Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
40, 239–256 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Asymptotische Entwicklungen für Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen

Werner Wolf

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden, Mommsenstr. 13, DDR-8027 Dresden

I. Einführung

Wir betrachten eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen X_1, X_2, ... mit Erwartungswert gleich Null und Streuung gleich Eins.

Einen zentralen Platz in der Summationstheorie unabhängiger Zufallsgrößen nimmt das Studium des asymptotischen Verhaltens der Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_1+\cdots+X_n>x) \quad \text{bzw.} \quad P(X_1+\cdots+X_n<-x) \qquad \text{für } \frac{x}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ein ([1]–[10] u.a.).

Grenzwertsätze über das Verhalten dieser Wahrscheinlichkeiten werden unter starken Bedingungen an die Zufallsgröße X_1, wie z.B. die Cramérsche Bedingung [1]:

$$E\exp(tX_1)<\infty, \qquad |t|<H,\ H>0 \tag{C}$$

oder die Linniksche Bedingung [4]:

$$E\exp(|X_1|^{2-\frac{1}{\gamma}})<\infty, \qquad 0{,}5<\gamma<1 \tag{L}$$

hergeleitet. Da in diesen Fällen Momente beliebiger Ordnung existieren, so kann man ohne zusätzliche Forderungen an die Zufallsgröße X_1 asymptotische Entwicklungen in den Grenzwertsätzen für große Abweichungen erhalten.

In der vorliegenden Note werden integrale Grenzwertsätze abgeleitet und diskutiert. Dabei wird an die Größe X_1 eine hinreichend allgemeine Bedingung gestellt.

II. Integrale Grenzwertsätze für große Abweichungen

2.1. Eine Funktion $g(x)$ gehört zur Funktionsklasse $\{g(.)\}$, wenn $g(x)$ eine monoton wachsende und stetige Funktion ist, die folgenden Bedingungen genügt

$$\rho(x)\ln x \leqq g(x) \leqq C(g)\, x^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1, \tag{2.1}$$

$$g(x)\, x^{-1} - \text{streng monoton fallend.} \tag{2.2}$$

Dabei ist $\rho(x)$ eine beliebige monoton wachsende Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} \rho(x)=\infty$ und $C(g)$ eine geeignete positive und von g abhängige Konstante.

Mit $\Lambda(n)$ bezeichnen wir die Lösung der Gleichung

$$k x^2 = n g(x). \tag{2.3}$$

Dabei ist k eine Konstante größer Eins. Aus (2.1) und (2.3) folgt, daß

$$\Lambda(n) \leqq [C^*(g)\, n]^{\frac{1}{2-\alpha}} \tag{2.4}$$

ist. Wenn s eine ganze nichtnegative Zahl ist, so bezeichnen wir mit $\lambda^{[s]}(t)$ den Teil der Cramérschen Reihe [1], der aus den ersten s Gliedern dieser Reihe besteht:

$$\lambda^{[s]}(t) = \sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k t^k. \tag{2.5}$$

Wir bemerken, daß die Klasse $\{g(.)\}$ die Funktion $x^{2-\frac{1}{\gamma}}$, $(0{,}5<\gamma<1)$ und die von S. Nagajev in [6] betrachteten Funktionen enthält. Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad V(x) = P(X_1 < x), \qquad v(t) = E e^{itX_1}, \qquad F_n(x) = P(S_n < x),$$

$$\phi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$p_z(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_z^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy}, & y \geqq z, \\ 0, & y<z, \end{cases} \qquad \mu_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k\, p_z(y)\, dy,$$

$$\omega_k(z) = \frac{\int_z^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} (t-z)^k\, dt}{\int_z^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}.$$

Den Kumulanten der Ordnung k von X_1 bezeichnen wir mit γ_k.

2.2. Wir fordern, daß die Zufallsgröße X_1 folgende Bedingungen erfüllt:

$$E \exp\{g(|X_1|)\} < \infty \tag{A}$$

und

$$\limsup_{t\to\infty} |v(t)| < 1. \tag{B}$$

Satz 1. *Wenn die Bedingungen* (A) *und* (B) *erfüllt sind, dann gilt für die Summenverteilungsfunktion* $F_n(x)$ *folgende asymptotische Beziehung*

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=\exp\left\{\frac{x^3}{n^2}\lambda^{[s+q]}\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\left[1+L\left(\frac{x}{\sqrt{n}};q\right)+O\left(\frac{x}{n}\right)^q\right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\phi\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{n^2}\lambda^{[s+q]}\left(-\frac{x}{n}\right)\right\}\left[1+L\left(-\frac{x}{\sqrt{n}};q\right)+O\left(\frac{x}{n}\right)^q\right] \tag{2.6}$$

für $n\to\infty$ *im Gebiet* $\sqrt{n}<x\leqq\Lambda(n)$. *Hierbei wird* $\Lambda(n)$ *aus der Gleichung* (2.3) *bestimmt*, $q\geqq 1$ *ist eine beliebige ganze Zahl*, $s=[\alpha/1-\alpha]$ *und*

$$\begin{aligned}L(z;q)=&\sum_{\nu=1}^{q-1}N_\nu(z)\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{i=0}^{[3l/2]}e_{il\nu-l}\,n^{-\frac{\nu}{2}}z^{\nu-1}\,\omega_{3l-2i}(z)\\&+\sum_{\nu=1}^{q-3}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{i=0}^{[3l/2]}e_{il\nu-l}\,n^{-\frac{\nu}{2}}z^{\nu-l}\sum_{\tilde{l}=1}^{q-\nu-1}M_{\tilde{l}}(z)\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\tilde{l}}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei ist

$$N_\nu(z)=\sum_{l=1}^{\nu}(-1)^l(l!)^{-1}\,\omega_l(z)\,z^l\,b_{l\nu}$$

und

$$M_{\tilde{l}}(z)=\sum_{r=1}^{\tilde{l}}(-1)^r(r!)^{-1}\,\omega_{r+3l-2i}(z)\,z^r\,b_{r\tilde{l}}$$

mit

$$b_{lk}=\sum_{\substack{k_j\geqq 1\\ k_1+\cdots+k_l=k}}\prod_{j=1}^{l}b_{k_j}.$$

Die Koeffizienten b_k und e_{mlk} hängen nur von den Kumulanten der Zufallsgröße X_1 ab. Die Reihe (2.7) wurde erstmalig von L. Saulis in [7] eingeführt. Insbesondere ist $L(z,1)=0$ und

$$L(z,2)=\gamma_3(3!\sqrt{n})^{-1}(\omega_3(z)-3\omega_1(z)).$$

Ist speziell

$$\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]=\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

dann reicht es in (2.6) nur die ersten $s+q-1$ Glieder der Cramérschen Reihe zu betrachten.

Aus Satz 1 lassen sich einige wichtige Folgerungen ableiten. Wir bemerken zuerst, daß aus Satz 1 für $q=1$ (bzw. für $q=0$) Ergebnisse von V. Petrov [5], S. Nagajev [6] und W. Wolf [8], [11] folgen.

Satz 2. *Wenn die Bedingungen* (L) *und* (B) *erfüllt sind, dann gilt für* $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\frac{P(S_n>x\sqrt{n})}{1-\phi(x)}&=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda^{[s+q]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+L(x,q)+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^q\right]\\ \frac{P(S_n<-x\sqrt{n})}{\phi(-x)}&=\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda^{[s+q]}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+L(-x,q)+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^q\right]\end{aligned}\tag{2.8}$$

im Gebiet $1\leqq x\leqq n^{\gamma-0,5}$. *Dabei wird in diesem Falle die ganze nichtnegative Zahl* s *aus den Ungleichungen*

$$\frac{s+1}{s+2}<\gamma\leqq\frac{s+2}{s+3}$$

bestimmt. L. Saulis erhielt unter den Bedingungen (L) *und* (B), *daß die Beziehungen* (2.8) *im Gebiet*

$$1\leqq x\leqq n^{\gamma-0,5}\varepsilon(n)^{-1}\qquad \textit{mit}\ \ \varepsilon(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

gelten ([7]).

Satz 3. *Wenn die Bedingungen des Satzes* 1 *erfüllt sind und* $\gamma_3=0$ *ist, dann gilt für* $n\to\infty$ *im Gebiet* $\sqrt{n}<x\leqq\Lambda(n)$

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=\exp\left\{\frac{x^3}{n^2}\lambda^{[s+2]}\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{n}\right)^2\right].\tag{2.9}$$

Wenn außerdem noch $\alpha\leqq 0{,}5$ *ist, dann gilt*

$$1-F_n(x)=\left(1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\exp\left\{\frac{x^4}{n^3}\frac{\gamma_4}{24}\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{n}\right)^2\right].\tag{2.10}$$

Ganz analog gelten natürlich auch die Aussagen für negative x.

Satz 4. *Wenn unter den Bedingungen des Satzes* 1 $\gamma_k=0$ *ist für* $k=3,4,\dots,s+q+2$, *dann gilt für* $n\to\infty$

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=1+O\left(\frac{x}{n}\right)^q,\qquad \frac{F_n(-x)}{\phi\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}=1+O\left(\frac{x}{n}\right)^q\tag{2.11}$$

im Gebiet $\sqrt{n}<x\leqq\Lambda(n)$.

Gilt außerdem noch, daß $\alpha=r(1+r)^{-1}$ *ist, r-positiv, ganz, dann ist* (2.11) *im Gebiet*

$$\sqrt{n}<x\leqq(C^*(g)\,n)^{\frac{1+r}{2+r}}$$

erfüllt.

Aus der Beziehung (2.11) und den Eigenschaften von $\phi(z)$ erhält man unmittelbar, daß für $n \to \infty$

$$F_n(x\sqrt{n}) - \phi(x) = O\left(\frac{x^{q-1}}{n^{q/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) \tag{2.12}$$

im Gebiet $1 < |x| \leqq (C^*(g))^{\frac{1+r}{2+r}} n^{\frac{r}{2(2+r)}}$ ist.

Wenden wir uns noch kurz dem Fall zu, daß die Zufallsgröße X_1 nicht gitterförmig verteilt ist und auch die Bedingung (B) nicht erfüllt ist.

Satz 5. *Wenn die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ nicht gitterförmig verteilt sind und nur die Bedingung* (A) *erfüllt ist, dann gilt für $n \to \infty$*

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} = \exp\left\{\frac{x^3}{n^2} \lambda^{[s+2]}\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\left[1 + L\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, 2\right) + o\left(\frac{x}{n}\right)\right] \tag{2.13}$$

im Gebiet $\sqrt{n} < x \leqq \Lambda(n)$. Natürlich gilt auch hier die entsprechende asymptotische Beziehung für negative x.

Im folgendem werden wir mit $c_1, c_2, \ldots$ stets positive und mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ kleine positive Konstanten bezeichnen.

III. Beweis der asymptotischen Entwicklungen

3.1. *Beweis von Satz 1.* Wir definieren eine Verteilungsfunktion $V^y(x)$ folgendermaßen

$$V^y(x) = \begin{cases} V(x), & x \leqq 0 \\ 1 - V(y) + V(x), & 0 < x \leqq y \\ 1, & x > y. \end{cases} \tag{3.1}$$

Mit F_n^y bezeichnen wir die n-fache Faltung von V^y. Offensichtlich gilt

$$1 - F_n(x) = 1 - F_n^y(x) + F_n^y(x) - F_n(x). \tag{3.2}$$

Durch Induktion läßt sich leicht zeigen, daß

$$F_n^y(x) - F_n(x) \leqq n(1 - V(y)) \tag{3.3}$$

ist. Zur Berechnung der Differenz $1 - F_n^y(x)$ führen wir einen Parameter $h > 0$ ein, der für alle hinreichend großen n den Bedingungen

$$c_1(\sqrt{n})^{-1} \leqq h \leqq \Lambda(n)\, n^{-1} c_2 \tag{3.4}$$

genügt und betrachten folgende Integrale

$$V_h^y(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{hu}\, dV^y(u), \qquad F_{nh}^y(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{hu}\, dF_n^y(u). \tag{3.5}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß F_{nh}^{y} die n-fache Faltung von V_h^y ist. Offensichtlich gilt

$$1-F_n^y(x)=\int_x^{\infty} e^{-hu}\,dF_{nh}^y(u). \tag{3.6}$$

Ferner betrachten wir das Integral

$$R(y,h)=\int_{-\infty}^{y} e^{hu}\,dV(u) \tag{3.7}$$

und setzen im weiteren $y=\Lambda(n)$. Aus der Definition von $V_h^y(x)$ und $R(y,h)$ folgt, daß der Quotient $V_h^y(x)(R(y,h))^{-1}$ die Verteilungsfunktion einer gewissen Zufallsgröße Y ist. Den Erwartungswert, die Streuung und die Kumulanten der Ordnung k der Größe Y bezeichnen wir entsprechend mit $a(h)$, $\sigma^2(h)$ und $\gamma_k(h)$. Es gilt

$$a(h)=(R(\Lambda(n),h))^{-1}\int_{-\infty}^{\Lambda(n)} x e^{hx}\,dV(x)$$

und

$$\sigma^2(h)=(R(\Lambda(n),h))^{-1}\int_{-\infty}^{\Lambda(n)} x^2 e^{hx}\,dV(x)-(R(\Lambda(n),h)^{-2}\left(\int_{-\infty}^{\Lambda(n)} x e^{hx}\,dV(x)\right)^2.$$

Da die Zufallsgröße endliche dritte Momente $\beta_3=E|X_1|^3$ besitzt, so gelten folgende einfache Beziehungen

$$\int_{h^{-1}}^{\infty} dV(u)\leqq\begin{cases}h^2,\\ h^3\beta_3,\end{cases}\qquad \int_{h^{-1}}^{\infty} u\,dV(u)\leqq\begin{cases}h,\\ h^2\beta_3,\end{cases}\qquad \int_{h^{-1}}^{\infty} u^2\,dV(u)\leqq h\beta_3. \tag{3.8}$$

Offensichtlich gilt

$$R(\Lambda(n),h)=\int_{-\infty}^{h^{-1}} e^{hu}\,dV(u)+\int_{h^{-1}}^{\Lambda(n)} e^{hu}\,dV(u).$$

Im Intervall $[h^{-1},\Lambda(n)]$ genügt die Funktion $hx-g(x)$ wegen (2.2) und (2.3) der Ungleichung

$$hx-g(x)<\varepsilon_1 g(x),$$

wenn $k>c_2$ ist. Hieraus erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.1) die Abschätzung

$$\int_{h^{-1}}^{\Lambda(n)} x^l e^{hx}\,dV(x)=o(h)^p \tag{3.9}$$

für beliebige nichtnegative ganze l und positive ganze p. Unter Beachtung von (3.8) und (3.9) gilt

$$|R(\Lambda(n),h)-1|\leqq 3h^2,\qquad |R(\Lambda(n),h)|>0{,}25,$$
$$\left|\int_{-\infty}^{\Lambda(n)} u e^{hu}\,dV(u)-h\right|\leqq 5\beta_3 h^2, \tag{3.10}$$

und

$$\left|R(\Lambda(n),h)-1-\frac{h^2}{2}\right|\leqq 4h^2\beta_3.$$

Wir betrachten jetzt eine Folge unabhängiger und wie Y verteilter Zufallsgrößen $Y_1, Y_2, \ldots$. Der Quotient

$$F_{nh}^y(x)(R(y,h)^{-n}=\bar{F}_{nh}(x)$$

ist die Verteilungsfunktion der Summe $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$. Wir erhalten deshalb aus (3.6)

$$1-F_n^y(x)=R^n(y,h)\int_x^\infty e^{-hu}d\bar{F}_{nh}(u).$$

Wenn wir die Verteilungsfunktion der standardisierten Summe

$$\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n-na(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)} \tag{3.11}$$

mit $\bar{\Phi}_{nh}(t)$ bezeichnen, so erhalten wir mit Hilfe der Substitution

$$u=x+t\sqrt{n}\,\sigma(h)$$

unter Beachtung von (3.10)

$$1-F_n^y(x)=\exp(n\ln R(y,h)-hx)\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d\bar{\Phi}_{nh}\left(t+\frac{x-na(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right). \tag{3.12}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (3.12) kann man folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d\bar{\Phi}_{nh}\left(t+\frac{x-na(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)\\
&\quad=\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d\left(\bar{\Phi}_{nh}\left(t+\frac{x-na(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)-\phi\left(t+\frac{x-na(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)\right)\\
&\qquad+\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d\left(\phi\left(t+\frac{x-na(h)}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)-\phi(t)\right)+\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d\phi(t)\\
&\quad=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Wir betrachten jetzt die Funktion $a(h)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|a(h)-h|\leqq&(R(\Lambda(n),h))^{-1}\left|\int_{-\infty}^{h^{-1}}ue^{hu}dV(u)-h\right|\\
&+(R(\Lambda(n),h))^{-1}\int_{h^{-1}}^{\Lambda(n)}ue^{hu}dV(u)+h(R(\Lambda(n),h))^{-1}|R(\Lambda(n),h)-1|.
\end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen (3.10), der Abschätzung (3.9) und der Bedingung (A) erhält man für hinreichend große n,

$$|a(h)-h| \leqq c_3 h^2, \qquad a(h) > 0{,}5h. \tag{3.14}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ den Bildbereich der Funktion $a(h)$ und betrachten für $x \leqq \Lambda(n)$ und $xn^{-1} \in \mathfrak{A}$ die Gleichung

$$a(h) = xn^{-1}. \tag{3.15}$$

Infolge (3.14) existiert genau eine Lösung, die der Bedingung

$$h\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + O\left(\frac{x}{n}\right)^2 \tag{3.16}$$

genügt. Diese Funktion $h(x/n)$ stimmt mit dem h in (3.4) überein. Hieraus folgt auch die Gültigkeit der Bemerkung bezüglich k und c_2, die bei der Herleitung der Beziehung (3.9) gemacht wurde.

Im weiteren betrachten wir nur die Werte x für die $\sqrt{n} < x \leqq \Lambda(n)$ und $xn^{-1} \in \mathfrak{A}$ gilt. In diesem Falle wird das Integral in (3.13) gleich Null. Wenn aber $xn^{-1} \notin \mathfrak{A}$ und die Gültigkeit der Beziehungen (2.6) schon für $\sqrt{n} < x \leqq \Lambda(n)$ und $xn^{-1} \in \mathfrak{A}$ bewiesen wurde, so kann man folgendermaßen vorgehen: Man wählt ein h_0 aus (3.4) derart, daß $a(h_0) \leqq xn^{-1} < a(h_{0+})$ gilt und setzt $a(h_0) = x_0 n^{-1}$, d.h. $x_0 n^{-1} \in \mathfrak{A}$ und $h_0 = h(x_0/n)$. Die Differenz $(x - x_0)/n$ läßt sich also durch die Größe des Sprunges der Funktion $a(h)$ im Punkte h_0 abschätzen. Infolge der Abschätzung (3.9) und unter Berücksichtigung von (A) und (2.1) läßt sich leicht zeigen, daß für $\Delta a(h_0) = a(h_{0+}) - a(h_0)$ gilt

$$\Delta a(h_0) \leqq c_4 h_0^{\bar{m}}, \qquad \bar{m} > 0, \text{ beliebig.} \tag{3.16}$$

Das so gewählte h_0 setzt man in die Beziehung (3.13) ein. Unter Beachtung von (3.16) und den Eigenschaften von $\phi(u)$ läßt sich unschwer die Gültigkeit der Beziehungen (2.6) für alle x aus dem Gebiet $\sqrt{n} < x \leqq \Lambda(n)$ zeigen.

Es sei

$$N = \left[\frac{(m+1)(2-\alpha)}{1-\alpha}\right]. \tag{3.17}$$

Bezüglich m ist zu bemerken, daß m eine positive ganze Zahl ist, die hinreichend groß sein soll und die später genauer bestimmt wird. Wir entwickeln nun im Integral

$$\int_{-\infty}^{h^{-1}} e^{hu}\, dV(u) \qquad \text{die Funktion } e^{hu}$$

in eine Taylorreihe und erhalten für alle hinreichend großen n

$$R(\Lambda(n), h) = \sum_{l=0}^{N} \alpha_l \frac{h^l}{l!} + O(n^{-m}), \tag{3.18}$$

$$\ln R(\Lambda(n), h) = \sum_{l=2}^{N} \gamma_l \frac{h^l}{l!} + O(n^{-m}), \tag{3.19}$$

$$a(h) = \sum_{l=2}^{N} \gamma_l \frac{h^{l-1}}{(l-1)!} + O(n^{-m+1}), \tag{3.20}$$

$$\sigma^2(h) = \sum_{l=2}^{N} \gamma_l \frac{h^{l-2}}{(l-2)!} + O(n^{-m+2}), \tag{3.21}$$

$$\gamma_k(h) = \sum_{l=k}^{N} \gamma_l \frac{h^{l-k}}{(l-k)!} + O(n^{-m+k}) \qquad (k<m). \tag{3.22}$$

Dabei wird mit α_l bzw. γ_l Moment bzw. Kumulant der Ordnung l der Zufallsgröße X_1 und mit $\gamma_k(h)$ der Kumulant der Ordnung k der Zufallsgröße Y_1 bezeichnet.

Wenden wir uns jetzt dem Exponentialfaktor vor dem Integral in (3.12) zu. Die Lösung der Gleichung (3.15) läßt sich folgendermaßen darstellen

$$h\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(\frac{x}{n}\right)^k + O\left(\frac{x}{n}\right)^N. \tag{3.23}$$

Dabei lassen sich auf Grund der Formel von Burman-Lagrange die Koeffizienten a_k folgendermaßen bestimmen

$$a_k = (k)^{-1} f_{k-1} \tag{3.24}$$

mit

$$f_l = \sum_{p=1}^{l} \binom{k}{p} e_{pl}, \qquad e_{pl} = \sum_{\substack{k_j \geqq 1 \\ k_1 + \cdots + k_p = l}} \prod_{j=1}^{p} c_{k_j},$$

$$c_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{\substack{k_j \geqq 1 \\ k_1 + \cdots + k_r = n}} \prod_{j=1}^{r} \frac{\gamma_{k_j+2}}{(k_j+1)!}.$$

Im folgenden stützen wir uns speziell bei der Koeffizientenbestimmung von potenzierten Polynomen auf [12]. Insbesondere gilt für die Koeffizienten in (3.23)

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{\gamma_3}{2}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{6}(3\gamma_3^2 - \gamma_4), \qquad a_4 = \tfrac{1}{24}(10\gamma_4\gamma_3 - 15\gamma_3^2 - \gamma_5), \ldots .$$

Die Koeffizienten a_k hängen nur von den ersten Kumulanten $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{k+1}$ der Zufallsgröße X_1 ab. Deshalb erhalten wir unter Beachtung von (3.19), (3.20), (3.15) und (3.23)

$$\begin{aligned} \exp\left\{n\left(\ln R(\Lambda(n), h) - h\frac{x}{n}\right)\right\} &= \exp\left\{-n \sum_{l=2}^{N} \frac{(l-1)}{l!} \gamma_l h^l + O(n^{-(m-2)})\right\} \\ &= \exp\left\{n\left(\frac{-x^2}{2n^2} + \sum_{j=3}^{\infty} \hat{b}_j \left(\frac{x}{n}\right)^j\right) + O(n^{-(m-2)}\right), \end{aligned}$$

mit

$$\hat{b}_j = -\sum_{v=2}^{j} \frac{(v-1)}{v!} \gamma_v \sum_{\substack{j_i \geqq 1 \\ j_1 + \cdots + j_v = j}} \prod_{i=1}^{v} a_{j_i} = -\frac{a_{j-1}}{j}. \tag{3.25}$$

Die letzte Beziehung in (3.25) wurde von L. Saulis in [7] angegeben. Also gilt

$$\exp\left\{n\left(\ln R\left(\Lambda(n), h\left(\frac{x}{n}\right)\right)-h\left(\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{n\left(\frac{-x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{n^3}\lambda^\times\left(\frac{x}{n}\right)\right)+O(n^{-(m-2)})\right\}.$$

Dabei wird mit $\lambda^\times(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j^\times t^j$ die modifizierte Cramérsche Reihe (s. z.B. [13]) mit den bekannten Eigenschaften bezeichnet. Man kann zeigen, daß die Koeffizienten der ersten $N-2$ Glieder der Reihe $\lambda^\times(t)$ mit den entsprechenden Koeffizienten der ersten $N-2$ Glieder der Cramérschen Reihe zusammenfallen. Wegen (3.25) gilt

$$\lambda_j^\times=\hat{b}_{j+3}. \tag{3.26}$$

Also hängen die Koeffizienten $\lambda_j^\times$ nur von den ersten $\gamma_2,\ldots,\gamma_{j+3}$ Kumulanten ab. Wir erhalten deshalb

$$\begin{aligned}1-F_n^y(x)&=\exp\left\{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{n^2}\lambda^\times\left(\frac{x}{n}\right)\right\}(1+O(n^{-(m-2)}))\\&\cdot\left(\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d(\bar{\phi}_{nh}(t)-\phi(t))+\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}d\phi(t)\right).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Im weiteren gehen wir bei der Bestimmung der Integrale I_1 und I_3 entsprechend den von L. Saulis in [7] und [16] gemachten Überlegungen vor. Für den Ausdruck $h\sqrt{n}\,\sigma(h)$ erhalten wir aus (3.21) nach Einsetzen der für h gültigen Entwicklung (3.23) folgendes Ergebnis

$$h\sqrt{n}\sigma(h)=\frac{x}{\sqrt{n}}\left(1+\sum_{k=1}^{N-2}b_k\left(\frac{x}{n}\right)^k+O\left(\frac{x}{n}\right)^{N-1}+O(n^{-(m-2)})\right). \tag{3.28}$$

Dabei werden die Koeffizienten b_k folgendermaßen bestimmt

$$b_k=\sum_{q=1}^{k}\frac{(-1)^{q+1}(2q-1)!!}{(2q)!!}\sum_{\substack{k_j\geq 1\\k_1+\cdots+k_q=k}}\prod_{j=1}^{q}c_{k_j+2} \tag{3.29}$$

mit

$$c_k=\sum_{l=2}^{k}\frac{\gamma_l}{(l-2)!}\sum_{\substack{k_j\geq 1\\k_1+\cdots+k_l=k}}\prod_{j=1}^{l}a_{k_j}. \tag{3.30}$$

Für das Integral I_3 mit

$$\tau=\sum_{k=2}^{N-2}b_k\left(\frac{x}{n}\right)^k+O\left(\frac{x}{n}\right)^{N-1}+O(n^{-(m-2)}) \tag{3.31}$$

erhalten wir nach Einführen der Substitution $t=v-x(\sqrt{n})^{-1}$, nach Ausschreiben von τ^k und der Koeffizientenbestimmung bei $(x/n)^k$, daß

$$I_3 = e^{x^2/2n}\left(1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\left\{1+\sum_{k=1}^{N-2} N_k\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{x}{n}\right)^k + O\left(\frac{x}{n}\right)^{N-1} + O(n^{-(m-2)})\right\}. \quad (3.32)$$

ist.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des Integrals I_1 über. Dazu benötigen wir eine asymptotische Entwicklung für die Verteilungsfunktion $\bar{\phi}_{nh}(t)$. Dafür wiederum benötigen wir eine asymptotische Entwicklung für die charakteristische Funktion $\bar{\varphi}_{nh}(t)$ der standardisierten Summe (3.11). Auf Grund von (3.5) und (3.7) erhält man, daß die charakteristische Funktion $\varphi(t)$ der Zufallsgröße Y gleich

$$\left(\int_{-\infty}^{A(n)} e^{hu}\,dV(u)\right)^{-1} \int_{-\infty}^{A(n)} e^{itu+hu}\,dV(u)$$

ist. Wenn wir mit $\beta_l(h) = E|Y_1 - a(h)|^l$ die absoluten Momente der Ordnung l der Zufallsgröße Y bezeichnen, so läßt sich mit (3.20) und der Bedingung (A) unschwer zeigen, daß

$$\beta_l(h) < \infty$$

ist für alle $l \geqq 3$. Weiterhin läßt sich mit Hilfe von (3.9) und der Bedingung (B) zeigen, daß auch für die charakteristische Funktion $\varphi(t)$ der Zufallsgröße Y die Bedingung

$$\limsup_{t\to\infty} |\varphi(t)| < 1 \quad (B')$$

gilt.

Lemma 1. *Für jede ganze Zahl $q \geqq 1$ gilt im Intervall*

$$|t| \leqq \sqrt{n}\left(\frac{\sigma^{q+2}(h)}{\beta_{q+2}(h)}\right)^{1/q}$$

folgende asymptotische Entwicklung für die charakteristische Funktion $\bar{\varphi}_{nh}(t)$

$$\bar{\varphi}_{nh}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{P_\nu^\times\left(it, \frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{n^{\nu/2}}\right\} + O\left(\frac{(|t|^{q+2}+|t|^{3(q+1)})e^{-\frac{t^2}{12}}}{n^{q/2}}\right)$$

$$+O\left(\frac{(|t|^3+|t|^{3(q-1)})e^{-\frac{t^2}{2}}}{n^{q/2}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{q-1}\right). \quad (3.34)$$

Dabei ist

$$P_\nu^\times(\omega, z) = \sum_{l=1}^{\nu} P_{l\nu-l}(\omega)\, z^{\nu-l} \quad \textit{und} \quad P_{\nu k}(\omega) = \sum_{r=1}^{\nu} d_{r\nu k}\,\omega^{\nu+2r}$$

ein Polynom 3ν-ten Grades mit Koeffizienten, die nicht von h abhängen. Diese Koeffizienten werden durch die Beziehung (3.38) *bestimmt.*

Beweis von Lemma 1. Nach einem Lemma von Osipov [14], S. 55 gilt unter unseren Bedingungen

$$\bar{\varphi}_{nh}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left\{1+\sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{\bar{P}_\nu(it)}{n^{\nu/2}}\right\}+O\left(\left(\frac{|t|^{q+2}+|t|^{3(q+1)}}{n^{q/2}}\right)e^{-\frac{t^2}{12}}\right)$$

im Intervall

$$|t|\leqq\sqrt{n}\,(\sigma^{q+2}(h)(\beta_{q+2}(h))^{-1})^{1/q}.$$

für jede ganze Zahl $q\geqq 1$.

Dabei ist

$$\bar{P}_\nu(\omega)=\sum_{r=1}^{\nu} d_{r\nu}^{\times}\omega^{\nu+2r}$$

ein Polynom 3ν-ten Grades bezüglich ω. Die Koeffizienten $d_{r\nu}^{\times}$ lassen sich durch die ersten Kumulanten $\sigma^2(h), \gamma_3(h), \ldots, \gamma_{\nu+2}(h)$ ausdrücken (s. z.B. [15], S. 170). Für die Polynome $\bar{P}(\omega)$ gilt nach A. Bikelis [18], S. 576 die Rekursionsformel

$$\bar{P}_\nu(\omega)=\delta_{\nu+2}(h)((\nu+2)!)^{-1}\omega^{\nu+2}+\sum_{r=1}^{\nu-1}\delta_{\nu-r+2}(h)\omega^{\nu-r+2}\frac{(\nu-r)}{\nu(\nu-r+2)!}\bar{P}_r(\omega) \quad (3.35)$$

mit

$$\delta_\nu(h)=\gamma_\nu(h)(\sigma^\nu(h))^{-1}.$$

Der Ausdruck $\delta_\nu(h)$ läßt sich für $\nu\geqq 3$, $x>\sqrt{n}$, $m>2-\alpha$ unter Beachtung von (3.21) $-$(3.23) nach der Koeffizientenbestimmung bei $\left(\frac{x}{n}\right)^k$ als Reihe darstellen

$$\delta_\nu(h)=\gamma_\nu+\sum_{k=1}^{(m-\nu)-1}\overline{d_{\nu k}}\left(\frac{x}{n}\right)^k+O\left(\frac{x}{n}\right)^{(m-\nu)}. \quad (3.36)$$

Die Koeffizienten $\overline{d_{\nu k}}$ werden dabei folgendermaßen bestimmt:

$$\overline{d_{\nu k}}=(\gamma_\nu B_{\nu k}+d_{\nu k})+\tilde{d}_{\nu k}, \qquad \tilde{d}_{\nu 1}=0, \qquad \tilde{d}_{\nu l}=\sum_{k=1}^{l} d_{\nu k}B_{\nu\, l-k}, \qquad B_{\nu 0}=0,$$

$$B_{\nu m}=\sum_{l=1}^{m}\binom{\nu}{l}A_{lm}, \qquad A_{lk}=\sum_{\substack{k_j\geqq 1\\ k_1+\cdots+k_l=k}}\prod_{j=1}^{l}A_{k_j}, \qquad d_{\nu k}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\gamma_{\nu+l}}{l!}a_{lk},$$

$$A_k=\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{(2l)!!}\sum_{p=l}^{k}\frac{\gamma_{lp}}{p!}a_{pk}, \qquad \gamma_{ml}=\sum_{\substack{k_j\geqq 1\\ k_1+\cdots+k_m=l}}\prod_{j=1}^{m}\gamma_{k_j+2}.$$

Wenn wir jetzt in (3.35) die für $\delta_\nu(h)$ erhaltene Entwicklung einsetzen, so erhält man

$$\bar{P}_\nu(\omega)=\sum_{k=0}^{(m-\nu)-3}P_{\nu k}(\omega)\left(\frac{x}{n}\right)^k+O\left(\sum_{r=1}^{\nu}|\omega|^{\nu+2r}\left(\frac{x}{n}\right)^{(m-\nu)-2}\right) \quad (3.37)$$

mit den Polynomen

$$P_{\nu k}(\omega)=\sum_{r=1}^{\nu}d_{r\nu k}\omega^{\nu+2r}$$

und den Koeffizienten $d_{r\nu k}$:

$$d_{r\nu k}=\begin{cases}\dfrac{\overline{d_{\nu+2k}}}{(\nu+2)!} & \text{für } r=1 \text{ und alle } \nu, k\\ \sum\limits_{j=r-1}^{\nu-1}\dfrac{\nu-j}{\nu(\nu+2-j)!}c_{r-1jk} & \text{für } r\geqq 2,\end{cases} \tag{3.38}$$

$$c_{lsk}=\sum_{m=0}^{k}\overline{d_{\nu-s+2m}}\,\overline{d_{ls+k-m)}}$$

für $\nu=1,2,\dots$ und wenn $\overline{d_{\nu+20}}=\gamma_{\nu+2}$ gesetzt wird.

Nach Ausschreiben der in den Summen enthaltenen Ausdrücken erhält man unschwer die Aussage des Lemma 1, wenn $m>2q+3$ gewählt wird.

Lemma 2. *Für die Verteilungsfunktion $\bar\phi_{nh}(t)$ gilt im Gebiet $\sqrt{n}<x\leqq\Lambda(n)$ gleichmäßig bezüglich t folgende Entwicklung*

$$\bar\phi_{nh}(t)=\phi(t)+\sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{Q_\nu^\times\left(t,\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)}{n^{\nu/2}}+O\left(\frac{x^{q-1}}{n^{q-\frac12}}\right). \tag{3.39}$$

Hierbei bedeuten

$$Q_\nu^\times(t,z)=\sum_{l=1}^{\nu}P_{l\nu-l}(-\phi(t))\,z^{\nu-l}$$

und

$$P_{lk}(-\phi(t))=\sum_{r=1}^{l}(-1)^l d_{r\,lk}\frac{d^{l+2r}\phi(t)}{dt^{l+2r}}.$$

Beweis von Lemma 2. Wir setzen

$$u_q(t,z)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{q-1}P_\nu^\times(it,z)\,n^{-\frac{\nu}{2}}\right),$$

dann gilt nach einem Lemma von Esseen [19]

$$\bar\phi_{nh}(u)-\phi(u)-\sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{Q_\nu^\times\left(u,\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)}{n^{\nu/2}}\leqq\frac{c_5}{n^q}+(\pi)^{-1}\int_{n^q\geqq|t|}\left|\frac{\bar\varphi_{nh}(t)-u_q\left(t,\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)}{t}\right|dt.$$

Es sei

$$T_{qn}=\sqrt{n}\left(\frac{\sigma^{q+2}(h)}{\beta_{q+2}(h)}\right)^{1/q}.$$

Damit gilt für das letzte Integral folgende Abschätzung

$$\int_{|t| \leqq n^q} \left| \frac{\bar{\varphi}_{nh}(t) - u_q\left(t, \frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{t} \right| dt \leqq \int_{|t| \leqq T_{qn}} \left| \frac{\bar{\varphi}_{nh}(t) - u_q\left(t, \frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{t} \right| dt$$

$$+ \int_{n^q \geqq |t| > T_{qn}} \left| \frac{\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma(h)}\right)}{t} \right| dt + \int_{n^q \geqq |t| \geqq T_{qn}} \left| \frac{u_q\left(t, \frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{t} \right| dt.$$

Aus (3.34), der Bedingung (B′) und den Eigenschaften von $u_q(t, z)$ folgt nun unmittelbar (3.39).

Wir betrachten jetzt das Integral I_1. Unter Berücksichtigung von (3.39) erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}\, d(\bar{\phi}_{nh}(t) - \phi(t))$$

$$= \int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}\, dE_n\left(t, \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}\, dD_n\left(t, \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= I_1^1 + I_1^2. \tag{3.40}$$

Dabei werden mit $E_n(t, z)$ und $D_n(t, z)$ folgende Ausdrücke bezeichnet

$$E_n(t, z) = \sum_{\nu=1}^{q-1} n^{-\frac{\nu}{2}} \sum_{l=1}^{\nu} P_{l\nu-l}(-\phi(t))\, z^{\nu-l}$$

und

$$D_n(t, z) = \bar{\phi}_{nh}(t) - \phi(t) - E_n(t, z).$$

Nach partieller Integration erhält man unter Beachtung von (3.39)

$$I_1^2 = -D_n\left(O, \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + h\sqrt{n}\,\sigma(h) \int_0^\infty e^{-ht\sqrt{n}\sigma(h)}\, D_n\left(t, \frac{x}{\sqrt{n}}\right) dt = O\left(\frac{x^{q-1}}{n^{q-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= e^{x^2/2n}\left(1 - \phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) O\left(\frac{x}{n}\right)^q. \tag{3.41}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung des Integrals I_1^1 über. Auf der Grundlage der für die Čebyšev-Hermitschen Polynome gültigen Darstellung (s. [15], S. 170) läßt sich zeigen, daß

$$dE_n(t, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{\nu=1}^{q-1} n^{-\frac{\nu}{2}} \sum_{l=1}^{\nu} z^{\nu-l} \sum_{i=0}^{[3l/2]} e_{il\nu-l}\, t^{3l-2i} dt \tag{3.42}$$

ist, mit

$$e_{ilp} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{i} d_{i-k\,l-k\,lp} & \text{für } i < l, \\ \sum_{k=0}^{l-1} d_{i-k\,l-k\,lp} & \text{für } i \geqq l, \end{cases} \qquad d_{jrlk} = \frac{(-1)^j (l+2r)!\, d_{rlk}}{j!\,(l+2r-2j)!\, 2^j}$$

(s. auch [7], S. 188).

Weiterhin gilt

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{n}}(1+\tau)t-\frac{t^2}{2}}\, t^{3l-2i}\, dt = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{n}}t-\frac{t^2}{2}}\, t^{k+3l-2i}\, dt$$
$$+ \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^k \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{n}}t-\frac{t^2}{2}}\, t^{k+3l-2i}\, dt.$$

Die hier auftretende Restsumme läßt sich auf Grund der Eigenschaften von τ durch

$$e^{x^2/2n}\left(1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) O\left(\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{2i-3l}\left(\frac{x}{n}\right)^{2p}\right) \tag{3.43}$$

abschätzen. Wir erhalten deshalb unter Beachtung von (3.43) nach Durchführung der Substitution $t=v-\frac{x}{n}$ und weil

$$n^{-\frac{v}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{v-l}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{2i-3l}\left(\frac{x}{n}\right)^{q-v} = O\left(\frac{x}{n}\right)^q$$

ist für I_1^1:

$$I_1^1 = e^{x^2/2n}\left(1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\left\{\sum_{v=1}^{q-1}\sum_{l=1}^{v}\sum_{i=0}^{[3l/2]} e_{ilv-l}\, n^{-\frac{v}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{v-l}\omega_{3l-2i}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{v=1}^{q-3}\sum_{l=1}^{v}\sum_{i=0}^{[3l/2]} e_{ilv-l}\, n^{-\frac{v}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{v-l}\sum_{\bar{l}=1}^{q-v-1} M_{\bar{l}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{x}{n}\right)^{\bar{l}} + O\left(\frac{x}{n}\right)^q\right\}.$$

Zusammenfassend ist also

$$1-F_n^y(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{n^2}\lambda^\times\left(\frac{x}{n}\right)\right\}(1+O(n^{-q}))\exp\left(\frac{x^2}{2n}\right)\left(1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$\cdot\left(1+L\left(\frac{x}{\sqrt{n}},q\right)+O\left(\frac{x}{n}\right)^q\right). \tag{3.44}$$

In dieser Beziehung genügt es, nur die ersten $s+q$-Glieder der Reihe $\lambda^\times(x/n)$ zu berücksichtigen, ohne daß dabei die Konvergenzgeschwindigkeit $O(x/n)^q$ verlorengeht. Es gilt nämlich

$$\frac{x^3}{n^2}\left(\frac{x}{n}\right)^{s+1} = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

Wir bemerken an dieser Stelle, daß aus der letzten Abschätzung auch die Gültigkeit der nach Satz 1 gemachten Bemerkungen bezüglich s und q folgt. (Im Falle $q=0$ hat die Konvergenzgeschwindigkeit in Satz 1 die Ordnung $o(1)$.)

Auf Grund der Gleichung (2.3) und der Bedingung (A) läßt sich mit (3.3) leicht zeigen, daß gilt

$$\frac{F_n^{A(n)}(x)-F_n(x)}{1-\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp\left\{\frac{x^3}{n^2}\lambda^\times\left(\frac{x}{n}\right)\right\}} = O(n^{-k}) \tag{3.45}$$

für beliebiges ganzes $k \geqq 1$. Aus (3.2), (3.44) und (3.45) folgt die erste Beziehung in (2.6). Damit ist Satz 1 bewiesen.

3.2. *Beweis der Sätze 2–4.* Satz 2 ist eine unmittelbare Folgerungen von Satz 1, weil die Bedingung (L) in der Bedingung (A) enthalten ist. Nach Durchführung der entsprechenden Normierung erhalten wir aus (2.6) die Aussage (2.8).

Wenn $\gamma_3 = 0$ ist, dann ist $L(z;2) = 0$. Aus (2.6) folgt dann für diesen Fall die Beziehung (2.9). Wenn außerdem noch $\alpha < 0{,}5$ ist, dann ist $s = 0$ und $\lambda^2(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$. Da $\lambda_0 = \frac{1}{6}\gamma_3 = 0$ und $\lambda_1 = \frac{1}{24}\gamma_4$ ist, so folgt aus (2.9) die Aussage (2.10).

Im Falle $\alpha = 0{,}5$ gilt $s = 1$. Deshalb ist für diesen Fall $\lambda^{[s+2]}(t) = \lambda^3(t)$. Da wir aber in solchen Situationen, wenn $\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right] = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ein Glied weniger zu betrachten brauchen, so ist damit Satz 3 bewiesen.

Da die Koeffizienten der Funktion $L(z;q)$ durch die ersten Kumulanten 1, $\gamma_3, \ldots, \gamma_{q+2}$ und der Koeffizient λ_k in $\lambda^{[s]}(t)$ durch die ersten Kumulanten 1, $\gamma_3, \ldots, \gamma_{k+3}$ der Zufallsgröße X_1 bestimmt werden, so erhält man aus (2.6) unter den Bedingungen des Satzes 4 die Beziehungen (2.11).

Die Abschätzung der Differenz $F_n(x\sqrt{n}) - \phi(x)$ in (2.12) folgt aus (2.11) und den Eigenschaften von $\phi(x)$.

3.3. *Beweis des Satzes 5.* Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3. *Wenn die Zufallsgröße Y mit der durch* (3.5) *und* (3.7) *definierten Verteilungsfunktion $V_h^y(x)(R(y,h))^{-1}$ nicht gitterförmig ist, so gibt es zu jedem $\omega > 0$ eine Funktion $\tilde{\lambda}(n)$, mit $\lim_{n\to\infty} \tilde{\lambda}(n) = \infty$, und ein $H > 0$ derart, daß*

$$\int_{\omega}^{\tilde{\lambda}(n)} \frac{\sup_{0<h<H} |\varphi^n(t)|}{t}\, dt = o(n^{-\frac{1}{2}}) \tag{3.46}$$

ist.

Lemma 3 stellt eine Übertragung eines Satzes von C.G. Esseen [19] für die im Rahmen dieser Arbeit eingeführte Zufallsgröße Y dar. Wir bemerken an dieser Stelle, daß für die von H. Cramér in [1] eingeführte Zufallsgröße Y mit der Verteilungsfunktion

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{hu}\, dV(u)\right)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{hu}\, dV(u)$$

unter der Voraussetzung der Cramérschen Bedingung (C) eine zu Lemma 3 analoge Aussage von L. Saulis in [16], S. 623 bewiesen wurde.

Beweis des Lemma 3. Wenn $\limsup_{t\to\infty} |v(t)| < 1$ ist, so ist wegen (B′) auf der Grundlage von (3.9) und (A)

$$\sup_{\substack{t>t_0\\0<h<H}} |\varphi(t)| < 1.$$

In diesem Falle wird die Beziehung (3.52) offensichtlich erfüllt. Wenn aber

$\limsup_{t\to\infty} |v(t)| = 1$ ist, dann gilt $\limsup_{\substack{t\to\infty \\ h<H}} |\varphi(t)| = 1$ und $|\varphi(t)| < 1$ für alle $t \in (-\infty, \infty)$, $t \neq 0$ und $h < H$, weil die Verteilung von Y nicht gitterförmig ist. Deshalb kann man für $t > \omega$ mittels der Gleichung

$$1 - \frac{1}{a(t)} = \max_{\substack{\omega \leqq \tau < t \\ 0 < h < H}} |\varphi(\tau)|$$

eine Funktion $a(t)$ definieren. Offensichtlich ist $a(t)$ stetig, nichtabnehmend und erfüllt die Bedingung $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$. Wenn wir jetzt wie in [17], S. 210 vorgehen, so erhalten wir (3.52).

Mit Hilfe dieses Lemma kann man nun eine zu Lemma 2 analoge Aussage beweisen, wenn man wie in [17], S. 211 vorgeht, nämlich

$$\bar{\phi}_{nh}(t) - \phi(t) = (\sqrt{2\pi n})^{-1} \frac{\gamma_3}{6} (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + o(n^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.47}$$

Es gilt nämlich nach einem Satz von Esseen [17], S. 205:

$$\left|\bar{\varphi}_{nh}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{(1 + \bar{P}_1(it))}{\sqrt{n}}\right| \leqq \frac{\varepsilon(n)}{\sqrt{n}} (|t|^3 + |t|^6)\, e^{-\frac{t^2}{4}} \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Auf Grund der Eigenschaften von $\delta_3(h)$ kann man leicht zeigen, daß

$$\bar{\varphi}_{nh}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \frac{\gamma_3 (it)^3}{3!\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{|t|^3 + |t|^6}{\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{4}} + o\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ist, weil $\lim_{n\to\infty} \binom{x}{n} = 0$ ist. Aus der letzten Beziehung folgt nun (3.47). Wenn wir jetzt wiederum wie beim Beweis des Satzes 1 verfahren, so erhalten wir die Beziehung (2.13).

Literatur

1. Cramér, H.: Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilities. Actualités Sci. et Indust. No 736, Paris 1938, 5–23
2. Statulevicius, V.: On large deviations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **6**, 1966, 133–144
3. Petrov, V.: Übertragung des Grenzwertsatzes von Cramér auf verschieden verteilte unabhängige Größen (Russisch). Vestnik Leningrad. Univ. **8**, 1953, 13–25
4. Linnik, Yu.: Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Größen unter Beachtung großer Abweichungen (Russisch). Teor. Verojatn. primen. **6**, 145–163 (1961); **7**, 377–391, 121–134 (1962)
5. Petrov, V.: Grenzwertsätze für große Abweichungen bei Nichterfüllung der Cramérschen Bedingung (Russisch). Vestnik Leningrad. Univ. **19**, 49–68 (1963); **1**, 52–75 (1964)
6. Nagejev, S.: Einige Grenzwertsätze für große Abweichungen (Russisch). Teor. Verojatn. primen. X, **2**, 231–254 (1965)
7. Saulis, L.: Grenzwertsätze unter Beachtung großer Abweichungen unter der Linnikschen Bedingung (Russisch). Litov. mat. Sbornik, Lictur. mat. Rink. **XII**, 173–194 (1973)
8. Wolf, W.: Über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen bei Nichterfüllung der Cramérschen Bedingung (Russisch). Math. Nachr. **70**, 197–215 (1976)

9. Richter, W.: Einige Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen (Russisch). Dissertation 1957, Leningrad.
10. Osipov, L.: Über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen für Summen unabhängiger Zufallsgrößen (Russisch). Teor. Verojatn. primen. XVII, **2**, 320 – 341 (1972)
11. Wolf, W.: Einige Grenzwertsätze für große Abweichungen II. Wissenschaftl. Zeitschrift der TU Dresden **21**, 1972
12. Gradstein, J., Rischik, J.: Tabellen von Integralen, Summen, Reihen und Produkten (Russisch). Moskau 1963
13. Ibragimov, J., Linnik, Yu.: Independent and stationary sequences of random variables. Leiden: Noordhoff 1972
14. Osipov, L.: Über asymptotische Entwicklungen der Verteilungsfunktion von Summen von Zufallsgrößen mit ungleichmäßiger Abschätzung der Restglieder (Russisch). Vestnik Leningrad Univ. **I**, 51 – 59 (1972)
15. Petrov, V.: Sums of Independent Random Variables. Berlin, 1975
16. Saulis, L.: Asymptotische Entwicklungen für Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen (Russisch). Litov. mat. Sbornik, Lictuv. mat. Rink. **IX**, 605 – 625 (1969)
17. Gnedenko, B., Kolmogorow, A.: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Berlin 1960
18. Bikelis, A.: Über die Restglieder in den asymptotischen Entwicklungen für charakteristische Funktionen und ihre Ableitungen (Russisch). Litov. mat. Sbornik, Lictuv. mat. Rink. VII, **4**, 571 – 581 (1967)
19. Esseen, C.-G.: Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta Math. **77**, 1945, 1 – 125

Received April 28, 1976; in revised form April 26, 1977