.$$

On en déduit, par récurrence sur $k = |a| \geqq 5$, d'après (1.4)

$$dy_a = \sum_{l=1}^{n} (\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1} (-1)^{k-I_{ij}(l)} x_{ij} x_{a-\{i,j,l\}}) \, dx_l$$
$$- \sum_{l=1}^{n} (\sum_{m \neq l} \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+I_{ij}(l)+I_{ij}(m)} x_{ij} x_{a-\{i,j,l,m\}} x_m) \, dx_l$$
$$+ \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I_{ij}(l)+I_{ij}(m)+I(i)+I(j)} x_{ij} x_{a-\{i,j,l,m\}}) \, dx_{lm}$$

soit, encore, par récurrence sur k, d'après les relations (1)

$$\begin{aligned} dy_a = & \sum_{l=1}^{n} [(k-1)/2]\,(-1)^{k-I(l)}\, x_{a-\{l\}}\, dx_l \\ & - \sum_{l=1}^{n} \sum_{m \neq l} [(k-2)/2]\,(-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_m\, x_{a-\{l,m\}}\, dx_l \\ & + \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} [(k-2)/2]\,(-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_{a-\{l,m\}}\, dx_{l,m}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si les relations (1) et (2) sont vérifiées jusqu'à l'ordre $k-1$, alors pour $|a|=k$, $k \geqq 5$, on a:

$$\begin{aligned} & [(k-1)/2] \sum_{j=1}^{n} (-1)^{I(j)+1}\, x_j\, x_{a-\{j\}} \\ & = \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(j)+I_j(l)+I_j(m)}\, x_j\, x_{l,m}\, x_{a-\{j,l,m\}} \\ & = \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_{l,m} \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{I_{l,m}(j)+1}\, x_j\, x_{a-\{j,l,m\}} \right) \\ & = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_{l,m}\, x_{a-\{l,m\}} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où si la relation (1) est vraie pour k, il en est de même pour la relation (2).

Il nous reste à montrer que si les relations sont vraies jusqu'à l'ordre $k-1$, alors la relation (1) est vraie pour k.

De (1.4), on déduit par récurrence sur k, d'après les relations (1) et (2)

si k est pair $\quad dx_a = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1}\, x_{a-\{i,j\}}\, dx_{ij}$

si k est impair $\quad dx_a = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k-I(j)}\, x_{a-\{j\}}\, dx_j + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{I(i)+I(j)+1}\, x_{a-\{i,j\}}\, dx_{ij}$.

De même, de (1.5), on déduit par récurrence sur k, d'après les relations (1) et (2)

si k est pair $\quad dy_a = [(k-2)/2] \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_{a-\{l,m\}}\, dx_{l,m}$

si k est impair $\quad dy_a = [k/2] \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k-I(l)}\, x_{a-\{l\}}\, dx_l$
$$+ ([k/2]-1) \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_{a-\{l,m\}}\, dx_{l,m}.$$

Soit:

si k est pair $\quad [k/2]\, dx_a = dx_a + dy_a$

si k est impair $\quad [k/2]\, dx_a = dy_a + \sum_{1 \leqq l < m \leqq n} (-1)^{I(l)+I(m)+1}\, x_{a-\{l,m\}}\, dx_{l,m}$

d'où, par intégration, les relations (1) et (2), la variété intégrale H du système de Pfaff (1.4) étant définie par les relations (2).

D'après les résultats de Stroock-Varadhan [14] et Kunita [11 bis] nous savons que:

1. Toute courbe intégrale η d'un champ de vecteurs de $\mathscr{L}$ est un élément du support de la diffusion $M_n(\eta(0)=0)$.

2. Tout élément du support de M_n est une fonction continue à valeurs dans H.

Si p est la bijection canonique de H sur $\mathbb{R}^m$, toute fonction continue φ: $\mathbb{R}_+ \to H$ peut être approchée par une suite de fonction φ_n telles que $p \circ \varphi_n$ soit linéaire par morceaux.

D'autre part si $\Psi = p \circ \varphi$ est linéaire alors $\dot{\Psi}$ est constante et il existe un champ de vecteurs $\tilde{B}$ sur H tel que Ψ soit la courbe intégrale de $\tilde{B}$. La dimension de H étant égale à celle de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$, il existe un champ B de $\mathscr{L}$ tel que φ soit la courbe intégrale de B, ce qui établit le résultat annoncé.

En introduisant, des notations supplémentaires, on peut donner une expression plus agréable de H.

Associons à tout élément a de $I_{n,k}$ et à toute partition de a

$$- (\{\beta_j, \gamma_j\}, \qquad 1 \leqq j \leqq [k/2]) \quad \text{si } k \text{ est pair}$$
$$- (\{\beta_1\}, \{\beta_{j+1}, \gamma_{j+1}\}, 1 \leqq j \leqq [k/2]) \quad \text{si } k \text{ est impair}$$

la suite $b = ((\beta_j, \gamma_j)\ 1 \leqq j \leqq [k/2])$ ou $b = (\beta_1, \beta_{j+1}, \gamma_{j+1})\ 1 \leqq j \leqq [k/2])$ vérifiant:

$$- \ \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{\tilde{k}} \quad (\tilde{k} = [k/2] \text{ ou } [k/2]+1)$$
$$- \ \forall\, 1 \leqq j \leqq [k/2] \ \ \beta_j < \gamma_j$$

et posons $\varepsilon(b)$ «la signature de la permutation permettant de passer de b à a», alors

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^N;\ \forall\, k \geqq 1,\ a \in I_{n,k},\ x_a = \sum_b \varepsilon(b) \prod_{j=1}^{\tilde{k}} x_{b_j} \right\}.$$

On a, par exemple:

$$\forall\, 1 \leqq i < j < k \leqq n \qquad x_{(i,j,k)} = x_i\, x_{(j,k)} - x_j\, x_{(i,k)} + x_k\, x_{(i,j)}.$$

2. Transformée de Fourier et densite de l'Aire de Lévy d'ordre 3: $L_3(t)$

D'après le théorème 1.1, on a:

$$L_3(t) = L_{12}(t)\, B_3(t) - L_{13}(t)\, B_2(t) + L_{23}(t)\, B_1(t) \quad \text{(p.s.)}. \tag{2.1}$$

D'autre part, il est évident d'après les propriétés d'auto-similarité du mouvement brownien que:

$$L_3(t) = t^{3/2}\, L_3(1) \quad \text{(en loi)}. \tag{2.2}$$

On notera, dans ce paragraphe, L_3 pour $L_3(1)$.

Théorème 2.1. *La transformée de Fourier de L_3 est donnée par:*

$$\hat{L}_3(\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}[\lambda\rho^3 e^{-\rho^2/2}/sh(\lambda\rho)]\,d\rho$$

d'où la densité

$$f(x)=(\sqrt{2}\pi/4)\int_0^\infty[\rho e^{-\rho^2/2}/ch^2(\pi x/2\rho)]\,d\rho$$

et un équivalent de celle-ci au voisinage de $+\infty$

$$f(x)\sim(\pi/2\sqrt{3})(\pi x)^{1/3}\exp[-3(\pi x)^{2/3}/2].$$

Associons à (2.1) le processus

$$L_\alpha(t)=\alpha_1 L_{23}(t)-\alpha_2 L_{13}(t)+\alpha_3 L_{12}(t)$$

avec $\alpha\in\mathbb{R}^3$, alors, on a:

$$dL_\alpha(t)=\langle AB(t), dB(t)\rangle \quad \text{avec} \quad A=\begin{bmatrix}0 & -\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1\\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

matrice anti-symétrique.

Nous sommes ainsi dans le cadre des processus étudiés par Helmes et Schwane [9] d'où, l'existence d'une matrice orthogonale.

$$0=\begin{bmatrix}\alpha_2/\rho_{12} & \alpha_1 & \alpha_3/\rho_{12}\rho & \alpha_1/\rho\\ -\alpha_1/\rho_{12} & \alpha_2 & \alpha_3/\rho_{12}\rho & \alpha_2/\rho\\ 0 & & -\rho_{12}/\rho & \alpha_3/\rho\end{bmatrix}$$

avec $\rho^2=\|\alpha\|^2$; $\rho_{12}^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2$

$$\text{telle que } 0^*\,A\,0=\begin{bmatrix}0 & -\rho & 0\\ \rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad L_\alpha=\|\alpha\|\,\tilde{L} \quad \text{(en loi)}$$

où $\tilde{L}(t)$ est une Aire de Lévy ordinaire d'ordre 2 obtenue par projection du mouvement Brownien $(B(t), t\geqq 0)$ sur le plan $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3=0$.

Une simple utilisation d'une formule de Paul Lévy concernant l'Aire de Lévy:

$$E\left[\exp i\left(b\int_0^1 B_1(t)\,dB_2(t)-B_2(t)\,dB_1(t)\right)\middle| B_1(1)=x,\ B_2(1)=y\right]$$
$$=\frac{b}{sh\,b}\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}(1-b\coth b)\right)$$

nous donne immédiatement $E[\exp i\lambda L_\alpha(1)\,|\,B(1)=x]$.

En particulier, pour $x=\alpha$, on obtient:

$$E[\exp i\lambda L_3\,|\,B(1)=\alpha]=\lambda\|\alpha\|/sh(\lambda\|\alpha\|)$$

d'où les expressions de $\hat{L}_3$ et f.

En remarquant que $f(x)=(\sqrt{2}\pi/32)(\pi x)^2 F(\pi^2 x^2/8)$ avec

$$F(x)=\int_0^\infty ch^{-2}(1/\sqrt{v})\, e^{-xv}\, dv,$$

nous avons, en posant

$$I(\delta,x)=\int_0^{\delta x^{2/3}} \exp[-x^{1/3}(u+2u^{-1/2})]\, du; \qquad I(x)=I(\infty,x).$$

1. $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0;\ \forall x$

$$(1-\varepsilon)\, x^{-2/3}\, I(\delta,x) \leqq F(x) \leqq (1+\varepsilon)\, x^{-2/3}\, I(\delta,x)+x^{-5/3}\, e^{-\delta x}.$$

2. $I(x)\sim 2\sqrt{\pi}\,(3x^{1/3})^{-1/2}\exp(-3x^{1/3})$ (méthode de Laplace).
3. $0\leqq I(x)-I(\delta,x)\leqq x^{-1/3}\, e^{-\delta x}$ et le résultat annoncé.

Signalons les grandes lignes d'une autre démonstration, ne faisant pas intervenir explicitement les formules de Paul Lévy:

1) Se ramener à $L_\alpha(t)$ en conditionnant (2.1) par $B(1)=\alpha$ et avoir une connaissance des lois conditionnelles.

Pour cela, il est naturel d'introduire le Pont Brownien $dP(t)=dW(t) + \frac{P(t)}{t-1}\, dt$ puis le mouvement brownien $B(t)=P(t)+t\,\xi$ pour un problème technique de calcul stochastique relativement à une bonne filtration.

Le processus L_3 s'écrit alors:

$$\begin{aligned} L_3=\int_0^1 &\xi_1[P_2(t)\, dW_3(t)-P_3(t)\, dW_2(t)]-\xi_2[P_1(t)\, dW_3(t)-P_3(t)\, dW_1(t)]\\ &+\xi_3[P_1(t)\, dW_2(t)-P_2(t)\, dW_1(t)]. \end{aligned}$$

ξ étant indépendant de $(W(t),\ t\geqq 0)$, on a

$$E(\exp i\lambda L_3 \mid B(1)=\alpha)=E(\exp i\lambda \tilde{L}_\alpha)$$

où $\tilde{L}_\alpha$ est l'expression (2.3) $L_\alpha(1)$ avec des ponts browniens comme ci-dessus.

2) $\tilde{L}_\alpha(t)$ est un mouvement brownien changé de temps, le processus de changement de temps $A(t)=\int_0^t \|P(s)\Lambda\alpha\|^2\, ds$ (Λ produit vectoriel) étant indépendant du Brownien.

Pour cela, il suffit de considérer:

$$A_1(t)=\int_0^t \sum_{j=1}^3 (P_j(s)/\rho(s))\, dW_j(s) \quad \text{avec} \quad \rho(t)=\|P(t)\|$$

$$A_2(t)=\sum_{j=1}^3 \alpha_j\, W_j(t)/\|\alpha\|$$

$$\tilde{L}_\alpha(t)$$

et le théorème de représentation des martingales (ex: [10])

$$\text{d'où } E(\exp i\lambda \tilde{L}_\alpha) = E\left[\exp -\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 \|P(t)\Lambda\alpha\|^2\,dt\right].$$

3) La transformation orthogonale précédente permet de s'assurer que

$$\|P(t)\Lambda\alpha\|^2 \underset{\text{loi}}{=} \|\alpha\|^2\,[Y^2(t)+Z^2(t)]$$

où Y et Z sont deux ponts browniens réels indépendants.

4) Enfin, par la méthode de développement en série de v.a. indépendantes $N(0,1)$

$$\int_0^1 Y^2(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} \xi_n^2/n^2\pi^2$$

nous retrouvons les résultats précédents.

3. Loi du logarithme itéré

La loi du logarithme itéré, établie dans ce paragraphe, fait intervenir une constante l_n définie de la manière suivante:

- $\bar{\omega}_n = (\omega_1, \dots, \omega_{[n/2]})$ un $[n/2]$-uplet de nombres réels
- $r_{2n}(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ de composantes $((\sin\omega_j t, \cos\omega_j t), 1\leqq j\leqq n)$
  $r_{2n+1}(t) = (r_{2n}(t), 1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^{2n+1}$
- $\Delta_n(t) = \det(r_n(t_1), \dots, r_n(t_n))$ avec $t = (t_1, \dots, t_n)$
  $D_n = \{t;\ 0\leqq t_n \leqq \dots \leqq t_1 \leqq 1\}$
- $m_n = \operatorname*{Max}_{\bar{\omega}_n} \int_{D_n} \Delta_n(t)\,dt$
- $l_n = \begin{cases} (4/n)^{n/2}\, m_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ (4/n)^{n/2}\, m_n/\sqrt{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Cette constante l_n se calcule de façon élémentaire pour $n=2, 3$ et on trouve:

$$l_2 = 2\operatorname*{Max}_{\omega}[(\omega - \sin\omega)/\omega^2] = 2/\pi \quad \text{(maximum atteint pour } \omega=\pi)$$

$$l_3 = (8/3\sqrt{6})\operatorname*{Max}_{\omega}[(\omega^2+\omega\sin\omega + 4\cos\omega - 4)/\omega^3] = 4/3\sqrt{6}\pi$$
$$\text{(maximum pour } \omega = 2\pi).$$

Théorème 3. $\limsup_{t\to\infty} |L_n(t)|/(t\log_2 t)^{n/2} = l_n$ *avec* $\log_2 t = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, t)$.

La méthode suivie sera celle utilisée classiquement pour le mouvement brownien (ex: [4]) ou le cas $n=2$ ([3]).

Naturellement le problème est d'obtenir une estimation de la queue de la répartition de $L_n(t)$; celle-ci repose, comme dans [2], sur le principe de grandes déviations en attendant d'obtenir des résultats, pour $n\geqq 3$, analogues à ceux du paragraphe 2.

Le fait intéressant est que les équations se résolvent et donnent une expression presque explicite de la constante l_n (voir lemmes 1, 2, 3, ci-dessous).

3.1. Comportement asymptotique de la répartition de $L_n(t)$

Proposition 3.1. $\lim_{Z\to\infty} [\operatorname{Log} P(L_n > Z)]/Z^{2/n} = -1/l_n^{2/n}$.

On utilise les résultats sur les petites perturbations d'un système dynamique exposés dans Azencott [1] (résultats rappelés dans [2]):

$$-\tfrac{1}{2} \inf_{Z\in \operatorname{int}(B)} S(x,Z) \leqq \liminf_{t\to\infty} t \operatorname{Log} P_x(X(t)\in B)$$
$$\leqq \limsup_{t\to 0} t \operatorname{Log} P_x(X(t)\in B) \leqq -\tfrac{1}{2} \inf_{Z\in \operatorname{adh}(B)} S(x,Z)$$

où $S(x,Z)$ est l'action minimale permettant d'aller de x à Z entre les temps 0 et 1.

L'action du chemin absolument continue g étant définie par:

$$S(g) = \int_0^1 \bar{Q}_{g(t)}(g'(t))\, dt$$

où $\bar{Q}_x$ est la forme quadratique duale associée à la forme quadratique Q_x définie par la matrice $\Sigma(x) = A(x)\,A^*(x)$ si $X(t)$ est la diffusion, solution de

$$dX(t) = A(X(t))\, dB(t).$$

Posons, avec les notations du paragraphe 1:

– $J_{n,k}$ l'ensemble des k-uplets d'éléments distincts de (n)

– $\forall a \in J_{n,k}\ B_a(t) = \int_0^t \dots \int_0^{t_3} \left(\int_0^{t_2} B_{\alpha_1}(t_1)\, dB_{\alpha_2}(t_1)\right) dB_{\alpha_3}(t_2) \dots dB_{\alpha_k}(t_{k-1})$

– $\xi(t)$ la diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^d$: $d = \sum_{k=1}^{n} n!/k!$, de composantes $((B_a(t), a\in J_{n,k}), 1 \leqq k \leqq n;\ L_n(t))$.

Nous avons:

$$d\xi(t) = A(\xi(t))\, dB(t)$$
$$\xi(0) = 0$$

$$\text{avec}\quad A_a^j(x) = \delta_j^{\alpha_k}\, x_{a-\{\alpha_k\}}; \qquad A_d^j(x) = \sum_{\sigma;\,\sigma(n)=j} \varepsilon_\sigma\, x_{\sigma(1),\dots,\sigma(n-1)}$$

$$\text{soit}\quad A \text{ de la forme } \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}; \text{ on note } \Sigma = AA^*.$$

Une étude de quelques propriétés de cette matrice, nous permettra d'obtenir une expression de $S(0,Z)$.

Lemme 1. *Il existe une matrice orthogonale* $0 = \begin{bmatrix} 0_1 & 0_2 \\ 0_3 & 0_4 \end{bmatrix}$ *telle que*

1) $\Sigma = 0\ B\ 0^*$ *avec* $B = \begin{bmatrix} J & (0) \\ (0) & (0) \end{bmatrix}$, $J = I_n + C^* C$

2) $0_1^{-1} = J\, 0_1^* = 0_1^* J$, $\quad 0_3 = C\, 0_1$

3) $0_4^{-1} = 0_4^* - 0_2^* C^*, \quad 0_2 = -C^* 0_4$

4) *Si on pose* $\Sigma^{-1} = 0 \begin{bmatrix} J^{-1} & (0) \\ (0) & (0) \end{bmatrix} 0^*$, $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ *avec* V_1 *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *alors* $V_2 = C V_1$ *implique* $V^* \Sigma^{-1} V = V_1^* V_1$ (*noté* $e(V)$).

Il est facile de voir que:

$$\mathscr{P}(\lambda) = \det(\Sigma - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) I_n & C^* \\ C & -\lambda I^* \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) I_n + C^* C & C^* \\ (0) & -\lambda I^* \end{bmatrix}$$
$$= (-\lambda)^{d-n} \det((1-\lambda) I_n + C^* C)$$

d'où le résultat, avec J inversible.

Les propriétés 2 et 3 découlent des relations $\Sigma 0 = 0 B$,

$$\Sigma = 0 B 0^*, \qquad 0 0^* = I$$

d'où

$$\text{si } V_2 = C V_1 \text{ alors } 0^* V = \begin{bmatrix} 0_1^* J V_1 \\ (0) \end{bmatrix} \text{ et le résultat.}$$

La forme quadratique Q_x étant dégénérée, nous allons en fait travailler avec les chemins absolument continus, horizontaux [1].

Ainsi, en posant $g(t)$ le vecteur de composantes:

$x(t)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$
$y(t)$ vecteurs de $\mathbb{R}^m$, $m = d - n - 1$
$z(t)$ nombre réel

il s'agit, compte-tenu du lemme précédent, de résoudre le problème de minimisation de $\int_0^1 \|\dot{x}(t)\|^2 dt$ sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x(0) = y(0) = z(0) = 0;\ z(1) = z \\ 2)\ \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = C \dot{x}(t). \end{array}\right. \qquad (\mathrm{S})$$

Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous sommes ramené à la résolution du système des equations d'Euler suivant:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{g}_j} (\|\dot{x}(t)\|^2 + \Lambda^* C \dot{x}(t)) = \frac{\partial}{\partial g_j} \Lambda^* C \dot{x}(t) \qquad 1 \leqq j \leqq d$$

sous les contraintes (S), où Λ est la matrice colonne des multiplicateurs de Lagrange.

Lemme 2. *La résolution du système ci-dessus, donne*

1) $z = \int_{D_n} \det(\dot{x}(t_1), \ldots, \dot{x}(t_n))\, dt$ *avec* $D_n = \{t;\ 0 \leqq t_n \leqq \ldots \leqq t_1 \leqq 1\}$

2) $\dot{x}(t) = \exp(M t)\, \dot{x}(0)$ *avec* $2 M_i^j = \begin{cases} \lambda_{ij} - \lambda_{ji} & \textit{si } i \neq j \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

Ecrivons explicitement le système des equations d'Euler:

$$1 \leqq j \leqq n \quad 2\ddot{x}_j + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{a \in J_{n,k};\, j \notin a} \lambda_{a,j} \dot{x}_a + \lambda_d \dot{u}_j = \sum_{k \neq j} \lambda_{j,k} \dot{x}_k$$

$$1 \leqq k \leqq n-2 \sum_{j \notin a} \lambda_{a,j} \dot{x}_j = 0$$
$$a \in J_{n,k}$$

$$\forall a \in J_{n,n-1} \quad \lambda_d \varepsilon_\sigma \dot{x}_j = 0 \quad j \notin a; \quad \varepsilon_\sigma \text{ signature de } (a, j)$$

$$\text{où } u_j = \sum_{\sigma;\, \sigma(n)=j} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1), \ldots, \sigma(n-1)}$$

avec les contraintes

$$x(0) = y(0) = Z(0) = 0; \qquad Z(1) = z$$

$$2 \leqq k < n \qquad \dot{x}_a = x_{a - \{\alpha_k\}} \dot{x}_{\alpha_k}$$

$$\dot{Z}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j \dot{x}_j.$$

Le premier résultat est immédiat. D'autre part $z(1) = z \neq 0$ implique:

1) $\lambda_d = 0$

2) $\forall 1 \leqq j \leqq n,\ 2 \leqq k \leqq n-2$

$\sum_{a \in J_{n,k};\, j \notin a} b_a \lambda_{a,j} = 0$ pour toute famille (b_a) de nombres réels d'où le système se simplifie de la façon suivante:

$$\forall 1 \leqq j \leqq m \quad 2\ddot{x}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\lambda_{jk} - \lambda_{kj}) \dot{x}_k \quad \text{et le résultat.}$$

Lemme 3. *Avec les notations de la proposition 3.1*

$$S(0, Z) = 2(Z/l_n)^{2/n}.$$

$\exp(M\,t) = HR(t)\,H^*$ avec H matrice orthogonale et $R(t)$ de la forme

$$\begin{bmatrix} R_1(t) & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & R_p^{(t)} & & & \\ (0) & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_{n-p} \end{bmatrix} \quad \text{avec } p \text{ matrices de rotations de } \mathbb{R}^2 \text{ et } |\lambda_j| = 1$$

d'où (1) $Z = \|\dot{x}(0)\|^n \int_{D_n} (R(t_1)u, \ldots, R(t_n)u)\,dt$ avec u unitaire. Z étant non nul, on a nécessairement $p = [n/2]$ et, si n impair, $\lambda_1 = 1$.

Soit:

$$S(0, Z) = \operatorname{Min} \int_0^1 \|\dot{x}(t)\|^2 \quad dt = \operatorname{Min} \|\dot{x}(0)\|^2$$

$$\det(R(t_1)\,u, \ldots, R(t_n)\,u) = \prod_{k=1}^{[(n-1)/2]} u_k^{n-2k} (1 - u_k^2)\, \Delta_n(t)$$

avec $u_k = \sin\theta_{n-2k+1} \sin\theta_{n-2k}$ (en posant $u = (\cos\theta_{n-1}, \ldots, \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_1)$). Une étude élémentaire de $f(x) = x^{(n-2k)/2}(1-x)$, nous permet, compte tenu de la relation (1) ci-dessus, de conclure.

Preuve de la proposition 3.1. C'est une conséquence immédiate des résultats précédents, compte tenu de la propriété d'auto-similarité:

$$P(L_n(t) > z) = P(L_n > z\, t^{-n/2}).$$

3.2. Quelques propriétés préliminaires

Avant de donner «un lemme maximal» identique au mouvement brownien, introduisons les notations suivantes:

$\forall 1 \leqq k \leqq n,\ a \in J_{n,k}$

- $\theta(u, B_a(t)) = B_a(t+u) - B_a(u)$
- $\bar{\theta}(u, B_a(t)) = \int_0^t \ldots \left[\int_0^{t_2} \theta(u, B_{\alpha_1}(t_1))\, d\theta(u, B_{\alpha_2}(t_1))\right] \ldots d\theta(u, B_{\alpha_k}(t_{k-1}))$
- $\forall j < k \quad \bar{\theta}_j(u, B_a(t)) = \int_0^t \ldots \left[\int_0^{t_2} \theta(u, B_{a(j)}(t))\, d\theta(u, B_{\alpha_{j+1}}(t))\right] \ldots d\theta(u, B_{\alpha_k}(t_{k-j}))$

où $a(j) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ si $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Soit $\eta(t)$ la diffusion de composantes $(B_a(t),\ 1 \leqq k \leqq n,\ a \in J_{n,k})$

Lemme 1.

- $\forall 1 \leqq j \leqq n \quad \theta(u, B_j(t)) = \bar{\theta}(u, B_j(t))$
- $\forall k \geqq 2,\ a \in J_{n,k} \quad \theta(u, B_a(t)) = \bar{\theta}(u, B_a(t)) + \sum_{j=1}^{k-1} B_{a(j)}(u)\, \bar{\theta}(u, B_{\bar{a}(j)}(t))$

où, si

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \qquad a(j) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j), \qquad \bar{a}(j) = (\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_k).$$

Les relations ci-dessus définissent une fonction φ: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *avec* $m = \sum_{k=0}^{n-1} n!/k!$ *vérifiant:*

$$\eta(t+u) = \varphi(\eta(u), \bar{\theta}(u, \eta(t))) \tag{1.1}$$

pour toute fonction measurable bornée f

$$E[f(\eta(t+u)) \mid \eta(u) = x] \underset{\text{p.s.}}{=} E[f \circ \varphi(x, \bar{\theta}(u, \eta(t)))] = E[f \circ \varphi(x, \eta(t))] \tag{1.2}$$

où $\bar{\theta}(u, \eta(t))$ *est le vecteur de composantes* $\bar{\theta}(u, B_a(t))$.

Il suffit de remarquer que:

1) $\forall k \geqq 2,\ a \in J_{n,k} \quad \theta(u, B_a(t)) = \bar{\theta}_{k-1}(u, B_a(t)) + B_{a(k-1)}(u)\, \theta(u, B_{\alpha_k}(t))$

d'où, pour tout $2 \leqq j < k$,

$$\bar{\theta}_j(u, B_a(t)) = \bar{\theta}_{j-1}(u, B_a(t)) + B_{a(j-1)}(u)\, \bar{\theta}(u, B_{\bar{a}(j-1)}(t))$$

et la relation (1.1).

2) $\bar{\theta}(u, \eta(t))$ est indépendant de $\eta(u)$ et a même loi que $\eta(t)$.

Nous allons maintenant établir un lemme maximal, comme pour le mouvement brownien (ex: Brownien motion and diffusion de D. Freedman (Holden-Day 1971)), pour le processus $L_n(t)$.

On pourra remarquer que celui-ci reste vrai, pour tout processus $Z_n(t)$ de la forme:

$Z_n(t) = \sum_\sigma \alpha_\sigma B_\sigma(t)$ où (α_σ) est une famille de nombres réels indexée par les permutations σ de (n).

Lemme maximal. $\forall t \geqq 0,\ Z \geqq 0 \quad P[\operatorname*{Max}_{s \leqq t} L_n(s) \geqq Z] = 2P[L_n(t) \geqq Z]$.

Montrons dans un premier temps, la propriété de l'image:

$$P(L_n(t+\tau_b) \in 2b - B) = P(L_n(t+\tau_b) \in B)$$

où $\tau_b = \inf\{t;\ L_n(t) = b\}$, B borélien de $\mathbb{R}$

$$P[2b - L_n(t+\tau_b) \in B] = \int 1_A(y)\, dP^x_{t+\tau_b, \tau_b}(y)\, dP_{\eta_{\tau_b}}(x) \quad \text{avec } A = \{\sum_\sigma \varepsilon_\sigma y_\sigma \in 2b - B\}$$

$$= \int 1_C(x, y)\, dP^0_{t,0}(y)\, dP_{\eta_{\tau_b}}(x), \quad \text{d'après le lemme 1;}$$

avec

$$C = \left\{\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \left(y_\sigma + \sum_{k=1}^{n-1} x_{\tilde{\sigma}(x)}\, y_{\bar{\sigma}(k)}\right) \in b - B\right\}$$

où

$$\tilde{\sigma}(k) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$$
$$\bar{\sigma}(k) = (\sigma(k+1), \ldots, \sigma(n)).$$

Remarquons que si on pose $\eta(t) = \Psi(B_1(t), \ldots, B_n(t))$;

$$\tilde{\eta}(t) = \Psi(-B_1(t), B_2(t), \ldots, B_n(t))$$

on a $\tilde{L}_n(t) = -L_n(t)$, $\tilde{\eta}_{\tau_{-b}} = \eta_{\tau_b}$ (en loi) (notation évidente pour $\tilde{L}_n(t)$)

d'où, on peut remplacer dans l'intégrale: $P^0_{t,0}$ par $\tilde{P}^0_{t,0}$, $P_{\eta_{\tau_b}}$ par $P_{\tilde{\eta}_{\tau_{-b}}}$

dans C: $b - B$ par $B - b$

et, en remontant, on obtient:

$$P(2b - L_n(t+\tau_b) \in B) = P[-L_n(t+\tau_{-b} \in B] = P[L_n(t+\tau_b) \in B]$$

($L_n(t)$ étant symétrique).

On achève la preuve du lemme, comme pour le Brownien (voir Freedman) en considérant le processus

$$L'_n(t) = L_n(t)\, 1_{\{t \leqq \tau_b\}} + (2b - L_n(t))\, 1_{\{t > \tau_b\}}$$

et le temps d'arrêt

$$\sigma_b = \inf\{t / L'_n(t) = b\}.$$

3.3. *Loi du logarithme itéré*

Nous allons utiliser la technique analogue à celle utilisée pour le Brownien dans [4].

1) $\limsup_{t\to\infty} L_n(t)/(t\log_2 t)^{n/2} \leqq l_n$.

Soient $\delta>0$, $q\in\mathbb{N}^*$, $A_\delta=\{\limsup_{t\to\infty}[L_n(t)/(t\log_2 t)^{n/2}]>l_n+\delta\}$.

On a
$$A_\delta\subset\limsup_{k\to\infty}\{\operatorname*{Max}_{t\leqq q^{k+1}} L_n(t)>(l_n+\delta)(q^k\log_2 q^k)^{n/2}\}.$$

D'après l'étude 3.1:
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists k_0;\ \forall k\geqq k_0$$
$$P[L_n(q^{k+1})>(l_n+\delta)(q^k\log_2 q^k)^{n/2}]\leqq\exp[(-l_n^{-2/n}+\varepsilon)(l_n+\delta)^{2/n}\log_2 q^k/q].$$

D'autre part, d'après le lemme maximal
$$P(A_\delta)\leqq 2\lim_{k\to\infty}\sum_{j\geqq k}P[L_n(q^{j+1})>(l_n+\delta)(q^j\log_2 q^j)^{n/2}]$$

d'où, pour tout $\delta>0$, en choisissant $\varepsilon>0$, q tel que
$$1<q<(1+\delta l_n^{-1})^{2/n}(1-\varepsilon l_n^{2/n})$$

$P(A_\delta)=0$ et le résultat

2) $\limsup_{t\to\infty} L_n(t)/(t\log_2 t)^{n/2}\geqq l_n$.

Soient $\delta>0$, $q\in\mathbb{N}^*$, $B_\delta=\{\limsup_{t\to\infty} L_n(t)/(t\log_2 t)^{n/2}>l_n-\delta\}$.

On a
$$B_\delta\supset\limsup_{\infty}\{L_n(q^k)>(l_n-\delta)(q^k\log_2 q^k)^{n/2}\}.$$

D'après l'ètude 3.1:
$$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0;\ \forall k\geqq k_0$$
$$\begin{aligned}&P[L_n(q^k(q-1)>(l_n-\delta)(q^{k+1}\log_2 q^{k+1})^{n/2}]\\&\qquad\geqq\exp[-(l_n^{-2/n}+\varepsilon)(l_n-\delta)^{2/n}q\log_2(q^{k+1})/(q-1)].\end{aligned}\tag{3.1}$$

Pour pouvoir utiliser Borel-Cantelli, nous allons utiliser les décompositions du paragraphe 3.2:
$$L_n(q^{k+1})=L_n(q^k)+\bar\theta(q^k,L_n(q^k(q-1)))+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{A\in P_j}\varepsilon(A)\,L_A(q^k)\,\bar\theta(q^k,L_{\bar A}(q^k(q-1)))\tag{3.2}$$
où

- P_j ensemble des parties de (n) de cardinal j
- L_A processus de Lévy associé au brownien $(B_k(t),\ k\in A)$
- $\bar\theta(u,L_A(t))$ processus de Lévy associé au brownien $(\theta(u,B_k(t)),\ k\in A)$ $\varepsilon(A)$ signature de la permutation: les éléments de A ordonnés par ordre croissant suivis de ceux de $\bar A$ ordonnés par ordre croissant.

Les v.a. $\bar\theta(q^k,L_{\bar A}(q^k(q-1)))$ sont indépendantes et ont même loi que $L_{\bar A}(q^k(q-1))$, indépendants de $L_A(q^k)$.

De (3.1), pour $\varepsilon>0$ tel que $b(\delta)=(1-\delta l_n^{-1})^{2/n}(1+\varepsilon l_n^{2/n})<1$ pour $q>1/(1-b(\delta))$, on a:

$$\limsup_{k\to\infty}[\bar{\theta}(q^k, L_n(q^k(q-1)))/(q^{k+1}\log_2 q^{k+1})^{n/2}]\geqq l_n-\delta \text{ p.s.}$$

En utilisant, la relation (3.2) normalisée par $[q^{k+1}\log_2(q^{k+1})]^{n/2}$, le corollaire $\liminf_{t\to\infty} L_n(t)/(t\log_2 t)^{n/2}\geqq -l_n-\delta$ p.s. du résultat 1 ($L_n(t)$ étant symétrique) il n'est pas très difficile de montrer, que pour q assez grand,

$$\limsup_{k\to\infty} L_n(q^{k+1})/(q^{k+1}\log_2 q^{k+1})^{n/2}\geqq l_n-2\delta \text{ p.s.}$$

d'où $P(B_\delta)=1$.

Ceci achève la preuve du théorème 3.

Remerciements. L'auteur remercie particulièrement A. Badrikian, P. Bernard, G. Fourt et G. Royer pour d'utiles conversations.

Bibliographie

1. Azencott, R.: Grandes déviations et applications. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 1978. Lect. Notes in Math. 774. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
2. Baldi, P.: Grandes déviations et loi fonctionnelles du logarithme itéré. Universita Degli Studi di Pisa 57. Maggio 1984
3. Berthuet, R.: Loi du logarithme itéré pour certaines intégrales stochastiques. Ann. Scient. Université Clermont vol. 69 (1979). C.R.A.S. Série A, **289**, 813–815 (1979)
4. Breiman, L.: Probability. London-Amsterdam-Paris: Addison-Wesley 1968
5. Dieudonne, J.: Eléments d'analyse (Tome 3–4). Gauthier-Villars: Paris 1970/1971
6. Fernique, X.: Sur les lois de certaines intégrales associées à des mouvements browniens. Sém. Prob. XV. LN 850 (1981)
7. Fliess, M., Normand-Cyrot, D.: Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen. Séminaire de Probabilités XVI 1980/81. Lect. Notes in Math. 920. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982
8. Gaveau, B.: Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta. Math. **139**, 95–153 (1977)
9. Helmes, K., Schwane, A.: Lévy's stochastic area formula in higher dimensions. J. Funct. Anal. **54**, 177–192 (1983)
10. Ikeda, N., Watabane, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland: Amsterdam 1981

11a. Kunita, H.: Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XII-1982. Lect. Notes in Math. 1097. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1984

11b. Kunita, H.: Supports of diffusion processes and controllability problems. Proc. of Intern. Symp. SDE Kyoto, pp. 163–185 (1976)

12. Lévy, P.: 2nd Symposium de Berkeley Probability and Statistics, pp. 171–186 (1950)
13. Schott, R.: Une loi du logarithme itéré pour certaines intégrales stochastiques. C.R.A.S. t-292 (1981). Publications de l'Institut H. Cartan n. 7 (1983)
14. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. Proc. of the Sixth Berkeley Sym. Math. Statist. Prob. III., pp. 333–359 (1972)
15. Yamato, Y.: Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebras. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **47**, 213–229 (1979)

Received September 29, 1985