Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
43, 149–172 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Théorème de la limite centrale sur les groupes Nilpotents

A. Raugi

Université de Rennes, Laboratoire de Probabilités, ERA 250 du CNRS,
Avenue du Général Leclerc, F-35031 Rennes

Introduction

Soit $(N, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie nilpotente. On munit N du produit $\circ$ défini par la formule de Campbell-Hausdorff

$$u \circ v = u + v + 1/2\ [u, v] + \cdots (u, v \in N).$$

$(N, \circ)$ est alors un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Si G est un groupe de Lie simplement connexe possédant $(N, [\ ,\ ])$ pour algèbre de Lie, l'application exponentielle de G est un isomorphisme, de groupes analytiques, de $(N, \circ)$ sur G. Soit μ une mesure de probabilité sur N (ou, ce qui revient au même, sur G). On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la $n^{\text{ième}}$ convolée, $\mu^{n\circ}$, de μ.

Tutubalin ([8]), Hennion ([4]) et Virtser ([9]) ont étudié le problème pour des groupes de Lie nilpotents simplement connexes particuliers: le groupe d'Heisenberg et le groupe des matrices triangulaires avec des «1» sur la diagonale. L'hypothèse qu'ils font sur μ correspond à un moment d'ordre $2r$, où r désigne la longueur du groupe nilpotent.

Dans ([1]) la question est étudiée pour un groupe de Lie nilpotent simplement connexe quelconque mais dans deux cas particuliers: le cas centré ($\bar{X}=0$) et le cas «vraiment non centré» (ad $\bar{X}(N^i)=N^{i+1}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r-1\}$). Là aussi on suppose l'existence d'un moment d'ordre $2r$ pour μ.

Notons $N = N^1 \supset N^2 = [N, N] \supset \cdots \supset N^r = [N, N^{r-1}] \supset N^{r+1} = (0)$, la série centrale descendante de l'algèbre de Lie nilpotente $(N, [\ ,\ ])$. Soit m un supplémentaire de N^2 dans N et μ une mesure de probabilité possédant un moment d'ordre 1. Nous notons $\bar{X}$ l'intégrale par rapport à μ de la projection de N sur m; $\bar{X}$ est un élément de m. Posons $\mathscr{I}^{1,0}(\mu)=N$, $\mathscr{I}^{1,1}(\mu)=N^2+\mathbb{R}\bar{X}$ et, pour $(l,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $0 \leqq k < l$, désignons par $\mathscr{I}^{l,k}(\mu)$ l'idéal de N^l engendré par N^{l+1} et par les crochets de l éléments de m dans lesquels figure au moins k fois $\bar{X}$. Ordonnons l'ensemble $E = \{(l,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leqq k < l\} \cup \{(1,1)\}$ à l'aide de la relation d'ordre total $\succ$ définie par

0044-3719/78/0043/0149/$04.80

$$(l,k) \succ (l',k') \Leftrightarrow \begin{cases} l > l' & \text{où} \\ l = l' & \text{et } k > k' \end{cases}.$$

Nous obtenons ainsi une suite décroissante d'idéaux de N, $\{\mathscr{I}^{l,k}(\mu):(l,k)\in(E,\succ)\}$, indépendante du choix du supplémentaire m de N^2 dans N, vérifiant

$$\mathscr{I}^{l,k}(\mu)=(0) \text{ pour } l>r \quad \text{et} \quad \mathscr{I}^{l,0}(\mu)=N^l \text{ pour } l\geqq 1.$$

Dans le cas centré cette suite coïncide avec la série centrale descendante de N. Dans le cas «vraiment non centré», nous avons $\mathscr{I}^{l,k}(\mu)=N^l$ pour tout élément (l,k) de E tel que $l\geqq 2$.

Pour tout élément (l,k) de $(E,\succ)$, désignons par $m^{l,k}$ un supplémentaire de $\mathscr{I}^{l_0,k_0}(\mu)$ dans $\mathscr{I}^{l,k}(\mu)$, où (l_0,k_0) désigne le plus petit élément de $(E,\succ)$ supérieur à (l,k). Si u est un élément de N, pour tout couple (l,k) de $(E,\succ)$, nous notons $u^{(l,k)}$ la composante de u sur $m^{l,k}$; nous avons

$$u = \sum_{\{(l,k)\in(E,\succ):\, l\leqq r\}} u^{(l,k)}.$$

Pour tout élément u de N et pour tout entier naturel n, nous posons

$$U_n^\mu(u) = \sum_{\{(l,k)\in(E,\succ):\, 2\leqq l\leqq r\}} u^{(l,k)}/n^{(l+k)/2} + (u^{(1,0)}+u^{(1,1)})/\sqrt{n}.$$

Nous disons qu'une mesure de probabilité μ sur G est apériodique si μ n'est pas portée par une classe moduls un sous-groupe fermé distingué de G.

Avec les notations introduites ci-dessus, nous obtenons alors le résultat suivant qui généralise ceux de [8, 4, 9, 1].

Soit μ une mesure de probabilité sur N apériodique possèdant un moment d'ordre 2. Alors la suite de mesures de probabilité $\{U_n^\mu(\mu^{n\circ} * \varepsilon_{(-n\bar{X})})\}_{n\geqq 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité v absolument continue par rapport à la mesure de Haar de N. De plus v est la loi au temps 1 d'un processus de diffusion sur $N(\approx \mathbb{R}^p)$ dont nous donnons le générateur infinitésimal.

1. Suite graduées d'idéaux et algèbre des polynomes dans une algèbre de Lie nilpotente

On désigne par $(N,[\ ,\ ])$ une algèbre de Lie nilpotente. On muni N du produit $\circ$, défini par la formule de Campbell-Hausdorff,

$$u\circ v = u+v+\tfrac{1}{2}[u,v]+\cdots \qquad (u,v\in N). \tag{$*$}$$

$(N,\circ)$ est alors un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. On note $\mathscr{A}$ l'algèbre des fonctions polynomes sur l'espace vectoriel N.

1.1 *Définition.* On appelle suite graduée d'idéaux de N toute suite décroissante d'idéaux $(\mathscr{I}^i)_{i\geqq 0}$ telle que

i) $\mathscr{I}^0=N$ et, à partir d'un certain rang, $\mathscr{I}^i=(0)$.

ii) $[\mathscr{I}^i,\mathscr{I}^j]\subset\mathscr{I}^{i+j}$, pour tout i et $j\geqq 0$.

Le plus grand entier r tel que $\mathscr{I}^r \neq (0)$ est appelé la longueur de la suite graduée d'idéaux $(\mathscr{I}^i)_{i \geqq 0}$.

1.2 Un exemple de suite graduée d'idéaux de N est donnée par la série centrale descendante $(N^i)_{i \geqq 0}$ de N:

$$N^0 = N^1 = N, N^2 = [N, N^1], \ldots, N^i = [N, N^{i-1}], \ldots.$$

La longueur r de la série centrale descendante de N est appelée la longueur de l'algèbre de Lie nilpotente N.

Soient $(\mathscr{I}^i)_{i \geqq 0}$ et $(\mathscr{J}^i)_{i \geqq 0}$ deux suites graduées d'idéaux de N. Nous disons que $(\mathscr{I}^i)_{i \geqq 0}$ est plus fine que $(\mathscr{J}^i)_{i \geqq 0}$ si pour tout $i \geqq 0$, il existe un entier naturel σ_i tel que $\mathscr{I}^{\sigma_i} = \mathscr{J}^i$.

1.3 *Définition.* Soit $(\mathscr{I}^i)_{i \geqq 0}$ une suite graduée d'idéaux de N de longueur r. Pour $i \in \{-1, 0, 1, \ldots, r\}$, notons q_i la dimension de l'espace vectoriel $N/\mathscr{I}^{i+1}$. Nous disons qu'une base ordonnée $\{e_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$, $(p = q_r)$, de N est adaptée à la suite graduée d'idéaux $(\mathscr{I}^i)_{i \geqq 0}$, si, pour tout $i \in \{0, \ldots, r\}$, verifiant $q_i \neq q_{i-1}$, $\{e_{q_{i-1}+1}, \ldots, e_{q_i}\}$ est une base d'un supplémentaire m^i de $\mathscr{I}^{i+1}$ dans $\mathscr{I}^i$.

1.4 *Notion de degré sur* $\mathscr{A}$ ([2]). Désignons par $\{e_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$ une base de N adaptée à la série centrale descendante, $(N^i)_{i \geqq 0}$, de N (définition (1.3)) et par $\{x_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\{e_{p_{i-1}+1}, \ldots, e_{p_i}\}$, où $p_i = \dim(N/N^{i+1})$ et $p_0 = 0$, est une base d'un supplémentaire m^i de N^{i+1} dans N^i.

Nous définissons une notion de degré sur $\mathscr{A}$, en attribuant un degré à chaque générateur x_k, $1 \leqq k \leqq p$; le degré de x_k, noté d_k ou $dg(x_k)$, est par définition égal au plus grand entier i tel que e_k appartienne à N^i. On convient que le degré du polynome nul est $(-\infty)$. Il est facile de voir que cette notion est indépendante du choix de la base adaptée.

1.5 Le produit $\circ$ sur N, défini par la formule de Campbell-Hausdorff est polynomial. Plus précisément nous avons

$$x_k(u \circ v) = x_k(u) + x_k(v) + P_k(u, v), \qquad k \in \{1, \ldots, p\},$$

où P_k est une fonction polynome sur $N \times N (\approx \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ telle que:

i) $P_k(u, v)$ ne dépend que des $p_{d_k - 1}$-premières coordonnées de u et de v. Autrement dit P_k est une fonction polynome sur $\mathbb{R}^{p_{d_k-1}} \times \mathbb{R}^{p_{d_k-1}}$.

ii) Le degré (global) de P_k, noté $\operatorname{dg} P_k$, est inférieur ou égal à d_k.

iii) Le degré partiel de P_k par rapport à la première (resp. la deuxième) variable, noté $\operatorname{dg} P_k/u$ (resp. $\operatorname{dg} P_k/v$), est inférieur ou égal à $d_k - 1$.

iv) La valuation partielle de P_k par rapport à la première (resp. la deuxième) variable, notée $\operatorname{val} P_k/u$ (resp. $\operatorname{val} P_k/v$) est supérieure ou égale à 1.

2. Moments

2.1 *Définitions.* Soit G un groupe L.C.D., compactement engendré. Une application borélienne δ de G dans $\mathbb{R}_+$ est appelée jauge (resp. fonction sous-additive) si elle vérifie:

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \delta(g_1 g_2) \leqq \delta(g_1) + \delta(g_2) + C \quad (\text{resp.}\ \delta(g_1 g_2) \leqq \delta(g_1) + \delta(g_2)),$$

où C est une constante >0 indépendante de g_1 et g_2.

Une jauge δ de G est dite principale s'il existe un voisinage compact V de l'unité engendrant G tel que $B_n = \{x : \delta(x) \leqq n\} \subset V^n$.

2.2 On sait ([2]) que sur un groupe L.C.D. compactement engendré, il existe des jauges principales et si δ_0 est l'une d'elles, pour toute autre jauge δ nous avons:

$$\forall g \in G \quad \delta(g) \leqq C_1 \delta_0(g) + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des nombres >0 indépendants de g.

Il s'ensuit que si μ est une mesure de probabilité sur G, l'expression $\int_G (\delta_0(g))^\alpha \mu(dg) < +\infty$, pour $\alpha > 0$, est indépendante du choix de δ_0; dans ce cas nous disons que μ possède un moment d'ordre α.

2.3 Revenons à présent au cas du groupe de Lie nilpotent $(N, \circ)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, désignons par m^i un supplémentaire de N^{i+1} dans N^i. Nous avons $N = \bigoplus_{i=1}^{r} m^i$; si $u \in N$, nous notons $u^{(i)}$ sa composante sur m^i. Supposons les sous espaces m^i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, de N normés par $\| \ \|$, on définit une fonction ϕ sur N par

$$\phi(u) = \sup_{1 \leqq i \leqq r} \|u^{(i)}\|^{1/i} \quad (u \in N).$$

On sait ([3], lemme II.1) que, quitte à remplacer les normes données par des normes homothétiques, ϕ est une jauge principale.

2.4 **Lemme.** *Soit μ une mesure de probabilité sur N. Alors nous avons l'équivalence:*

i) *μ possède un moment d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

ii) *Pour toute fonction polynome A et tout réel $\beta > 0$ tels que $\beta \operatorname{dg} A \leqq \alpha$, on a $\int_N |A(x)|^\beta \mu(dx) < +\infty$.*

Preuve. Soit $l = (l_1, \ldots, l_p) \in \mathbb{N}^p$; nous désignons par x^l le monome $x_1^{l_1} \ldots x_p^{l_p}$ et nous posons, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$

$$j_k = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dg} x^l}{d_k\, l_k} & \text{si } l_k \neq 0 \\ +\infty & \text{si } l_k = 0 \end{cases}.$$

Nous avons $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{j_k} = 1$ et d'après l'inégalité de Hölder nous avons, pour tout réel positif β tel que $\beta \, \mathrm{dg}\, x^l \leqq \alpha$,

$$\int_N |x^l(u)|^\beta \mu(du) \leqq \prod_{\substack{1 \leqq k \leqq p \\ l_k \neq 0}} \left(\int_N |x_k(u)|^{\beta l_k j_k} \mu(du)\right)^{1/j_k}.$$

On en déduit que ii) équivaut à

ii)' $\int_N |x_k(u)|^{\alpha/d_k} \mu(du) < +\infty, \ k \in \{1, \dots, p\}$.

Comme i) équivaut par définition à $\int_N (\phi(u))^\alpha \mu(du) < +\infty$ (voir (2.2) et (2.3)) et que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont équivalentes, le lemme s'en déduit immédiatement.

2.5 *Définition.* Soit μ une mesure de probabilité sur N possèdant un moment d'ordre 1. Nous disons que μ est centrée si $\int_N A(x)\, \mu(dx) = 0$, pour tout monome A de degré 1 sur N.

3. Resultats preliminaires

3.1 **Lemme** ([2]). *Soit μ une mesure de probabilité sur N possèdant un moment d'ordre $k \geqq 1$. Soit Q la probabilité de transition associée à μ (i.e. $Q(x, \cdot) = \varepsilon_x * \mu(\cdot)$). Alors pour toute fonction polynome A de degré $\leqq k$ sur N, nous avons*

$$\mathrm{dg}[(Q-I)A] \leqq \mathrm{dg}\, A - 1;$$

et si de plus μ est centrée,

$$\mathrm{dg}[(Q-I)A] \leqq \mathrm{dg}\, A - 2.$$

Preuve. Il suffit de montrer le lemme quand A est un monome x^l, $l \in \mathbb{N}^p$, avec $\mathrm{dg}\, x^l \leqq k$.

De (1.5) il résulte que l'on a

$$x^l(u \circ v) = x^l(u) + x^l(v) + P_l(u, v)$$

avec i) $\mathrm{dg}\, P_l \leqq \mathrm{dg}\, x^l$

ii) $\mathrm{dg}\, P_l/u$ et $\mathrm{dg}\, P_l/v \leqq \mathrm{dg}\, x^l - 1$

iii) $\mathrm{val}\, P_l/u$ et $\mathrm{val}\, P_l/v \geqq 1$.

Par suite, pour $\mathrm{dg}\, x^l \leqq k$,

$$(Q-I)\, x^l(\cdot) = \int_N x^l(v)\, \mu(dv) + \int_N P_l(\cdot, v)\, \mu(dv),$$

est une fonction polynome de degré inférieur ou égal à $\mathrm{dg}\, x^l - 1$.

Si μ est centrée, les monomes de $P_l(u, v)$ dont le degré partiel en v est égal à 1 vont avoir une intégrale nulle, il s'ensuit donc que

$$\mathrm{dg}[(Q-I)x^l] \leqq \mathrm{dg}\, x^l - 2.$$

3.2 **Lemme.** *Soient μ une mesure de probabilité sur N et f une fonction μ-intégrable positive. Alors $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_N f^\alpha 1_{\{f \leqq cn\}} d\mu$ converge vers zéro, quand n tend vers l'infini, pour tous réels $\alpha > 1$ et $c > 0$.*

Preuve. Quitte à remplacer f par $f c^{-1}$, on peut supposer que $c=1$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\delta(n) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_N f^\alpha 1_{\{f \leqq n\}} d\mu &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{n} \int_N f^\alpha 1_{\{k-1<f \leqq k\}} d\mu \\ &\leqq \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \mu(\{k-1<f \leqq k\}) \\ &\leqq \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha (a_{k-1}-a_k),\end{aligned}$$

en posant $a_k = \mu(\{f > k\})$.

Or f étant intégrable, la série positive a_k est convergente. Il s'ensuit que la suite $k a_k$ converge vers zéro et la série positive $t_k = k(a_{k-1}-a_k)$ est donc convergente (noter que $\sum_{k=1}^{p} t_k = (a_1 + \cdots + a_{p-1}) - p\, a_p$). On en déduit que la suite $u_k = k\, t_k$ converge vers zéro.

On a donc prouvé que $\delta(n) \leqq \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-2} u_k$, où u_k est une suite convergeant vers zéro. Comme pour $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-2} u_k$ tend vers zéro dès que la suite u_k tend vers zéro, le lemme (3.2) est prouvé.

3.3 **Lemme.** *Soient μ une mesure de probabilité sur N et f une fonction μ-intégrable positive. Alors*

$$\frac{\left[\int_N f^\alpha 1_{\{f > cn\}} d\mu\right]^{1+\beta}}{n^{\alpha-\beta(1-\alpha)} \mu(\{f > cn\})}$$

converge vers zéro, quand n tend vers l'infini, pour tous réels $c > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ avec $\beta(1-\alpha) \leqq 1$.

Preuve. Quitte à remplacer f par $f c^{-1}$, nous pouvons supposer que $c=1$.

Posons $F(t) = \mu(\{f > t\})$, $t \in \mathbb{R}_+$. D'après le théorème de Fubini, nous avons pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_n^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{1-\alpha}} dt = \alpha^{-1} \int_N f^\alpha 1_{\{f>n\}} d\mu - \alpha^{-1} n^\alpha \mu(\{f>n\}).$$

Comme $n\mu(\{f>n\}) \leqq \int_{\{f>n\}} f d\mu$, $n\mu(\{f>n\})$ converge vers zéro; on est amené alors à prouver que la fonction

$$U(x) = \frac{\left(\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{1-\alpha}} dt\right)^{1+\beta}}{x^{\alpha-\beta(1-\alpha)} F(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

converge vers zéro quand x tend vers l'infini.

Posons

$$G(x) = \left(\int_{x^\gamma}^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{1-\alpha}} dt\right)^{-\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{avec} \quad \gamma = (\beta(1-\alpha))^{-1}.$$

F étant décroissante et γ étant supérieur à 1, G est une fonction convexe; c'est la composée des trois fonctions convexes:

$$x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{1-\alpha}} dt, \qquad x \longmapsto x^\gamma \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{-\beta}.$$

Nous savons alors que la fonction $p(x,y) = \dfrac{G(x)-G(y)}{x-y}$, x et $y \in \mathbb{R}_+$, est croissante en x et y. G admet donc des dérivées à gauche et à droite, croissantes, vérifiant

$$G'_g(x) \leqq G'_d(x) \quad \text{et} \quad G'_g(y) \geqq p(x,y) \geqq G'_d(x), \qquad (x, y \in \mathbb{R} \text{ avec } x<y).$$

D'autre part comme $\lim_{t\to 0} t F(t) = 0$, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{1-\alpha}} dt = 0;$$

par suite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/\beta} \int_{x^\gamma}^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{1-\alpha}} dt = 0$$

et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} G'_d(x) = \lim_{x\to+\infty} G'_g(x) = +\infty.$$

Le lemme (3.3) s'obtient alors en remarquant que puisque F est continue à droite, on a

$$G'_d(x) = [(1-\alpha)\, U(x^\gamma)]^{-1}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

3.4 **Corollaire.** *Soient μ une mesure de probabilité sur N, p un réel supérieur ou égal à 2 et f une fonction positive vérifiant $\int_N f(x)^q \mu(dx) < +\infty$ avec $q>1$. Alors nous avons, pour tout réel $c>0$,*

$$\lim_n \frac{\left(\int_N f 1_{\{f > c n^{1/q}\}} d\mu\right)^p}{n^{(p-q)/q}[\mu(\{f > c n^{1/q}\})]^{p-1}} = 0.$$

Preuve. Posons $g = f^q$; g est une fonction μ-intégrable positive. Le corollaire se déduit alors immédiatement du lemme (3.3) pour les valeurs $\alpha = q^{-1}$ et $\beta = (p-1)^{-1}$.

4. Théorème de la limite centrale

Nous désignons par $(N, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie nilpotente de longueur r. On muni N du produit $\circ$ défini par la formule de Campbell-Hausdorff,

$$u \circ v = u + v + 1/2\,[u, v] + \cdots \qquad (u, v \in N). \qquad (*)$$

$(N, \circ)$ est alors un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

4.1 *Suite graduée d'idéaux de N associée à une mesure de probabilité sur N.* Soit μ une mesure de probabilité sur N, possédant un moment d'ordre 1. Soit m un supplémentaire de $N^2 = [N, N]$ dans N; si $u \in N$, nous notons $\bar{u}$ la composante de u sur m. Posons $\bar{X} = \int_N \bar{u}\, \mu(du)$; $\bar{X}$ est un élément de m.

Considérons l'ensemble $E = \{(l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leqq k < l\} \cup \{(1,1)\}$ muni de la relation d'ordre total $\succ$ définie par

$$(l,k) \succ (l',k') \Leftrightarrow \begin{cases} l > l' & \text{ou} \\ l = l' & \text{et } k > k' \end{cases}.$$

Il est facile de voir que l'ordre ainsi définit sur E est aussi celui qui est induit par la bijection: $\sigma: E \to \mathbb{N}$

$$(l,k) \to \sigma(l,k) = \begin{cases} l(l-1)/2 + k + 1 & \text{si } l \geqq 2 \\ k & \text{si } l = 1 \end{cases}.$$

Nous appelons alors suite graduée d'idéaux associée à μ, la suite graduée d'idéaux définie de la façon suivante: $\mathscr{I}^{1,0}(\mu) = N$, $\mathscr{I}^{1,1}(\mu) = N^2 \oplus \mathbb{R}\bar{X}$ et $\mathscr{I}^{l,k}(\mu)$, $(l,k) \in (E, \succ)$ avec $l \geqq 2$, est l'idéal de N^l engendré par N^{l+1} et par les éléments qui sont des crochets de l éléments de m dans lesquels figure au moins k fois $\bar{X}$. $\{\mathscr{I}^{l,k}(\mu); (l,k) \in (E, \succ)\}$ est une suite graduée d'idéaux plus fine que la série centrale descendante de N et de longueur inférieure ou égale à $r(r+1)/2$ (car $\mathscr{I}^{l,k}(\mu) = (0)$ si $l > r$); en outre il est clair que cette définition est indépendante du choix du supplémentaire m de N^2 dans N. Dans la suite nous omettrons l'indice μ, pour alléger l'écriture.

4.2 Pour tout $l \geqq 1$, nous avons $\mathscr{I}^{l,0}=N^l$. En particulier $\mathscr{I}^{2,0}=N^2$ et m (voir (4.1)) est un supplémentaire de $\mathscr{I}^{2,0}$ dans $\mathscr{I}^{1,0}=N$. Désignons par $m^{1,0}$ un supplémentaire dans m de l'espace vectoriel, $m^{1,1}$, engendré par $\bar{X}$; et par $m^{l,k}$, $(l,k)\in E$ avec $l \geqq 2$, un suppémentaire de $\mathscr{I}^{l_0,k_0}$ dans $\mathscr{I}^{l,k}$, où (l_0,k_0) est le plus petit élément de $(E, \succ)$ strictement supérieur à (l,k). [Si $k<l-1$ $(l_0,k_0)=(l,k+1)$, si $k=l-1$ $(l_0,k_0)=(l+1,0)$].

Pour tout $(l,k)\in E$, nous avons

$$\mathscr{I}^{l,k}=\bigoplus_{\{(l',k')\in E:\,(l',k')\succeq(l,k)\}} m^{l',k'};$$

et pour tout entier $l \geqq 2$, $\bigoplus_{0\leqq k\leqq l-1} m^{l,k}$ est un supplémentaire de N^{l+1} dans N^l.

Si $u\in N$, pour tout couple (l,k) de E, nous notons $u^{(l,k)}$ la composante de u sur $m^{l,k}$; nous avons

$$u=\sum_{\{(l,k)\in E\}} u^{(l,k)}=\sum_{\{(l,k)\in E:\,l\leqq r\}} u^{(l,k)}.$$

Pour tout entier naturel n, nous posons alors

$$U_n(u)=\sum_{\{(l,k)\in E:\,2\leqq l\leqq r\}} u^{(l,k)}/n^{(l+k)/2}+\bar{u}/\sqrt{n},$$

avec $\bar{u}=u^{(1,0)}+u^{(1,1)}$.

4.3 *Crochets de Lie associés à une mesure de probabilité.* Pour tous couples (l,k) et (l',k') de E, nous avons

$$[m^{l,k},m^{l',k'}]\subset\mathscr{I}^{l+l',k+k'}=\bigoplus_{\{(s,p)\in E:\,(s,p)\succeq(l+l',k+k')\}} m^{s,p}.$$

Pour $u\in m^{l,k}$ et $v\in m^{l',k'}$, notons $[u,v]_\mu$ la composante de $[u,v]$ sur $m^{l+l',k+k'}$. Pour u et v appartenant à N, posons alors

$$[u,v]_\mu=\sum_{\{(l,k),(l',k')\in E:\,l,l'\leqq r\}}[u^{(l,k)},v^{(l',k')}]_\mu.$$

Il est clair que l'application de $N\times N$ dans N qui au couple (u,v) associe $[u,v]_\mu$ est bilinéaire alternée. D'autre part, pour $u\in m^{l,k}$, $v\in m^{l',k'}$, $w\in m^{l'',k''}$, avec (l,k), (l',k'), $(l'',k'')\in E$, $[u,[v,w]_\mu]_\mu$ n'est autre que la composante de $[u,[v,w]]$ sur $m^{l+l'+l'',k+k'+k''}$; il s'ensuit que $[\ ,\ ]_\mu$ vérifie l'identité de Jacobi. On en déduit donc que $[\ ,\ ]_\mu$ est un crochet de Lie de N, vérifiant

$$[m^{l_1,k_1},[m^{l_2,k_2},\dots,[m^{l_{p-1},k_{p-1}},m^{l_p,k_p}]_\mu\dots]_\mu]_\mu\subset m^{\sum_{i=1}^{p} l_i,\,\sum_{i=1}^{p} k_i},$$

pour $(l_i,k_i)\in E$, $i\in\{1,\dots,p\}$; et $(N,[\ ,\ ]_\mu)$ est une algèbre de Lie nilpotente de longueur inférieure ou égale à r. Nous notons $\circ_\mu$ le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,\ ]_\mu$ par la formule de Campbell-Hausdorff.

D'autre part on définit un nouveau crochet de Lie $[\ ,\ ]'_\mu$ sur N en posant, pour $u\in m^{l,k}$ et $v\in m^{l',k'}$

$$[u,v]'_\mu = \begin{cases} [u,v]_\mu & \text{si } (l,k) \text{ et } (l',k') \neq (1,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note $\circ'_\mu$ le produit sur N associé à ce nouveau crochet de Lie par la formule de Campbell-Hausdorff. Dans le cas où μ est centrée nous avons $\circ'_\mu = \circ_\mu$, mais en général $\circ'_\mu$ et $\circ_\mu$ sont distincts.

4.4 Nous notons ad (resp. $a\,d^\mu$ et $a\,d'^\mu$) la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $(N,[\ ,\ ])$ (resp. $(N,[\ ,\ ]_\mu)$ et $(N,[\ ,\ ]'_\mu)$).

Pour tout élément (l,k) de E, posons (voir (4.1)) $q_{\sigma(l,k)} = \dim N/\mathscr{I}^{l,k}$ et, pour $q_{\sigma(l,k)-1} \neq q_{\sigma(l,k)}$, désignons par $\{e_{q_{\sigma(l,k)-1}+1}, \dots, e_{q_{\sigma(l,k)}}\}$ une base de $m^{l,k}$, avec $e_{q_1} = e_{q_0+1} = \bar{X}$ si $q_0 \neq q_1$. Nous obtenons ainsi une base $\{e_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$ de N, adaptée à la suite graduée d'idéaux $\{\mathscr{I}^{l,k} : (l,k) \in (E, \succ)\}$. Nous notons $\{x_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à la base $\{e_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$.

Si f est une fonction différentiable sur N, nous posons pour $v \in N$

$$v f(u) = \lim_{t \to 0} (f(u \circ'_\mu t\,v) - f(u))/t \qquad (u \in N).$$

Considérons l'opérateur différentiel du second ordre, D_t, défini par:

$$D_t f = \sum_{k=q_1+1}^{q_2} \gamma_k [\operatorname{Exp} a\,d^\mu\, t\,\bar{X}(e_k)]\, f + \sum_{l=1}^{q_1} \sum_{k=1}^{q_1} \sigma_{l,k} [\operatorname{Exp} a\,d^\mu\, t\,\bar{X}(e_l) \operatorname{Exp} a\,d^\mu\, t\,\bar{X}(e_k)]\, f,$$

où $\gamma_k = \int_N x_k(g)\,\mu(\mathrm{d}g)$, $\sigma_{l,k} = \int_N x_l(g)\,x_k(g)\,\mu(\mathrm{d}g) - x_l(\bar{X})\,x_k(\bar{X})$ et f est une fonction de classe C^2 sur N.

Alors nous avons:

4.5 **Théorème.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans N, de même loi μ apériodique et possédant un moment d'ordre 2. Alors, avec les notations précédentes, la loi de la v.a. $U_n(X_1 \circ \cdots \circ X_n \circ (-n\bar{X}))$ converge, quand n tend vers l'infini, vers la loi au temps 1 du processus de diffusion sur $N(\approx \mathbb{R}^n)$ de générateur infinitésimal D_t. Cette loi limite est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de N.*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de ce théorème.

Posons

$$Z_k = X_k \circ (-\bar{X}), \qquad k \geqq 1.$$

$\{Z_k\}_{k\geqq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes centrées de même loi $\lambda = \mu * \varepsilon_{(-\bar{X})}$. Nous avons

$$\begin{aligned} X_1 \circ \cdots \circ X_n \circ (-n\bar{X}) &= Z_1 \circ (\bar{X} \circ Z_2 \circ (-\bar{X})) \circ \cdots \circ ((n-1)\bar{X} \circ Z_n \circ (-(n-1)\bar{X})) \\ &= Z_1 \circ \operatorname{Exp} \operatorname{ad} \bar{X}(Z_2) \circ \cdots \circ \operatorname{Exp} \operatorname{ad}(n-1)\,\bar{X}(Z_n). \qquad (*) \end{aligned}$$

4.6 Munissons l'espace produit $N \times \mathbb{R}$ du produit, encore noté $\circ$ (resp. $\circ'_\mu$), défini par

$$(u,t)\circ(v,s)=(u\circ \operatorname{Exp} \operatorname{ad} t\,\bar{X}(v),\, t+s)$$

(resp.

$$(u,t)\circ'_\mu(v,s)=(u\circ'_\mu \operatorname{Exp} ad^\mu\, t\,\bar{X}(v),\, t+s)),$$

pour $u, v \in N$ et $t, s \in \mathbb{R}$.

Nous obtenons alors un groupe de Lie nilpotent qui est un produit semi-direct des groupes de Lie $(N,\circ)$ et $(\mathbb{R},+)$ (resp. $(N,\circ'_\mu)$ et $(\mathbb{R},+)$).

Notons indifféremment ∂ ou e_{p+1} le champ analytique de vecteurs tangents qui correspond à la dérivation ordinaire sur $\mathbb{R}$. Soit $\{e_k\}_{1\leqq k\leqq p}$ la base de N considérée en (4.4). L'algèbre de Lie du groupe de Lie $(N\times\mathbb{R},\circ)$ (resp. $(N\times\mathbb{R},\circ'_\mu)$) est $N\oplus\mathbb{R}\partial$ muni du crochet de Lie, encore noté $[\ ,\ ]$ (resp. $[\ ,\ ]'_\mu$), qui coïncide avec $[\ ,\ ]$ (resp. $[\ ,\ ]'_\mu$) sur N et qui vérifie en outre $[\partial, e_k]=[\bar{X}, e_k]$ (resp. $[\partial, e_k]'_\mu=[\bar{X}, e_k]_\mu$), pour tout $k\in\{1,\dots,p\}$.

Avec les notations ci-dessus la relation $(*)$ s'écrit

$$(X_1\circ\cdots\circ X_n\circ(-n\bar{X}),n)=(Z_1,1)\circ\cdots\circ(Z_n,1).$$

Nous sommes ainsi amenés à étudier le comportement, dans le groupe de Lie $(N\times R,\circ)$, du produit de n v.a. indépendantes et de loi $\lambda\otimes\varepsilon_1$. Pour cela nous allons nous servir d'une technique qui a déja été utilisée dans [1]. Cependant l'utilisation de celle-ci nécessite l'existence, pour la loi $\lambda\otimes\varepsilon_1$ (i.e. pour λ), d'un moment d'ordre $2r$ (cf. [1]). D'après nos hypothèses nous avons seulement un moment d'ordre 2; nous devons donc faire appel à un procédé de troncature.

4.7 Pour tout entier naturel n et pour tout élément u de N, nous définissons l'élément $T_n^\mu(u)$ de N par:

$$x_k(T_n^\mu(u)) = \begin{cases} x_k(u) & \text{si } |x_k(u)|\leqq n^{d_k/2} \\ 0 & \text{si } |x_k(u)|>n^{d_k/2} \quad \text{et} \quad d_k>1, \\ a_k(n)=-\dfrac{\int_N x_k(g)\,1_{\{|x_k(\cdot)|\leqq\sqrt{n}\}}(g)\,\mu(dg)}{\lambda(\{|x_k(\,.\,)|>\sqrt{n}\})} & \text{si } d_k=1 \text{ et } |x_k(u)|>\sqrt{n} \end{cases}$$

pour tout élément k de $\{1,\dots,p\}$.

Dans la suite, pour alléger l'écriture, nous écrirons T_n au lieu de T_n^μ.

4.8 **Lemme.** *Avec les notations précédentes, nous avons*

$$\lim_n \|(\lambda\otimes\varepsilon_1)^n-(T_n^\mu(\lambda)\otimes\varepsilon_1)^n\|=0.$$

Preuve. Il est clair que l'on a

$$\|(\lambda\otimes\varepsilon_1)^n-(T_n(\lambda)\otimes\varepsilon_1)^n\|\leqq(1+\eta_n)^n-1,$$

où

$$\eta_n=\lambda(\{u\in N:\exists\, i\in\{1,\dots,p\}/|x_i(u)|>n^{d_i/2}\}).$$

Or nous avons $\eta_n\leqq\lambda(\{\phi^2>cn\})$, où c est une constante et ϕ est la jauge principale sur N définie en (2.3). Comme μ, et donc λ, possèdent un moment d'ordre 2 nous avons $\int_N\phi^2(g)\,\lambda(dg)<+\infty$; c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(\{\phi^2>cn\})<+\infty,$$

pour tout $c>0$. On en déduit que pour tout $c>0$, $n\,\lambda(\{\phi^2>cn\})$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Il s'ensuit que $n\eta_n$ tend vers zéro et il en est de même de $(1+\eta_n)^n-1$. Le lemme (4.8) est prouvé.

Etendons la définition de U_n (voir (4.2)) à $N\times\mathbb{R}$ en posant

$$U_n(u,t)=(U_n(u),t/n),\qquad (u,t)\in N\times\mathbb{R}.$$

Désignons par π la projection de $N=\bigoplus_{(l,k)\in E} m^{l,k}$ sur $m^{1,0}\oplus m^{1,1}\oplus m^{2,0}$; nous avons $\pi(u)=u^{(1,0)}+u^{(1,1)}+u^{(2,0)}$, pour $u\in N$. Prolongeons π à $N\times\mathbb{R}$ en posant

$$\pi(u,t)=(\pi(u),t),\qquad (u,t)\in N\times\mathbb{R}.$$

Alors nous avons:

4.9 **Proposition.** *Avec les notations précédentes, la suite de v.a.*

$$\Lambda_n=U_n[(T_n(Z_1),1)\circ\cdots\circ(T_n(Z_n),1)]-U_n[\pi(T_n(Z_1),1)\circ'_\mu\cdots\circ'_\mu\pi(T_n(Z_n),1)]$$

converge vers zéro dans L^2.

Pour prouver la proposition (4.9) nous commençons par établir deux lemmes.

Pour tout entier k de $\{1,\dots,p\}$, nous notons (d_k,τ_k) l'élément de E tel que $e_k\in m^{d_k,\tau_k}$ (voir (4.4). Pour tout $\alpha=(a^1,\dots,a^{p+1})\in\mathbb{N}^{p+1}$, nous posons

$$d(\alpha)=dg\,x^\alpha=\sum_{k=1}^p a^k d_k+a^{p+1}\quad\text{et}\quad\tau(\alpha)=\sum_{k=1}^p a^k\tau_k+a^{p+1}.$$

Soient $k\in\{1,\dots,p\}$ et $l\in\mathbb{N}$. Définissons

$$\mathcal{M}_0=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_l)\in(\mathbb{N}^{p+1})^l: d(\alpha_1)+\cdots+d(\alpha_l)\leqq d_k,\ \tau(\alpha_1)+\cdots+\tau(\alpha_l)\leqq\tau_k$$

et la $(p+1)$-ième composante de $\alpha_l\in\mathbb{N}^{p+1}$ est nulle$\}$,

$$\mathcal{M}_1 = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{M}_0 : d(\alpha_1) + \cdots + d(\alpha_l) = d_k, \tau(\alpha_1) + \cdots + \tau(\alpha_l) = \tau_k$$

et la q_1-ième composante de α_i, $i \in \{1, \ldots, l\}$, est nulle si $\bar{X} \neq 0\}$. Nous avons:

4.10 **Lemme.** *Avec les notations précédentes, soient $z_1, \ldots, z_l$ l éléments de $N \times \mathbb{R}$, alors $x_k(z_1 \circ \cdots \circ z_l)$ et $x_k(z_1 \circ'_\mu \cdots \cdots \circ'_\mu z_l)$ s'écrivent respectivement, pour $k \neq q_1$,*

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{M}_0} C_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} x^{\alpha^1}(z_1) \ldots x^{\alpha^l}(z_l)$$

et

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{M}_1} C_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} x^{\alpha^1}(z_1) \ldots x^{\alpha^l}(z_l).$$

Preuve. Posons $z_i = (u_i, t_i) \in N \times \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$. Pour tout entier k appartenant à $\{1, \ldots, p\}$ nous avons

$$x_k(z_1 \circ \cdots \circ z_l) = x_k(u_1 \circ \operatorname{Exp} a\, d\, t_1\, \bar{X}(u_2) \circ \cdots \circ \operatorname{Exp} a\, d(t_1 + \cdots + t_{l-1})\, \bar{X}(u_l));$$

et il est clair que $x_k(z_1 \circ \cdots \circ z_l)$ s'écrit

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{M}_0} C_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} x^{\alpha^1}(z_1) \ldots x^{\alpha^l}(z_l).$$

D'après la définition du crochet de Lie $[\ ,\ ]_\mu$ (voir (4.3)), il est alors clair que

$$x_k(u_1 \circ_\mu \operatorname{Exp} a d^\mu\, t_1\, \bar{X}(u_2) \circ_\mu \cdots \circ_\mu \operatorname{Exp} a d^\mu(t_1 + \cdots + t_{l-1})\, \bar{X}(u_l))$$

s'écrit

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{M}'_0} C_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} x^{\alpha^1}(z_1) \ldots x^{\alpha^l}(z_l),$$

où

$$\mathcal{M}'_0 = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathcal{M}_0 : d(\alpha_1) + \cdots + d(\alpha_l) = d_k \text{ et } \tau(\alpha_1) + \cdots + \tau(\alpha_l) = \tau_k\}.$$

Le lemme (4.10) est alors une conséquence immédiate des relations

$$\begin{aligned}
&x_k(z_1 \circ'_\mu \cdots \circ'_\mu z_l)\\
&= x_k(u_1 \circ'_\mu \operatorname{Exp} a d^\mu\, t_1\, \bar{X}(u_2) \circ'_\mu \cdots \circ'_\mu \operatorname{Exp} a d^\mu(t_1 + \cdots + t_{l-1})\, \bar{X}(u_l))\\
&= x_k[(u_1 - x_{q_1}(u_1)\, \bar{X}) \circ_\mu \cdots \circ_\mu \operatorname{Exp} a d^\mu(t_1 + \cdots + t_{l-1})\, \bar{X}(u_l - x_{q_1}(u_l)\, \bar{X})\\
&\quad + \sum_{j=1}^{l} x_{q_1}(u_j)\, \bar{X}],
\end{aligned}$$

qui résultent directement de la définition du crochet de Lie $[\ ,\ ]'_\mu$.

4.11 **Lemme.** *Pour toute fonction monome sur N, x^α, $\alpha \in \mathbb{N}^p$, nous avons*

$$\lim_n \int_N |x^\alpha(T_n(u))|\, \lambda(du)/n^{d(\alpha)/2-1} = 0 \qquad si\ \ d(\alpha) = \operatorname{dg} x^\alpha > 2,$$

$$\lim_n \int_N |x^\alpha(T_n(u))|\, \lambda(du) = \int_N |x^\alpha(u)|\, \lambda(du)$$

et

$$\lim_n \int_N x^\alpha(T_n(u))\,\lambda(du) = \int_N x^\alpha(u)\,\lambda(du) \qquad si\ d(\alpha) \leqq 2.$$

Preuve. Si $d(\alpha)=1$, nous avons $\int_N x^\alpha(T_n(u))\,\lambda(du) = \int_N x^\alpha(u)\,\lambda(du) = 0$, car les mesures λ et $T_n(\lambda)$ sont centrées. D'autre part nous avons, pour $i \in \{1, \ldots, q_1\}$,

$$\begin{aligned}\int_N |x_i(T_n(u))|\,\lambda(du) &= \int_N |x_i(u)|\,1_{\{|x_i| \leqq \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du) + |a_i(n)|\,\lambda(|x_i| > \sqrt{n}) \\ &= \int_N |x_i(u)|\,1_{\{|x_i| \leqq \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du) + \left|\int_N x_i(u)\,1_{\{|x_i| > \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du)\right|,\end{aligned}$$

qui tend vers $\int_N |x_i(u)|\,\lambda(du)$.

Si $d(\alpha)=2$, nous avons soit $x^\alpha(u) = x_i(u)\,x_j(u)$ avec $i,j \in \{1, \ldots, q_1\}$, soit $x^\alpha(u) = x_i(u)$ avec $i \in \{q_1+1, \ldots, q_3\}$. Dans le second cas nous avons

$$|x^\alpha(T_n(u))| \leqq |x^\alpha(u)| \quad \text{et} \quad \lim_n x^\alpha(T_n(u)) = x^\alpha(u);$$

comme λ possède un moment d'ordre 2, d'après le théorème de convergence dominée, nous avons

$$\lim_n \int_N x^\alpha(T_n(u))\,\lambda(du) = \int_N x^\alpha(u)\,\lambda(du)$$

et

$$\lim_n \int_N |x^\alpha(T_n(u))|\,\lambda(du) = \int_N |x^\alpha(u)|\,\lambda(du).$$

Dans le premier cas nous avons

$$\int_N x^\alpha(T_n(u))\,\lambda(du) = e_1(n) + e_2(n) + e_3(n) + e_4(n),$$

avec

$$e_1(n) = \int_N x_i(u)\,x_j(u)\,1_{\{|x_i(.)|\ \text{et}\ |x_j(.)| \leqq \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du)$$

$$e_2(n) = a_i(n) \int_N x_j(u)\,1_{\{|x_j(.)| \leqq \sqrt{n},\, |x_i(.)| > \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du)$$

$$e_3(n) = a_j(n) \int_N x_i(u)\,1_{\{|x_i(.)| \leqq \sqrt{n},\, |x_j(.)| > \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du)$$

$$e_4(n) = a_i(n)\,a_j(n)\,\lambda(\{|x_i|\ \text{et}\ |x_j| > \sqrt{n}\}).$$

Or

$$\begin{aligned}a_i(n) &= -\int_N x_i(u)\,1_{\{|x_i| \leqq \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du)/\lambda(\{|x_i| > \sqrt{n}\}) \\ &= -\int_N x_i(u)\,1_{\{|x_i| > \sqrt{n}\}}(u)\,\lambda(du)/\lambda(\{|x_i| > \sqrt{n}\}),\end{aligned}$$

car λ est centrée.

De l'inégalité de Schwarz, il résulte alors que l'on a

$$|a_i(n)| \leqq \left(\int_N |x_i(u)|^2 1_{\{|x_i| > \sqrt{n}\}}(u)\, \lambda(du)\right)^{1/2} (\lambda(\{|x_i| > \sqrt{n}\}))^{-1/2}$$

et

$$\sup(|e_2(n)|, |e_3(n)|, |e_4(n)|)$$
$$\leqq \left(\int_N |x_i(u)|^2 1_{\{|x_i| > \sqrt{n}\}}(u)\, \lambda(du)\right)^{1/2} \left(\int_N |x_j(u)|^2\, \lambda(du)\right)^{1/2}.$$

Comme λ possède un moment d'ordre 2, d'après le théorème de convergence dominée, $e_2(n)$, $e_3(n)$, $e_4(n)$ convergent vers zéro; et par suite

$$\lim_n \int_N x^\alpha(T_n(u))\, \lambda(du) = \int_N x^\alpha(u)\, \lambda(du).$$

De même nous avons

$$\lim_n \int_N |x^\alpha(T_n(u))|\, \lambda(du) = \int_N |x^\alpha(u)|\, \lambda(du).$$

Supposons que $d(\alpha) > 2$. Nous avons, (inégalité de Hölder),

$$\int_N |x^\alpha(T_n(u))|\, \lambda(du) \leqq \prod_{i=1}^{p} \left[\int_N |x_i(T_n(u))|^{d(\alpha)/d_i}\, \lambda(du)\right]^{d_i\alpha_i/d(\alpha)},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$.

Pour prouver le lemme, nous sommes alors amenés à prouver que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout réel c tel que $c\,d_i > 2$, nous avons

$$\lim_n \int_N |x_i(T_n(u))|^c\, \lambda(du)/n^{cd_i/2-1} = 0. \tag{1}$$

Si $d_i > 1$, nous avons

$$\int_N |x_i(T_n(u))|^c\, \lambda du)/n^{cd_i/2-1}$$
$$= \int_N |x_i(u)|^c\, 1_{\{|x_i| \leqq n^{d_i/2}\}}(u)\, \lambda(du)/n^{cd_i/2-1},$$

et (1) est une conséquence du lemme (3.2).

Si $d_i = 1$, nous avons $c > 2$ et

$$\int_N |x_i(T_n(u))|^c\, \lambda(du)/n^{cd_i/2-1} = e_1(n) + e_2(n),$$

avec

$$e_1(n) = \int_N |x_i(u)|^c\, 1_{\{|x_i| \leqq \sqrt{n}\}}(u)\, \lambda(du)/n^{c/2-1}$$

et

$$e_2(n) = |a_i(n)|^c\, \lambda(\{|x_i| > \sqrt{n}\})/n^{c/2-1}.$$

D'après le lemme (3.2), $e_1(n)$ converge vers zéro. D'autre part nous avons

$$e_2(n) \leqq \left(\int_N |x_i(u)| \, 1_{\{|x_i| > \sqrt{n}\}}(u) \, \lambda(du)\right)^c / n^{c/2-1} \, \lambda(\{|x_i| > \sqrt{n}\})^{c-1};$$

et $e_2(n)$ converge vers zéro d'après le corollaire (3.4).

Le lemme (4.11) est démontré.

Preuve de la proposition (4.9). Pour $k \in \{1, \dots, q_1\} \cup \{p+1\}$, nous avons $x_k(A_n) = 0$. Pour prouver la proposition, nous devons donc montrer que pour tout $k \in \{q_1 + 1, \dots, p\}$

$$\delta_k(n) = \frac{1}{n^{d_k + \tau_k}} E[(x_k((T_n(Z_1), 1) \circ \dots \circ (T_n(Z_n), 1)) - x_k(\pi(T_n(Z_1), 1) \circ'_\mu \dots \circ'_\mu \pi(T_n(Z_n), 1)))^2]$$

converge vers zéro, quand n tend vers l'infini.

Pour tout entier $n \geqq 1$, désignons par Q_n le noyau de transition sur $(N \times \mathbb{R}) \times (N \times \mathbb{R})$ défini par

$$Q_n f(z_1, z_2) = E[f(z_1 \circ (T_n(Z_1), 1), z_2 \circ'_\mu \pi(T_n(Z_1), 1))] = \int_{N \times \mathbb{R}} f(z_1 \circ z, z_2 \circ'_\mu \pi(z)) \, \nu_n(dz),$$

où $\nu_n = T_n(\lambda) \otimes \varepsilon_1$.

Nous avons alors

$$\delta_k(n) = \frac{1}{n^{d_k + \tau_k}} [Q_n^n A_k](0, 0),$$

où A_k désigne le polynome sur $(N \times \mathbb{R}) \times (N \times \mathbb{R})$ défini par

$$A_k((u, t), (v, s)) = (x_k(u) - x_k(v))^2.$$

D'où

$$\delta_k(n) = \frac{1}{n^{d_k + \tau_k}} [((Q_n - I) + I)^n A_k](0, 0) = \frac{1}{n^{d_k + \tau_k}} \sum_{l=0}^{n} C_n^l [(Q_n - I)^l A_k](0, 0).$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}(Q_n - I)^l A_k(0, 0) &= \int_{N \times \mathbb{R}} \dots \int_{N \times \mathbb{R}} (x_k(z_1 \circ \dots \circ z_1) - x_k(\pi(z_1) \circ'_\mu \dots \circ'_\mu \pi(z_1)))^2 \\ &\quad \cdot (\nu_n - \varepsilon_0)(dz_1) \dots (\nu_n - \varepsilon_0)(dz_1) \\ &= \int_{N \times \mathbb{R}} \dots \int_{N \times \mathbb{R}} \Big[\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_2} C_{\alpha_1, \dots, \alpha_l} x^{\alpha_1}(z_1) \dots x^{\alpha_l}(z_l) \Big]^2 \\ &\quad \cdot (\nu_n - \varepsilon_0)(dz_1) \dots (\nu_n - \varepsilon_0)(dz_l),\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{M}_2=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\in\mathcal{M}_1:\forall i\in\{1,\ldots,l\}, d(\alpha_i) - a_i^{p+1}\leqq 2, \tau(\alpha_i)=a_i^{p+1}, \text{avec } \alpha_i=(a_i^1,\ldots,a_i^{p+1})\in\mathbb{N}^{p+1}\}$$

$$=\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\in\mathcal{M}_0-\mathcal{M}_2\\(\beta_1,\ldots,\beta_l)\in\mathcal{M}_0-\mathcal{M}_2}} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}\, C_{\beta_1,\ldots,\beta_l}\, \Delta_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\ldots,\beta_l),$$

où $\Delta_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\ldots,\beta_l)=\prod_{i=1}^{l}(\int_{N\times\mathbb{R}} x^{\alpha_i+\beta_i}(z_i)(\nu_n-\varepsilon_0)(d z_i))$.

Soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ et $(\beta_1,\ldots,\beta_l)$ deux éléments de $\mathcal{M}_0$; posons

$$\alpha_i=(a_i^1,\ldots,a_i^{p+1}) \quad \text{et} \quad \beta_i=(b_i^1,\ldots,b_i^{p+1}),$$

pour $i\in\{1,\ldots,l\}$. Une condition nécessaire pour que le produit $\Delta_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\ldots,\beta_l)$ soit non nul est que nous ayons, pour tout $i\in\{1,\ldots,l\}$,

$$\begin{aligned}&\text{ou bien } d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1})\geqq 2\\&\text{ou bien } d(\alpha_i+\beta_i)=a_i^{p+1}+b_i^{p+1}\neq 0.\end{aligned}\tag{$**$}$$

En particulier, nous devons avoir $d(\alpha_i+\beta_i)+\tau(\alpha_i+\beta_i)\geqq 2$, $\forall i\in\{1,\ldots,l\}$; et cette condition ne peut être réalisée que pour $l\leqq d_k+\tau_k$.

Soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ et $(\beta_1,\ldots,\beta_l)$ deux éléments de $\mathcal{M}_0$ vérifiant la condition $(**)$; nous avons donc $l\leqq d_k+\tau_k$ et nous désignons par $\{I_1,I_2\}$ la partition de $\{1,\ldots,l\}$ définie par

$$\begin{aligned}I_1&=\{i\in\{1,\ldots,l\}: d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1})\geqq 2\},\\I_2&=\{i\in\{1,\ldots,l\}: d(\alpha_i+\beta_i)=a_i^{p+1}+b_i^{p+1}\neq 0\}.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\Delta_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\ldots,\beta_l)&=\prod_{i=1}^{l}\int_{N\times\mathbb{R}} x^{\alpha_i+\beta_i}(z_i)\,\nu_n(d z_i)\\&=\prod_{i=1}^{l}\int_N x^{\alpha_i+\beta_i}(T_n(u_i),1)\,\lambda(d u_i)\\&=\prod_{i\in I_1}\int_N x^{\alpha_i+\beta_i}(T_n(u_i),1)\,\lambda(d u_i).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\Delta_n'&=\Delta_n/n^{\sum_{i\in I_1}((d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1}))/2-1)}\\&=\prod_{i\in I_1}[(\int_N x^{\alpha_i+\beta_i}(T_n(u_i),1)\,\lambda(d u_i))/n^{(d(\alpha_i+\beta_i)-a_i^{p+1}-b_i^{p+1})/2-1}],\end{aligned}$$

converge vers zéro, d'après le lemme (4.11), sauf si $d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1})=2$, pour tout i appartenant à I_1.

Or

$$\sum_{i\in I_1}((d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1}))/2-1)$$
$$=\sum_{i=1}^{l}(d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1}))/2-\operatorname{card} I_1$$
$$\leqq d_k+\tau_k-l,$$

car nous avons $\sum_{i=1}^{l} d(\alpha_i+\beta_i)\leqq 2d_k$, $\sum_{i=1}^{l}(a_i^{p+1}+b_i^{p+1})\geqq \operatorname{card} I_2$ et $\operatorname{card} I_2\leqq 2\tau_k$. Si bien que $\frac{1}{n^{d_k+\tau_k}} C_n^l \Delta_n$, qui est inférieur à $(1/l!)\ \Delta_n'$, converge vers zéro sauf si $d(\alpha_i+\beta_i)-(a_i^{p+1}+b_i^{p+1})=2$, $\forall i\in I_1$, $\sum_{i=1}^{l} d(\alpha_i+\beta_i)=2d_k$,

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i^{p+1}+b_i^{p+1})=\operatorname{card} I_2 \quad \text{et} \quad \operatorname{card} I_2=2\tau_k.$$

Autrement dit $\frac{1}{n^{d_k+\tau_k}} C_n^l \Delta_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_l;\beta_1,\ldots,\beta_l)$ converge vers zéro excepté si $(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$ et $(\beta_1,\ldots,\beta_l)$ appartiennent à $\mathcal{M}_2$.

Comme

$$\delta_k(n)=\sum_{l=0}^{d_k+\tau_k}\ \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\in\mathcal{M}_0-\mathcal{M}_2\\(\beta_1,\ldots,\beta_l)\in\mathcal{M}_0-\mathcal{M}_2}} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}\, C_{\beta_1,\ldots,\beta_l}\frac{1}{n^{d_k+\tau_k}} C_n^l \Delta_n,$$

la proposition (4.9) est démontrée.

Du lemme (4.10), il résulte aussi que l'on a

$$U_n(z_1\circ_\mu' z_2)=U_n(z_1)\circ_\mu' U_n(z_2) \qquad (z_1,z_2\in N\times\mathbb{R}).$$

Par suite, d'après la proposition (4.9), nous sommes amenés à étudier le comportement en loi de la v.a.

$$(R_n,1)=(Z_{1,n},1/n)\circ_\mu'\cdots\circ_\mu'(Z_{n,n},1/n),$$

où, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$,

$$(Z_{i,n},1/n)=U_n(\pi(T_n(Z_i),1)).$$

Désignons par $C_0(N\times\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini et par $C_K^r(N\times\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, l'espace des fonctions à support compact de classe C^r sur $N\times\mathbb{R}$.

Notons B_n l'opérateur défini sur $C_0(N\times\mathbb{R})$ par

$$B_n f(u,t)=\mathbb{E}[f((u,t)\circ_\mu'(Z_{1,n},1/n))].$$

Nous avons

$$B_n^n f(u,t)=\mathbb{E}[f((u,t)\circ_\mu'(R_n,1))];$$

en effet $(R_n, 1)$ est le produit, dans $(N \times \mathbb{R}, \circ'_\mu)$, de n variables aléatoires indépendantes ayant même loi que $(Z_{1,n}, 1/n)$.

Posons $A_n = n(B_n - I)$ et $T_t^{(n)} = \exp(tA_n)$, nous avons ([6]):

4.12 **Lemme.** *Pour tout f de $C_0(N \times R)$ tel que $\|A_n f\|_\infty = \sup_{u \in N} |A_n f(u)| < +\infty$, nous avons $\lim_n \|T_t^{(n)} f - B_n^{[nt]} f\|_\infty = 0$, où $[nt]$ désigne la partie entière du réel positif nt.*

Pour prouver le théorème (4.5), nous allons montrer que la suite de semi-groupes $T_t^{(n)}$ converge fortement vers un semi-groupe T_t. Pour cela nous montrons d'abord que la suite d'opérateur A_n converge vers un opérateur A, puis que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe T_t et enfin que $T_t^{(n)}$ converge fortement vers T_t.

4.13 **Lemme.** *Pour tout élément f de $C_K^2(N \times \mathbb{R})$, $A_n f$ converge uniformément vers Af, où $A = D_0 + \partial$.*

Preuve. Soient y et z deux éléments de $N \times \mathbb{R}$ et f un élément de $C_K^2(N \times \mathbb{R})$. D'après la formule de Taylor appliquée à la fonction réelle $g(t) = f(y \circ'_\mu tz)$, nous avons

$$f(y \circ'_\mu z) - f(y) = zf(y) + 1/2\, z^2 f(y \circ'_\mu \theta z) \qquad \text{avec } \theta \in]0, 1[,$$

où $zf(y) = \lim_{t \to 0} (f(y \circ'_\mu tz) - f(y))/t$.

Considérons la base $\{e_k\}_{1 \leqq k \leqq p+1}$ de l'algèbre de Lie $N \oplus \mathbb{R}\partial$ du groupe de Lie $(N \times \mathbb{R}, \circ'_\mu)$ et notons $(x_k\}_{1 \leqq k \leqq p+1}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base. Il vient

$$\begin{aligned} f(y \circ'_\mu z) - f(y) = &\sum_{i=1}^{p+1} x_i(z)\, e_i f(y) \\ &+ 1/2 \sum_{1 \leqq i, j \leqq p+1} x_i(z)\, x_j(z) [e_i(e_j f)](y \circ'_\mu \theta z). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A_n f(y) - Af(y) &= n\mathbb{E}[f(y \circ'_\mu (Z_{1,n}, 1/n)) - f(y)] - Af(y) \\ &= I_n(y) + J_n(y) + K_n(y) + L_n(y) \end{aligned}$$

avec

$$I_n(y) = \sum_{i=q_1+1}^{q_2} (n\mathbb{E}[x_i(Z_{1,n})] - \gamma_i)\, e_i f(y),$$

$$\begin{aligned} J_n(y) = 1/2 &\sum_{1 \leqq i \leqq q_2} \mathbb{E}[x_i(Z_{1,n}) [e_i(\partial f) + \partial(e_i f)](y \circ'_\mu \theta(Z_{1,n}, 1/n))] \\ &+ 1/2\, n\mathbb{E}[\partial^2 f(y \circ'_\mu \theta(Z_{1,n}, 1/n))]. \end{aligned}$$

$$K_n(y) = 1/2 \sum_{\substack{1 \leqq i, j \leqq q_2 \\ d_i + d_j > 2}} \mathbb{E}[f_n^{i,j}(y)]$$

et

$$L_n(y)=1/2 \sum_{1\leqq i,j\leqq q_1} (\mathbb{E}[f_n^{i,j}(y)]-\sigma_{i,j}[e_i(e_j f)](y))$$

en posant

$$f_n^{i,j}(y)=n\,x_i(Z_{1,n})\,x_j(Z_{1,n})[e_i(e_j f)](y\circ'_\mu \theta(Z_{1,n},1/n)).$$

[On notera que la v.a. $Z_{1,n}$ est centrée et à valeur dans $m^{1,0}\oplus m^{1,1}\oplus m^{2,0}$].

Puisque f appartient à $C_K^2(N\times R)$, il existe $M>0$ tel que $\|f\|_\infty$, $\|e_i f\|_\infty$ et $\|e_i(e_j f)\|_\infty$ soient inférieurs à M, pour tous $i,j\in\{1,\dots,p+1\}$. Nous avons alors:

$$\text{a)}\quad \|I_n\|_\infty \leqq M \sum_{i=q_1+1}^{q_2} |n\,\mathbb{E}[x_i(Z_{1,n})]-\gamma_i|$$
$$\leqq M \sum_{i=q_1+1}^{q_2} \int_N |x_i(u)|\,1_{\{|x_i|>\sqrt{n}\}}\,\lambda(du);$$

par suite, μ ayant un moment d'ordre 2, $\|I_n\|_\infty$ converge vers zéro quand n tend vers l'infini.

$$\text{b)}\quad \|J_n\|_\infty \leqq M \sum_{1\leqq i\leqq q_2} \mathbb{E}[|x_i(Z_{1,n})|]+M/2n$$
$$\leqq M \sum_{1\leqq i\leqq q_2} (\int_N |x_i(T_n^\mu(u))|\,\lambda(du))/n^{d_i/2}+M/2n;$$

pour $i\in\{1,\dots,q_2\}$ $\int_N |x_i(T_n^\mu(u))|\,\lambda(du)$ converge vers $\int_N |x_i(u)|\,\lambda(du)$ (lemme (4.11)); par suite $\|J_n\|_\infty$ converge vers zéro quand n tend vers l'infini.

c) Pour $i,j\in\{1,\dots,q_2\}$ tels que $d_i+d_j>2$, nous avons

$$|\mathbb{E}[f_n^{i,j}(y)]| \leqq M n\,\mathbb{E}[|x_i(Z_{1,n})\,x_j(Z_{1,n})|]$$
$$\leqq (M \int_N |x_i(T_n^\mu(u))\,x_j(T_n^\mu(u))|\,\lambda(du))/n^{(d_i+d_j)/2-1},$$

qui converge vers zéro, quand n tend vers l'infini, d'après le lemme (4.11). Par suite $\|K_n\|_\infty$ converge vers zéro.

d) Pour $i,j\in\{1,\dots,q_1\}$, nous avons

$$\mathbb{E}[f_n^{i,j}(y)]-\sigma_{i,j}[e_i(e_j f)](y)=\alpha_n(y)+\beta_n(y)+\gamma_n(y)+\delta_n(y)$$

avec

$$\alpha_n(y)=a_i(n)\,\mathbb{E}[x_j(Z_1)\,1_{\{|x_i(Z_1)|>\sqrt{n}\text{ et }|x_j(Z_1)|\leqq\sqrt{n}\}}$$
$$\cdot[e_i(e_j f)](y\circ'_\mu \theta(Z_{1,n},1/n))]$$

$$\beta_n(y)=a_j(n)\,\mathbb{E}[x_i(Z_1)\,1_{\{|x_i(Z_1)|\leqq\sqrt{n}\text{ et }|x_j(Z_1)|>\sqrt{n}\}}$$
$$\cdot[e_i(e_j f)](y\circ'_\mu \theta(Z_{1,n},1/n))]$$

$$\gamma_n(y)=a_i(n)\,a_j(n)\,\mathbb{E}[1_{\{|x_i(Z_1)|\text{ et }|x_j(Z_1)|>\sqrt{n}\}}$$
$$\cdot[e_i(e_j f)](y\circ'_\mu \theta(Z_{1,n},1/n))]$$

$$\delta_n(y)=\mathbb{E}(x_i(Z_1)\,x_j(Z_1)\,1_{\{|x_i(Z_1)|\text{ et }|x_j(Z_1)|\leqq\sqrt{n}\}}$$
$$\cdot[e_i(e_j f)](y\circ'_\mu \theta(Z_{1,n},1/n))]-\sigma_{i,j}[e_i(e_j f)](y).$$

En utilisant la définition des $a_i(n)$, $i \in \{1, \dots, q_1\}$, et l'inégalité de Schwarz, on voit facilement que $\|\alpha_n\|_\infty$, $\|\beta_n\|_\infty$ et $\|\gamma_n\|_\infty$ convergent vers zéro quand n tend vers l'infini.

D'autre part $\delta_n(y)$ s'écrit $\delta_n^1(y)+\delta_n^2(y)$ avec

$$\begin{aligned}\delta_n^1(y)=&\mathbb{E}\left[x_i(Z_1)\, x_j(Z_1)\, 1_{\{|x_i(Z_1)| \text{ et } |x_j(Z_1)| \leqq \sqrt{n}\}}\right.\\ &\left.\cdot([e_i(e_j f)](y \circ'_\mu \theta(Z_{1,n}, 1/n)) - [e_i(e_j f)](y))\right]\\ \delta_n^2(y)=&(\mathbb{E}[x_i(Z_1)\, x_j(Z_1)\, 1_{\{|x_i(Z_1)| \text{ et } |x_j(Z_1)| \leqq \sqrt{n}\}}] - \sigma_{i,j})\,[e_i(e_j f)](y).\end{aligned}$$

μ possèdant un moment d'ordre 2, d'après le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{E}[x_i(Z_1)\, x_j(Z_1)\, 1_{\{|x_i(Z_1)| \text{ et } |x_j(Z_1)| \leqq \sqrt{n}\}}]$$

converge vers $\sigma_{i,j}$; par suite $\|\delta_n^2\|_\infty$ converge vers zéro.

Soit $\varepsilon>0$ donné et désignons par $\|\ \|$ une norme sur l'e.v. de dimension finie $N \times \mathbb{R}$. La fonction $e_i(e_j f)$ étant continue à support compact, il existe $\alpha>0$ tel que pour tout élément z de $N \times \mathbb{R}$ vérifiant $\|z\| \leqq \alpha$, on ait

$$\sup_{y \in N \times \mathbb{R}} |[e_i(e_j f)](y \circ'_\mu z) - [e_i(e_j f)](y)| < \varepsilon.$$

Nous avons alors

$$\|\delta_n^1\|_\infty < \varepsilon\, \mathbb{E}[|x_i(Z_1)\, x_j(Z_1)|] + 2M\, \mathbb{E}[|x_i(Z_1)\, x_j(Z_1)|\, 1_{\{\|(Z_{1,n}, 1/n)\| > \alpha\}}],$$

qui montre, via le théorème de convergence dominée, que $\|\delta_n^1\|_\infty$ converge vers zéro quand n tend vers l'infini.

Le lemme (4.13) est prouvé.

4.14 **Lemme.** *L'opérateur A du lemme* (4.13) *est de la forme* $1/2 \sum_{j=1}^{q_1} x_j^2 + y$, *où* $\{x_1, \dots, x_{q_1}, y\}$ *est un système générateur de l'algèbre de Lie du groupe de Lie* $(N \times R, \circ'_\mu)$.

Preuve. μ étant apériodique, la matrice $(\sigma_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,q_1\}}$ est non dégénérée. En effet, si elle était dégénérée, il existerait des réels λ_i, $i \in \{1, \dots, q_1\}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i x_i(\,.\,) = 0\ \mu * \varepsilon_{(-\bar{X})}$-p.s., et μ serait portée par la classe de $\bar{X}$ modulo le sous-groupe fermé distingué

$$\left\{ v \in N : \sum_{i=1}^{q_1} \lambda_i x_i(v) = 0 \right\}.$$

Pour prouver le lemme, nous sommes donc amenés à montrer que

$$\left\{ e_1, \dots, e_{q_1}, \sum_{i=q_1+1}^{q_2} \gamma_i e_i + \partial \right\}$$

engendre l'algèbre de Lie $(N \oplus R\partial, [\ ,\ ]'_\mu)$; c'est-à-dire, puisque l'on a $[\partial, e_i]'_\mu = ad^\mu \bar{X}(e_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, que $\{e_1, \dots, e_{q_1}\}$ engendre l'algèbre de Lie $(N, [\ ,\ ]_\mu)$. On vérifie facilement cette propriété en utilisant la définition du crochet de Lie

$[\ ,\ ]_\mu$ et le fait que $\{e_1, \ldots, e_{q_1}\}$ engendre l'algèbre de Lie $(N, [\ ,\ ])$. Le lemme (4.14) est prouvé.

Du lemme (4.14) il résulte que l'opérateur $A = D_0 + \partial$ est hyperbolique au sens de [5]. D'après [5], nous savons alors que A est le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion $(\chi_t, \Omega, \ , (\mathbb{P}_{(u,s)})_{(u,s)\in N\times\mathbb{R}})$ sur $N\times\mathbb{R}$ tel que $\chi_t = (\chi'_t, s+t)$, $\mathbb{P}_{(u,s)}$-p.s. $\forall (u,s)\in N\times\mathbb{R}$. En outre si nous posons $\tilde{\chi}_t = \chi'_{t-s}$, $(\tilde{\chi}_t, \Omega, \ , \mathbb{P}_{(u,s)})$ est un processus de diffusion non homogène sur N dont le semi-groupe de transition $P_{s,t}$ définit par

$$P_{s,t}(u, B) = \mathbb{P}_{(u,s)}(\tilde{\chi}_t \in B), \qquad 0 \leqq s \leqq t,$$

satisfait à

$$(1) \quad P_{s,t} f(u) - f(u) = \int_s^t P_{s,\tau}[Af](u,\tau)\, d\tau, \qquad (f \in C^2_K(N)).$$

Or on vérifie facilement que l'on a

$$[v + s\partial] f(u,t) = [\operatorname{Exp} ad^\mu t \bar{X}(v)] f(u) \qquad (u, v \in N,\ s, t \in \mathbb{R},\ f \in C^2(N)).$$

Comme $A = D_0 + \partial$, il s'ensuit que l'on a

$$Af(u,t) = [\operatorname{Exp} ad^\mu t \bar{X}(D_0)] f(u) = D_t f(u) \qquad (f \in C^2(N),\ (u,t) \in N\times\mathbb{R});$$

et par suite (1) s'écrit

$$(1') \quad P_{s,t} f(u) - f(u) = \int_s^t [P_{s,\tau}(D_\tau f)](u)\, d\tau \qquad (f \in C^2_K(N));$$

ce qui montre que $(\chi_t, \Omega, \ , \mathbb{P}_{(u,s)})$ est un processus de diffusion non homogène sur N dont le générateur infinitésimal est D_t.

Appelons T_t le semi-groupe de transition associé au processus χ_t. A étant un champ analytique de vecteurs tangents invariant à gauche sur $(N\times\mathbb{R}, \circ'_\mu)$, T_t est invariant par $(N\times\mathbb{R}, \circ'_\mu)$ (i.e. $T_t(g\circ'_\mu x,\ g\circ'_\mu B) = T_t(x, B)$, $t\in\mathbb{R}$, $g, x \in N\times\mathbb{R}$, B borélien de $N\times\mathbb{R}$); autrement dit T_t est un semi-groupe de convolution. D'autre part A vérifie les hypothèses du théorème 3' de [5]; on voit alors facilement que d'après ce théorème il existe une fonction $h_t(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{N})$ telle que:

i) La famille de mesures de probabilités sur $(N, \circ'_\mu)$, $v_t = h_t(v)\, dv$, $t > 0$, où dv désigne une mesure de Haar sur $(N, \circ'_\mu)$, vérifie

$$v_{t+s} = v_t * \operatorname{Exp} ad^\mu t \bar{X}(v_s) \qquad (s, t > 0)$$

et

$$P_{s,t}(u, .) = \varepsilon_u * \operatorname{Exp} ad\, s \bar{X}(v_{t-s})(\,.\,) \qquad (0 \leqq s < t,\ u \in N).$$

ii) T_t est le semi-groupe de convolution associé à la famille de mesure $\{v_t \otimes \varepsilon_t,\ t > 0\}$, où ε_t désigne la mesure de dirac au point t.

4.15 **Lemme.** *Pour tout élément f de $C_0(N\times\mathbb{R})$, nous avons*

$$\lim_n \sup_{0\leqq s\leqq t} \|T_t^{(n)} f - T_s f\|_\infty = 0 \qquad \forall t \geqq 0.$$

Preuve. Il suffit de montrer le lemme pour des éléments f appartenant à un sous ensemble dense de $C_0(N \times \mathbb{R})$.

Soit $f \in C_K^2(N \times \mathbb{R})$; posons, pour $\lambda > 0$,

$$g_n = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T_s^{(n)} f \, ds \quad \text{et} \quad g = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T_s f \, ds.$$

Le domaine de l'opérateur A_n est $C_0(N \times \mathbb{R})$; celui de A contient $C_K^2(N \times \mathbb{R})$. D'après le théorème de Hille-Yosida (voir théorème (1.2) de ([6])) nous avons:

i) $(\lambda g_n - A_n g_n) = (\lambda g - A g) = f$

ii) $\lambda \|g - g_n\|_\infty \leqq \|(\lambda I - A_n)(g - g_n)\|_\infty$;

par suite

$$\lambda \|g - g_n\|_\infty \leqq \|Ag - A_n g\|_\infty \leqq 1/\lambda \, \|Af - A_n f\|_\infty,$$

et $\|g - g_n\|_\infty$ converge vers zéro d'après le lemme (4.13).

Posons

$$F_n(s) = T_s^{(n)} f - T_s f \qquad (n \in \mathbb{N}, \ s \geqq 0).$$

Pour tout entier n, F_n est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $C_0(N \times \mathbb{R})$ de classe C^1 vérifiant, $\|F_n(s)\|_\infty \leqq 2 \|f\|_\infty$ et $F_n'(s) = T_s^{(n)} A_n f - T_s A f$, pour tout $s \geqq 0$. Il s'ensuit que l'on a

$$\|F_n'(s)\|_\infty \leqq \|A_n f\|_\infty + \|Af\|_\infty;$$

et par suite (lemme (4.13))

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|F_n'(s)\|_\infty < +\infty.$$

D'après ce qui précède, la famille $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $C_0(N \times \mathbb{R})$ est bornée, équicontinue et vérifie

$$\lim_n \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} F_n(s) \, ds \right\|_\infty = 0 \qquad \forall \lambda > 0.$$

D'après le lemme (2.11) de ([6]) nous avons alors

$$\lim_n \sup_{0 \leqq s \leqq t} \|F_n(s)\|_\infty = 0 \qquad \forall t \geqq 0.$$

Le lemme (4.15) est donc prouvé.

Fin de la preuve du théorème (4.5). Il résulte des lemmes (4.12) et (4.15) que B_n^n converge fortement vers T_1; ce qui montre que R_n converge en loi vers ν_1 et le théorème (4.5) est démontré.

14.15 *Remarque.* Une autre méthode de démonstration du théorème est résumée dans ([7]). Au passage, on remarquera que dans cette note la définition de la suite graduée d'idéaux de N associée à μ est incorrecte.

14.16 *Remarque.* La loi limite obtenue, ν_1, dépend du choix de la base adaptée à la suite d'idéaux de N associée à μ, $\{e_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$. Soit $\{f_k\}_{1 \leqq k \leqq p}$ une autre base de N adaptée à cette suite. Nous avons:

$$e_k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{k,i} f_i \quad \text{avec } \lambda_{k,i} = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma^{-1}(k) \succ \sigma^{-1}(i) \quad \text{(voir (4.1))}.$$

Notons respectivement $U_n(S_n)$ et $U'_n(S_n)$ les normalisations de $S_n = X_1 \circ \cdots \circ X_n$ pour le premier et second choix. Désignons par Φ l'automorphisme d'espace vectoriel de N défini par

$$u = \sum_{i=1}^{p} x_i(u)\, e_i \mapsto \Phi(u) = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{\{j: \sigma^{-1}(j) = \sigma^{-1}(i)\}} \lambda_{i,j}\, x_j(u) \Big) f_i.$$

On voit facilement que l'on a

$$U'_n(S_n) = \Phi(U_n(S_n)) + W_n,$$

où W_n est une suite de v.a. convergeant en probabilité vers zéro.

Pour le nouveau choix la loi limite obtenue est donc $\Phi(\nu_1)$.

Bibliographie

1. Crepel, P., Raugi, A.: Théorème central limite sur les groupes nilpotents. C.R. Acad. Sci. Paris **281**, 605–608 (1975); Polycopie Université de Rennes (1975)
2. Guivarc'h, Y.: Loi des grands nombres sur les groupes. [A paraître]
3. Guivarc'h, Y.: Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France **101**, 333–379 (1973)
4. Hennion, H.: Théorème central limite et théorème central limite fonctionnel sur un groupe de Lie nilpotent. Séminaires de l'Université de Rennes (1975)
5. Ichihara, K., Kunita, H.: A classification of the second order degenerate elliptic opérators and its probabilistic characterization. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **30**, 235 (1974)
6. Kurtz, T.G.: Extensions of Trotter's operator semigroup approximation theorems. J. Functional Analysis **3**, 354–375 (1969)
7. Raugi, A.: Théorème de la limite centrale sur les groupes de Lie nilpotents. C.R. Acad. Sci. Paris **284**, 1187–1190 (1977)
8. Tutubalin, V.N.: Composition of measures on the simplest nilpotent group. Theor. Probability Appl. **9**, 479–487 (1964)
9. Virtser, A.D.: Limit theorems for composition of distribution on certain nilpotent Lie groups. Theor. Probability Appl. **19**, 667–687 (1974)

Reçu le 27. Octobre 1977