

Beziehungen zwischen der Sehnenlängenverteilung und der Verteilung des Abstandes zweier zufälliger Punkte im Eikörper

Frank Piefke

Institut B für Mathematik, Technische Universität Braunschweig,
Pockelsstr. 14 – Forum, D-3300 Braunschweig, Bundesrepublik Deutschland

X sei eine abgeschlossene beschränkte konvexe Punktmenge – kurz: Eikörper – im Euklidischen Raum R^n , $n=2, 3, \dots$; A sei die Oberfläche, V das Volumen des Eikörpers. G sei die Menge der zufälligen Geraden im R^n , μ das rotations- und translationsinvariante Geradenmaß (vgl.: Blaschke, 1935; Deltheil, 1926; Kingman, 1969; L.A. Santaló, 1976). Für jede meßbare Geradenmenge $H \subset G$ und jede aus Rotationen und Translationen zusammengesetzte Abbildung Ω des Raumes in sich gilt:

$$\mu(H) = \mu(\Omega H).$$

Eine Gerade $G \in G$ schneide X ; $\sigma(G) = \lambda_1(G \cap X)$ sei die Sehnenlänge (λ_k ist das k -dimensionale Lebesguemaß). Die Verteilungsfunktion der Sehnenlänge σ sei:

$$S(\sigma) = P(\sigma(G) \leq \sigma / G \cap X \neq \emptyset).$$

P_2 sei die Menge der zufälligen Punktepaare im R^n . $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in P_2$; \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 seien zwei gleichverteilte Punkte im Eikörper X ; die Verteilungsfunktion ihres Abstandes $\tau = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ sei:

$$T(\tau) = P(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \leq \tau / \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X).$$

Für den Fall der Ebene $n=2$ und des Raumes $n=3$ ist schon lange bekannt, daß die Momente der Verteilungen von σ und τ durch einfache Formeln miteinander verknüpft sind (vgl. Blaschke, 1955; E.P. Gečiauskas, 1967). Von Kingman (1969) wurde eine entsprechende Formel für allgemeines n gefunden – wir werden diese Formel am Ende dieser Arbeit angeben. Bei Gečiauskas (1968) findet man für den Fall $n=2$ eine Beziehung, die es gestattet, S aus T zu bestimmen. In der vorliegenden kurzen Notiz soll diese Formel auf beliebiges $n=2, 3, \dots$ verallgemeinert werden. Außerdem geben wir die Umkehrformel an.

Seien $s(\sigma) = dS(\sigma)/d\sigma$ und $t(\tau) = dT(\tau)/d\tau$ die entsprechenden Verteilungsdichten. Nach Hadwiger (1957), S. 232, Formel (103), gilt:

$$\mu(G; G \cap X \neq \emptyset) = \frac{A \pi^{\frac{n-1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \tag{1}$$

Wir formulieren unser Hauptergebnis:

Satz. *Es gilt:*

$$t(\tau) = B_n \tau^{n-1} \int_{\tau}^{\delta} (\sigma - \tau) s(\sigma) d\sigma \tag{2}$$

mit: $B_n = \frac{A \pi^{\frac{n-1}{2}}}{V^2 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, $n = 2, 3, \dots$ und $\delta = \max_{x_1, x_2 \in X} |x_1 - x_2|$.

Speziell ist: $B_2 = 2A/V^2$ (A ist hier der Umfang, V die Fläche des Eigebietes), $B_3 = A\pi/V^2$.

Beweis. Sei $\mathbf{H} = \{G; G \cap X \neq \emptyset\}$, $\mathbf{H}_1 = \{G; \sigma(G) > \tau\}$ und $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_1$. Ein Punktepaar $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{P}_2$ bestimmt fast sicher eine Gerade G . Wir beschreiben $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ mit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ durch ihre Verbindungsgerade G und durch die Abstände u_1 und u_2 der Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 von einem der beiden Durchstoßpunkte der Geraden G mit der Oberfläche des Eikörpers X (vgl. Abb. 1).

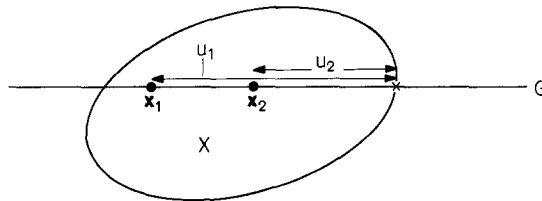


Abb. 1

Es gilt:

$$T(\tau) = \frac{1}{V^2} \lambda_{2n}((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2); |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \leq \tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X).$$

Sei: $B_G = \{(u_1, u_2); |u_1 - u_2| \leq \tau, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X\}$, B_G enthält also alle Parameterwerte, die Punktepaare auf G innerhalb von X mit einem Abstand kleiner oder gleich τ beschreiben. Dann folgt mit Hilfe eines Resultates von Kingman (1969), S. 664:

$$T(\tau) = \frac{1}{V^2} \int_{\mathbf{H}} \int_{B_G} |u_1 - u_2|^{n-1} du_1 du_2 d\mu(G).$$

(Für die Fälle $n = 2, 3$ vergleiche auch: Blaschke (1955), Varga (1935)).

Die inneren Integrale sind leicht auszuwerten.

a) Sei $G \in \mathbf{H}_1$, d.h. $\sigma(G) > \tau$; dann gilt (vgl. Abb. 2)

$$\begin{aligned} & \int_{B_G} |u_1 - u_2|^{n-1} du_1 du_2 \\ &= 2 \int_0^{\sigma-\tau} \int_{u_1}^{u_1+\tau} (u_2 - u_1)^{n-1} du_2 du_1 + 2 \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} \int_{u_1}^{\sigma} (u_2 - u_1)^{n-1} du_2 du_1 \\ &= \frac{2}{n} \tau^n \sigma - \frac{2}{n+1} \tau^{n+1} \end{aligned}$$

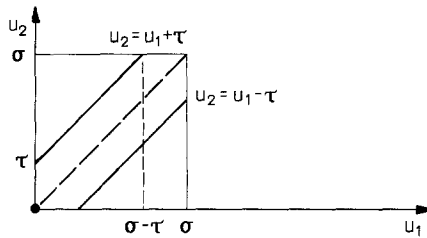


Abb. 2

b) Sei $G \in \mathbf{H}_2$, d.h. $\sigma(G) \leq \tau$; dann ist:

$$\begin{aligned} \int_{B_G} |u_1 - u_2|^{n-1} du_1 du_2 &= 2 \int_0^{\sigma} \int_{u_1}^{\sigma} (u_2 - u_1)^{n-1} du_2 du_1 \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sigma^{n+1}. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned} T(\tau) &= \frac{2}{V^2} \left\{ \int_{\mathbf{H}_1} \left(\frac{1}{n} \tau^n \sigma - \frac{1}{n+1} \tau^{n+1} \right) d\mu(G) + \int_{\mathbf{H}_2} \frac{1}{n(n+1)} \sigma^{n+1} d\mu(G) \right\} \\ &= \frac{A \pi^{\frac{n-1}{2}}}{V^2 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left\{ \int_{\tau}^{\delta} \left(\frac{1}{n} \tau^n \sigma - \frac{1}{n+1} \tau^{n+1} \right) dS(\sigma) + \frac{1}{n(n+1)} \int_0^{\tau} \sigma^{n+1} dS(\sigma) \right\}. \end{aligned}$$

Durch Differenzieren nach τ erhält man (2). w.z.b.w.

Ist S bekannt, so läßt sich T mit Hilfe des Satzes daraus berechnen. Umgekehrt kann T auch aus S berechnet werden.

Folgerung 1.

$$S(\tau) = 1 + \frac{1}{B_n} \frac{d}{d\tau} \frac{t(\tau)}{\tau^{n-1}}. \tag{3}$$

Diese Formel läßt sich aus (2) sofort herleiten.

Aus (2) folgt auch die am Anfang angesprochene Beziehung der Momente beider Verteilungen.

Folgerung 2.

$$\int_0^{\delta} \tau^k dT(\tau) = \frac{B_n}{(n+k)(n+k+1)} \int_0^{\delta} \sigma^{n+k+1} dS(\sigma) \quad (4)$$

$(k = -n+1, -n+2, \dots).$

Zum Abschluß dieser Arbeit betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel 1: Der Einheitswürfel. Wir betrachten den Einheitswürfel im dreidimensionalen Raum. Die Verteilungsdichte $s(\sigma)$ der Sehnenlänge ist (Coleman, 1969):

$$s(\sigma) = \frac{1}{3\pi} \begin{cases} 8 - 3\sigma & \text{für } 0 \leq \sigma \leq 1, \\ \frac{6\pi - 1}{\sigma^3} + 6\sigma - \frac{8}{\sigma^3} (2\sigma^2 + 1) \sqrt{\sigma^2 - 1} & \text{für } 1 < \sigma \leq \sqrt{2}, \\ \frac{6\pi - 5}{\sigma^3} - 3\sigma + \frac{8}{\sigma^3} (\sigma^2 + 1) \sqrt{\sigma^2 - 2} & \\ \quad - \frac{24}{\sigma^3} \arctan \sqrt{\sigma^2 - 2} & \text{für } \sqrt{2} < \sigma \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Wir wenden unseren Satz an, um die Verteilungsdichte $t(\tau)$ des Abstandes zweier Punkte zu berechnen. Nach einer längeren Auswertung elementarer Integrale erhält man¹:

$$\begin{aligned} t(\tau) &= 4\pi\tau^2 - 6\pi\tau^3 + 8\tau^4 - \tau^5 && \text{für } 0 \leq \tau \leq 1, \\ &= (6\pi - 1)\tau - 8\pi\tau^2 + 6\tau^3 + 2\tau^5 + 24\tau^3 \arccos \frac{1}{\tau} - 8\tau(2\tau^2 + 1) \sqrt{\tau^2 - 1} && \text{für } 1 \leq \tau \leq \sqrt{2}, \\ &= (6\pi - 5)\tau + 4\pi\tau^2 - 6(1 + \pi)\tau^3 - \tau^5 + 8\tau(\tau^2 + 1) \sqrt{\tau^2 - 2} - 24\tau A(\tau) && \text{für } \sqrt{2} \leq \tau \leq \sqrt{3}, \end{aligned}$$

mit:

$$A(\tau) = \arctan \sqrt{\tau^2 - 1} + 2\tau \arctan(\tau^2 - 1 - \tau \sqrt{\tau^2 - 2}) - \tau^2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 2}}.$$

In Abbildung 3 findet man eine graphische Darstellung der Dichte $t(\tau)$. $t(\tau)$ ist im Gegensatz zu $s(\sigma)$ stetig. Der Fall $\tau \geq \sqrt{2}$ ist nahezu unbedeutend, er hat nur die geringe Wahrscheinlichkeit von 0,000393... Die Wahrscheinlichkeit für den Fall $\tau \leq 1$ ist 0,9097... Der Erwartungswert von τ erweist sich zu 0,6617... .

Beispiel 2: Die Einheitshyperbel. Wir betrachten die Einheitskugel im n -dimensionalen Raum. In diesem Fall verwenden wir die Umkehrformel (3). Die Verteilungsdichte $t(\tau)$ ist (Hammersley, 1950):

¹ Den Fall $\tau \leq 1$ hat bereits E. Borel (1958), S. 91, behandelt; allerdings erweist sich der Koeffizient beim τ^5 als falsch

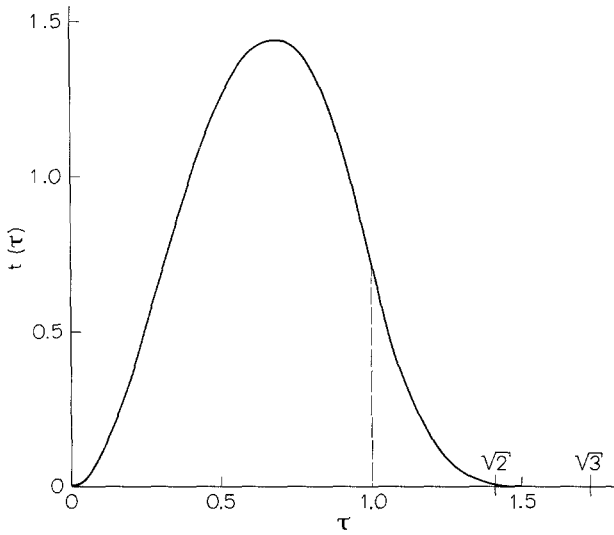


Abb. 3. Die Verteilungsdichte des Abstandes zweier zufälliger Punkte im Einheitswürfel

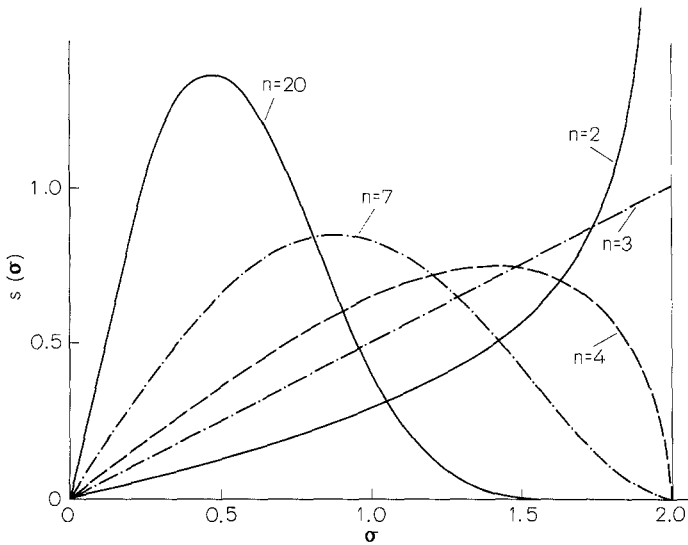


Abb. 4. Die Verteilungsdichte der Sehnenlänge der Einheitskugel

$$t(\tau) = \frac{n\tau^{n-1}}{B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{1-\frac{\tau^2}{4}} z^{\frac{n-1}{2}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Daraus folgt mit Hilfe von (3) nach kurzer Rechnung:

$$S(\sigma) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

In Abbildung 4 sind die Dichten $s(\sigma)$ für einige Fälle dargestellt.

Herrn Prof. Dr. G. Bach möchte ich für die tatkräftige Unterstützung, vor allem bei den umständlichen Berechnungen des 1. Beispiels, herzlich danken.

Literatur

- Blaschke, W.: Integralgeometrie 1. Paris: Hermann 1935
 Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955
 Borel, M.E.: Les Principes de la Théorie des Probabilités, Fascicule I. Paris: Gauthier-Villars 1958
 Coleman, R.: Random paths through convex bodies. J. Appl. Probab. **6**, 430–441 (1969)
 Deltheil, R.: Probabilités Géométriques. Paris: Gauthier-Villars 1926
 Gečiauskas, E.P.: The distribution function of the chord length of oval and ovaloid and its relation to distribution of a distance in an oval and ovaloid. Lietuvos Matematikos Rinkinys **7**, 409–412 (1967)
 Gečiauskas, E.P.: The method of integral geometry for finding the distribution of chord and distance in an oval. Lietuvos Matematikos Rinkinys **8**, 237–241 (1968)
 Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957
 Hammersley, J.M.: The distribution of distance in a hypersphere. Ann. Math. Statist. **21**, 447–452 (1950)
 Kingman, J.F.C.: Random secants of a convex body. J. Appl. Probab. **6**, 660–672 (1969)
 Santaló, L.A.: Integral geometry and geometric probability. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1976
 Varga, O.: Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum. Math. Z. **40**, 387–405 (1935)

Eingegangen am 19. April 1977