Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 22, 45–68 (1972)

Théorie des processus stochastiques généraux applications aux surmartingales

JEAN-FRANÇOIS MERTENS

Table des matières

Introduction

L'ensemble des surmartingales régulières qui majorent un processus donné admet un plus petit élément, qui s'exprime d'une façon analytique relativement simple à partir du processus (cfr. Snell [19] en temps discret, et Mertens [11] en temps continu). Nous avons appelé cette surmartingale «enveloppe de Snell» du processus, par opposition au concept analogue d'«enveloppe de Dirichlet», qui n'exige plus la régularité.

Ces deux notions d'enveloppe sont introduites au chapitre II de cette dissertation.

Elles vérifient le théorème d'arrêt et sont bien mesurables mais, en général, elles ne peuvent être choisies continues à droite.

Par conséquent, nous avons pris comme définition d'une surmartingale ces deux propriétés: le théorème d'arrêt pour les temps d'arrêt bornés, et la bien mesurabilité. Toute surmartingale continue à droite vérifie ces propriétés.

Dans le premier chapitre, nous étudions les trajectoires de ces surmartingales: comme celles ci ne sont pas toujours séparables, les théorèmes habituels ne s'appliquent pas. La clef de cette étude est fournie par un théorème qui ramène les diverses propriétés de continuité à droite ou à gauche de presque toutes les trajectoires d'un processus bien mesurable, à des propriétés de convergence de suites de variables arrêtées par des suites monotones de temps d'arrêt bornés.

Ce théorème repose essentiellement sur le théorème des capacités de Choquet, il a des applications à d'autres processus.

Comme les trajectoires possèdent toutes les bonnes propriétés de régularité auxquelles on s'attend, tous les théorèmes relatifs aux surmartingales continues à droite, y compris la décomposition de Doob, s'étendent aux surmartingales telles qu'elles sont définies ici.

Les chapitres suivants contiennent quelques exemples d'applications de ces majorations; dans le chapitre III, application aux processus stochastiques généraux et dans le chapitre IV, aux surmartingales.

Les propriétés étudiées dans ces deux chapitres sont liées au caractère borné ou faiblement compact dans $\mathbf{L}_1$ des variables arrêtées. Dans le troisième chapitre, nous étendons à un processus quelconque le théorème de Johnson et Helms [7], connu jusqu'ici dans le seul cas des surmartingales positives continues à droite; il s'y trouve également divers théorèmes sur les processus de classe D, et la définition de la classe D asymptotique.

Ce concept est appliqué au problème de la convergence p.s., des espérances conditionnelles, où nous étendons les résultats de Doob et Hunt. Enfin, nous étudions dans ce chapitre sous quelles conditions l'intégrabilité de toutes les variables arrêtées implique que l'ensemble de ces variables soit borné dans $\mathbf{L}_1$.

En ce qui concerne le quatrième chapitre, nous appliquons d'abord ce dernier résultat, d'une part à la partie positive d'une surmartingale, ce qui nous permet de préciser un résultat de Chow [2], et d'autre part, à sa partie négative et cela nous donne un théorème de convergence p.s. des surmartingales, théorème plus précis qu'un théorème de Chow [1], qui contient bien sûr le résultat classique de Doob. Nous introduisons ensuite les concepts duaux de surmartingales régulière et de surmartingale spéciale. Nous montrons comment toute surmartingale se décompose en une partie régulière et une partie spéciale, ce qui étend aux surmartingales la décomposition de Krickeberg [8] d'une martingale.

Nous étudions alors, au moyen de la décomposition de Riesz, les principales propriétés des surmartingales régulières et des surmartingales spéciales. Cette étude fournit des critères pour que la partie positive ou la partie négative d'une surmartingale converge dans $\mathbf{L}_1$. Juxtaposés, ils forment un critère de Chow pour qu'une surmartingale converge dans $\mathbf{L}_1$.

Enfin, nous énonçons un critère en termes d'espérances conditionnelles pour qu'une surmartingale soit spéciale. Dans le cas particulier des parties positives des surmartingales, cela donne une réciproque au théorème de convergence p.s. des espérances conditionnelles.

Le lecteur non intéressé par le temps continu peut sauter le chapitre I. Mais il n'est pas possible de se passer du deuxième chapitre; par ailleurs, il est préférable de connaître les résultats contenus dans le chapitre III avant d'aborder le chapitre IV, même si l'on désire ne prendre connaissance que de ses seuls énoncés.

Le lecteur trouvera tous les exemples en fin du troisième chapitre.

Terminologie et notations

Dans ce travail, nous utilisons la terminologie telle que dans [13], sauf indication du contraire. Nous faisons également usage de l'expression «règle d'arrêt» pour désigner un temps d'arrêt à valeurs finies. Quant à la définition des processus de classe DL, nous prions le lecteur de se référer à ([14], p. 137, VI D 17). Un processus est toujours supposé bien mesurable.

Les lettres majuscules R, S, T désignent des temps d'arrêt, tandis que les minuscules r, s, t désignent des instants — des points de $\mathbf{R}_+$. Par ailleurs, les lettres A, I, M, X, Y et Z désignent des processus. On trouve aussi dans ces pages la notation $(X_t), (Y_t)\dots$ pour les processus $X, Y\dots$.

L'ensemble des temps est la demi-droite réelle positive; $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathsf{P})$ sont fixés dans toute la suite et, d'habitude, sous-entendus. De même, nous utilisons la notation $\int_C X$ pour $\int_C X\, d\mathsf{P}$.

Chapitre I. Régularité des trajectoires d'un processus bien mesurable

Ce chapitre repose essentiellement sur des applications répétées du théorème des capacités de Choquet.

Le théorème 1 est un résultat technique valable pour tout processus bien mesurable; on donne ensuite des applications à divers processus concrets, principalement les surmartingales.

§ 1

T1. Théorème. *Soit Z un processus bien mesurable.*

a) *Alors Z est p.s. à trajectoires dépourvues de discontinuités oscillatoires à gauche (à droite) si et seulement si pour toute suite strictement croissante (décroissante) et uniformément bornée de règles d'arrêt S_n, on a $\lim_{n\to\infty} Z_{S_n}$ existe en probabilité.*

b) *Z est p.s. à trajectoires convergentes si et seulement si pour toute suite strictement croissante de règles d'arrêt bornées S_n telle que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to\infty} Z_{S_n}$ existe en probabilité.*

c) *Un processus adapté Z est p.s. à trajectoires continues à droite (à gauche) si et seulement si Z est bien mesurable (accessible) et si pour toute suite strictement décroissante (croissante) et uniformément bornée de règles d'arrêt S_n on a, en posant $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, $\lim_{n\to\infty} Z_{S_n} = Z_S$ en probabilité.*

Démonstration. (b) suit évidemment de (a).

Il suffit dans (a) et (c) de montrer que la condition est suffisante (par [13], p. 201, 203).

Commençons par (a).

$\mathscr{I}'$ désigne la pavage constitué par les intervalles stochastiques $[S, T]$, S accessible. $\mathscr{T}(\mathscr{I}')$ est la tribu engendrée par $\mathscr{I}'$, et $\mathscr{A}(\mathscr{I}')$ sont les ensembles I'-analytiques. On a $\mathscr{T}(\mathscr{I}') \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{I}')$.

Soit $D_{a,b} = \{(\omega, t) \mid \limsup_{s \underset{\to}{\leq} t} Z_s(\omega) > b, \liminf_{s \underset{\to}{\leq} t} Z_s(\omega) < a\}$.

Il suffit que nous montrions que $\forall_{a,b}$ rationnels, $a<b$, la projection sur Ω de $D_{a,b}$ est de mesure nulle. Montrons que $D_{a,b} \in \mathscr{A}(\mathscr{I}')$. Les notations seront simplifiées en supposant que l'ensemble des temps T est la droite réelle toute entière.

Soit $Z': \Omega \times T \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $Z'(\omega, t, h) = Z(\omega, t-h)$.

Alors Z' est mesurable pour $\mathscr{T}(\mathscr{I}') \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}_+^*)$.

Par un argument de classe monotone, il suffit de le vérifier pour Z de la forme $I(]\leftarrow, T[)$. On est donc ramené à vérifier la mesurabilité $(\mathscr{T}(\mathscr{I}') \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}_+^*))$ de $E = \{(\omega, t, h) | t-h < T(\omega)\}$ pour tout temps d'arrêt T.

$\forall r \in \mathbf{Q}$, $r>0$, $A_r = \{(\omega, t, h) | r<h, t-r<T(\omega)\}$.

Evidemment $A_r \in \mathscr{T}(\mathscr{I}') \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}_+^*)$, et $E = \bigcup\limits_{r \in \mathbf{Q}} A_r$.

Donc la partie A de $\Omega \times T \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ située sous le graphe de Z' est $\mathscr{T}(\mathscr{I}') \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}_+^*) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$ mesurable.

Soit $A_{\varepsilon,\lambda} = A \cap \{h<\varepsilon\} \cap \{Z>\lambda\}$, et $A'_{\varepsilon,\lambda}$ la projection de $A_{\varepsilon,\lambda}$ sur $\Omega \times T$. Alors, par le théorème de projection, $A'_{\varepsilon,\lambda}$ est $\mathscr{T}(\mathscr{I}')$-analytique ([14], III T 9), et donc, par ([14], VIII T 18), $A'_{\varepsilon,\lambda} \in \mathscr{A}(\mathscr{I}')$.

Or, $A'_{\varepsilon,\lambda} = \{(\omega, t) | \sup\limits_{t-\varepsilon<s<t} Z_s(\omega) > \lambda\}$. Par une application répétée de ([14], III T 8) on conclut alors que

$$\{(\omega, t) | \limsup_{s \underset{\to}{<} t} Z_s(\omega) > \lambda\} \in \mathscr{A}(\mathscr{I}').$$

Donc, $D_{a,b} \in \mathscr{A}(\mathscr{I}')$.

Une extension immédiate de ([13], p. 206) suivie d'une application de ([15], proposition 1) montre alors qu'il existe un temps d'arrêt prévisible T, qu'on peut évidemment supposer borné, tel que, si la projection sur Ω de $D_{a,b}$ est de mesure strictement positive, alors T est à valeurs dans $D_{a,b}$ avec une probabilité strictement positive.

Soit alors T_n une suite strictement croissante de temps d'arrêt tels que $T_n \to T$ p.s.

Posons $F = \{\omega | (\omega, T(\omega)) \in D_{a,b}\}$ et $\pi = \mathsf{P}(F)$. On a $\pi > 0$.

Posons encore $S_0 = S'_0 = S''_0 = 0$.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \inf\{t | Z(\omega, t) < a;\, t > S''_{2n-1}\} \wedge T \\ S_{2n+1} &= \inf\{t | Z(\omega, t) > b;\, t > S''_{2n}\} \wedge T \\ S'_n(\omega) &= \inf\{T_k(\omega) | T_k(\omega) > S_n(\omega)\} \wedge T \\ S''_n(\omega) &= \inf\{T_k(\omega) | T_k(\omega) > S'_n(\omega)\} \wedge T. \end{aligned}$$

Soit $A = \{(\omega, t) | Z(\omega, t) < a\}$, $B = \{(\omega, t) | Z(\omega, t) > b\}$. A et B sont bien mesurables. Soient $A_{2n} = A \cap [S_{2n}, S'_{2n}[$, $A_{2n+1} = B \cap [S_{2n+1}, S'_{2n+1}[$. La projection sur Ω de A_n contient F. Par ([13], p. 205), il existe un temps d'arrêt R'_n tel que $R'_n(\omega) < +\infty \Rightarrow (\omega, R'_n(\omega)) \in A_n$ et $\mathsf{P}(R'_n < +\infty) > \pi_n - 3^{-n}.\ \pi$, en notant $S_n = \text{proj.}\,(A_n)$ et $\pi_n = \mathsf{P}(S_n)$. Alors $\mathsf{P}(F \cap \{\forall n, R'_n < +\infty\}) > \frac{1}{2}\pi$.

Posons $R''_n = R'_n \wedge S'_n$, et de plus soit $C = \{\omega | \forall n\ Z_{R''_{2n}}(\omega) < a$ et $Z_{R''_{2n+1}}(\omega) > b\}$: on a $\mathsf{P}(C) > \frac{1}{2}\pi$.

Posons encore $R'''_n = R''_n$ sur $\{R''_n < T\}$, $R'''_n = T + \dfrac{n-1}{n}$ sur $\{R''_n = T\}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty} R'''_n$; et enfin $R_1 = R'''_1$, $R_n(\omega) = \inf\{R'''_k(\omega) | R'''_k(\omega) > R_{n-1}(\omega)\}$. Les R_n forment une suite strictement croissante et uniformément bornée de temps d'arrêt telle que, sur C, $Z_{R_{2n}}<a$ et $Z_{R_{2n+1}}>b$, ce qui est impossible.

Pour la démonstration de (b), on obtiendrait ainsi une suite croissante de temps d'arrêt R_n convergeant vers $+\infty$, et il resterait à borner chaque R_n par une constante suffisamment grande; c'est élémentaire.

Nous passons donc à la démonstration relative aux discontinuités oscillatoires à droite.

Posons de nouveau $D_{a,b}=\{(\omega,t)\,|\,\limsup_{s>t} Z_s(\omega)>b, \liminf_{s>t} Z_s(\omega)<a\}$, et posons $T(\omega)=\inf\{t\,|\,(\omega,t)\in D_{a,b}\}$.

Il suffit de nouveau que nous montrions que $\mathsf{P}^*(\{T<+\infty\})=0$. Nous allons commencer par montrer que T est un temps d'arrêt. Fixons $\varepsilon>0$; soit $\mathscr{I}'_\varepsilon$ les intervalles stochastiques accessibles pour la famille de tribus $(\mathscr{F}_{t+\varepsilon})$.

Nous allons montrer que $D_{a,b}\in\mathscr{A}(\mathscr{I}'_\varepsilon)$.

Pour cela, on construit $Z'\colon \Omega\times T\times\,]0,\varepsilon[\,\to\mathbf{R}$, $Z'(\omega,t,h)=Z(\omega,t+h)$. On démontre de même qu'avant que $Z'\in\mathscr{T}(\mathscr{I}'_\varepsilon)\otimes\mathscr{B}([0,\varepsilon[)$, et toute la démonstration de l'analyticité de $D_{a,b}$ se poursuit alors de même.

Il suit alors d'une extension immédiate de ([13], p. 9) que T est un temps d'arrêt pour la famille $(\mathscr{F}_{t+\varepsilon})$, et donc, par la continuité à droite des tribus, un temps d'arrêt pour $(\mathscr{F}_t)$.

Soit $F=\{T<+\infty\}$ et supposons $\pi=\mathsf{P}(F)>0$. Soient $B=\{(\omega,t)\,|\,Z_t(\omega)>b\}$, $A=\{(\omega,t)\,|\,Z_t(\omega)<a\}$,

$$T_0=T+1,\qquad A_{2n}=A\cap\left]T,\left(T+\frac{1}{2n}\right)\wedge T_{2n-1}\right[$$

$$A_{2n+1}=B\cap\left]T,\left(T+\frac{1}{2n+1}\right)\wedge T_{2n}\right[.$$

Les A_n sont bien mesurables et leur projection sur Ω est égale à F, à condition que nous définissions les T_n comme des temps d'arrêt tels que $T(\omega)<+\infty\Rightarrow T(\omega)<T_n(\omega)$.

Par ([13], p. 205), il existe des temps d'arrêt T'_n tels que $\mathsf{P}(T'_n<+\infty)>\pi(1-3^n)$, $T'_n<+\infty\Rightarrow(\omega,T'_n(\omega))\in A_n$. On pose $T_n=T'_n\wedge\left(T+\dfrac{1}{n}\right)\wedge T_{n-1}$.

Alors $\exists k$: $\mathsf{P}(T+1<k)>\frac{3}{4}\pi$. Posons $T''=T\wedge k$, $T''_n=T_n\wedge k$.

Soit $C=\{\forall n, (\omega,T_{2n}(\omega))\in A$ et $(\omega,T_{2n+1}(\omega))\in B\}\cap\{T+1<k\}$.

On a $\mathsf{P}(C)>\frac{1}{4}\pi>0$.

Posons $R_n=T''_n$ sur $\{\forall p,q,p\geqq n,q\geqq n,p\neq q\colon T''_p\neq T''_q\}$, et $R_n=k+\dfrac{n-1}{n}$ ailleurs.

Alors les R_n nous donnent la contradiction.

Reste à démontrer (c).

Les conditions imposées impliquent déjà que Z est p.s. dépourvu de discontinuités oscillatoires à droite (à gauche). Par conséquent, si

$$X(\omega,t)=\lim_{s\underset{\to}{\geq}t} Z(\omega,s)\big(X(\omega,t)=\lim_{s\underset{\to}{\leq}t} Z(\omega,s)\big),$$

alors X est bien défini et est bien mesurable (accessible).

Soit $D_{a,b}=\{X>b,\ Z<a\}$. Supposons la projection de $D_{a,b}$ de mesure positive. Comme $D_{a,b}$ est bien mesurable (accessible), il existe par ([13], pp. 205, 206) un temps d'arrêt T (accessible) tel que $T(\omega)<+\infty \Rightarrow (\omega, T(\omega))\in D_{a,b}$ et $\mathsf{P}(T<\infty)>0$. Comme précédemment, on se ramène au cas où T est borné (et limite d'une suite strictement croissante T_n de temps d'arrêt) – pour la continuité à droite, on pose $T_n=T+\frac{1}{n}$. Alors la suite (T_n) et T fournissent la contradiction.

Remarques. 1) Le théorème s'étend évidemment aux processus à valeurs dans un espace lusinien métrisable.

2) On peut remplacer partout la convergence en probabilité par la convergence des espérances mathématiques – à condition de considérer toutes les suites monotones de règles d'arrêt, et non plus seulement les suites strictement monotones. Pour (a) et (c), il faut ajouter la condition que toutes les variables Z_T – T règle d'arrêt bornée – soient intégrables; pour (b), que $(\limsup Z)^-$ et $(\liminf Z)^+$ soient intégrables.

Cependant, en ce cas il y a des résultats supplémentaires de compacité des variables arrêtées.

3) Lorsque le processus est accessible – resp. prévisible – on peut évidemment supposer tous les temps d'arrêt accessibles – resp. prévisibles.

4) On peut aussi démontrer l'assertion analogue à (c) obtenue en y remplaçant la continuité par une semi-continuité.

Applications. 1) *Processus de Markov.*

Dans l'axiomatique des processus de Markov (cfr. [16]), le théorème permet de simplifier la démonstration de ce que la propriété de Markov forte implique que les fonctions excessives sont presque boréliennes et continues à droite sur les trajectoires ($A2 \Rightarrow A3$) et de ce que l'axiome de Blumenthal entraîne la continuité à gauche des potentiels sur les trajectoires, et que celles-ci sont p.s. réglées ($A4 \Rightarrow A5$).

2) *Théorie générale des processus:* cfr. p.

3) *Théorie des martingales.*

En plus de l'application qui va suivre et qui est à la base de tout ce travail, nous donnerons encore une application importante à la fin de ce chapitre.

On sait que toute surmartingale continue à droite vérifie la définition suivante, et c'est quasi exclusivement cette catégorie-là de surmartingales qui a été étudiée jusqu'ici.

Nous aurons besoin de l'extension suivante de la notion de surmartingale pour l'important théorème d'existence du chapitre II. Nous verrons qu'on ne perd aucun résultat dans cette extension.

Définition. Nous appellerons surmartingale un processus bien mesurable X tel que pour tous temps d'arrêt S et T bornés, $S\leqq T$, on ait:

1) $X_S^-\in L_1$
2) $X_S\geqq E(X_T\,|\,\mathscr{F}_S)$ p.s.

Remarque. On pourrait remplacer la condition 2) par $E(X_S)\geqq E(X_T)$.

T2. Théorème. *Presque toutes les trajectoires d'une surmartingale sont des fonctions réglées semi-continues supérieurement à droite.*

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du théorème 1 et des théorèmes classiques de convergence des surmartingales en temps discret.

Corollaire. *Tous les résultats classiques pour les surmartingales continues à droite s'étendent à ce cas-ci, compte tenu des modifications évidentes. Pour ces résultats, cfr. par exemple* ([14], V, VI).

Le concept correspondant de sousmartingale est évident. Il faut remarquer que la notion correspondante de martingale coïncide, par T2, avec la notion classiques de martingale continue à droite.

Nous allons maintenant préciser (T2) en obtenant un théorème de décomposition.

§ 2. Décomposition de Doob des surmartingales

Nous démontrons ici, sans l'hypothèse de continuité à droite, les théorèmes d'existence et d'unicité de la décomposition de Doob, donnés par Meyer [11] pour des surmartingales continues à droite. La démonstration se fait en se ramenant au cas continu à droite, au moyen du théorème 2.

La notion de processus naturel s'est avérée inutilisable dans ce cadre plus général; c'est le concept de processus prévisible qui s'est révélé approprié.

Nous appellerons processus croissant tout processus $A(\omega, t)$ tel que $\forall\omega, A(\omega, .)$ est une fonction croissante, $A(\omega, 0)=0$ et $A(., t)$ est intégrable.

Rappelons qu'en vertu de (T2), si X_t est une surmartingale, les processus X_{t+} et X_{t-} sont bien définis, on a $X_{t+} \leqq X_t$ et les trois processus X_{t+}, X_t et X_{t-} ont en chaque point les mêmes limites à gauche et à droite.

Lemme. a) *Soit X une surmartingale, $X_0 \in \mathbf{L}_1$. Alors il existe une surmartingale continue à droite X' et un processus croissant continu à gauche $I(\omega, t)$ tel que:*

$$I(\omega, t)=\sum_{s<t}\left(X_s(\omega)-X_{s+}(\omega)\right)$$

$$X'=X+I.$$

b) *Il existe une suite de temps d'arrêt T_n et une suite de nombres strictement positifs λ_n tels que*

$$I(\omega, t)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n I(]T_n, \rightarrow[).$$

En particulier, X est limite d'une suite décroissante de surmartingales continues à droite.

Démonstration. Posons

$$T_1^1=\inf\{t \mid X_t \geqq X_{t+}+1\}, \qquad T_1^n=\inf\{t \mid X_t \geqq X_{t+}+1, t>T_1^{n-1}(\omega)\}.$$

On a $T_1^n(\omega)<+\infty \Rightarrow T_1^n(\omega)<T_1^{n+1}(\omega)$, et $\lim T_1^n=+\infty$. De plus $X_{T_1^n} \geqq X_{T_1^n+}+1$.

Posons

$$A_1^n(\omega, t)=\left(X_{T_1^n}(\omega)-X_{T_1^n+}(\omega)\right) \cdot I(]T_1^n, \rightarrow[),$$

et

$$A_1(\omega, t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_1^n(\omega, t).$$

Soit t fixé.

Nous allons montrer que $E(A_1(\omega,t)) \leqq E(X_0 - X_t)$.

Par le lemme de Fatou, on a:

$$E(A_1(\omega,t)) = \lim_{k\to\infty} E\left[\sum_1^k (X_{T_1^n} - X_{T_1^n+}) \cdot I(T_1^n < t)\right].$$

Or, par le théorème d'arrêt

$$E\left[\sum_1^k (X_{T_1^n} - X_{T_1^n+}) \cdot I(T_1^n < t)\right] \leqq E(X_0 - X_t),$$

ce qui passe à la limite.

Il suit que A_1 est un processus croissant continu à gauche. On montre alors que $X + A_1$ est encore une surmartingale; A_1 étant continu à gauche, $X + A_1$ est bien mesurable et donc il suffit de vérifier l'inégalité de surmartingale.

On vérifie celle-ci pour tout processus $X + \sum_1^k A_1^n$, le résultat en découlera par un passage à la limite. Cette démonstration se fait alors par induction sur k, de sorte que l'on se ramène à vérifier l'inégalité de surmartingale pour $X + A_1^1$.

Soient donc S et T deux temps d'arrêt, $S \leqq T \leqq t$. Sur $\{S > T_1^1\}$ et sur $\{S = T\}$, la proposition est immédiate.

On est donc ramené à $S \leqq T_1^1$ et $S \leqq T$.

Posons $S_0 = S$, $S_1 = T_1^1 \wedge T$, $S_2 = T$.

On a immédiatement $E[(X + A_1^1)_{S_1} | \mathscr{F}_{S_0}] \leqq (X + A_1^1)_{S_0}$, et donc on se ramène au cas où $S = S_1$, $T = S_2$.

On peut encore éliminer le cas $S_1 = T = S_2$, et donc on est réduit au cas $S = T_1^1 < T$.

Alors
$$(X + A_1^1)_{T_1^1} = X_{T_1^1}; \quad (X + A_1^1)_T = X_T + X_{T_1^1} - X_{T_1^1+}.$$

Comme $X_{T_1^1+} \geqq E(X_T | \mathscr{F}_{T_1^1})$, la relation cherchée suit.

Donc $(X + A_1)$ est encore une surmartingale, qui n'a plus de discontinuités à droite que d'amplitude < 1.

Avec $(X + A_1)$, on peut alors de même construire une suite de temps d'arrêt T_2^n, qui porte toutes les discontinuités à droite d'amplitude $\geqq \frac{1}{2}$ de $(X + A_1)$, puis un processus croissant continu à gauche A_2 et une surmartingale $X + A_1 + A_2$.

Ainsi on construit inductivement une suite A_n de processus croissants continus à gauche et prévisibles tels que $\forall k$, $X + \sum_1^k A_n$, soit une surmartingale, qui n'a plus de discontinuités à droite que d'amplitude $< \dfrac{1}{k}$.

De plus $E\left(\sum_1^k A_n(\omega,t)\right) \leqq E(X_0 - X_t)$.

Il suit que si $I(\omega,t) = \sum_1^\infty A_n(\omega,t)$, alors

- p.s. $\forall t$, $I(\omega,t) < +\infty$.
- I est un processus croissant prévisible, continu à gauche.
- $I(\omega,t) = \sum_{s<t} (X_s(\omega) - X_{s+}(\omega))$.

$X+I$ est une surmartingale, par un passage à la limite élémentaire.

Le fait que p.s. $X+\sum_1^k A_n$ n'a pas de discontinuités à droite d'amplitude $>\frac{1}{k}$, implique que p.s. les trajectoires de $X+I$ sont semi-continues inférieurement à droite. Le fait que $X+I$ est une surmartingale et le théorème 2 impliquent alors que p.s. les trajectoires de $X+I$ sont continues à droite.

La démonstration de (a) est terminée; passons à celle de (b).

Comme $I=\sum_{n,k} A_n^k$, il suffit de démontrer le premier point de (b) pour I du type: $Y(\omega)\cdot I(]T,\to[)$, où T est un temps d'arrêt et Y une v.a.r. positive $\mathscr{F}_T$-mesurable, ce qui est un exercice tout-à-fait élémentaire.

Donc

$$I=\sum_1^\infty \lambda_n I(]T_n,\to[).$$

Soit

$$I_{n,k}(\omega,t)=0 \quad \text{pour} \quad t\leqq T_n(\omega)$$

$$I_{n,k}(\omega,t)=k\big(t-T_n(\omega)\big)\,\lambda_n \quad \text{pour} \quad T_n(\omega)\leqq t\leqq T_n(\omega)+\frac{1}{k}.$$

$$I_{n,k}(\omega,t)=\lambda_n \quad \text{pour} \quad t\geqq T_n(\omega)+\frac{1}{k}.$$

Alors, si $X^n=X+I-\sum_{k\leqq n} I_{k,n}(\omega,t)$, les X^n forment une suite décroissante de surmartingales continues à droite qui converge vers X.

La démonstration est achevée.

T3. Théorème (Décomposition de Doob). *Pour qu'une surmartingale X se décompose suivant $X=M-A$, où M est une martingale et A un processus croissant, il faut et suffit que X soit de classe DL. Il existe alors une telle décomposition où de plus A est prévisible, et cette décomposition est unique.*

Démonstration. 1) Existence. Par le lemme, on a $X=X'-I$, où X' est une surmartingale continue à droite de classe DL et I un processus croissant prévisible. Par ([14], VII T 31), on a alors $X'=M-A'$, où M est une martingale et A' un processus croissant naturel.

Par ([13], p. 312(b)), A' est un processus croissant prévisible, et donc $A=A'+I$ en est encore un. D'où l'existence.

2) Unicité. Soit $X=M-A=M'-A'$.

Alors $X+I=M-(A-I)=M'-(A'-I)$ (cfr. lemme), et $X+I$ est une surmartingale continue à droite de classe DL, et $(A-I)$ et $(A'-I)$ sont des processus croissants prévisibles continus à droite (car M et M' sont continus à droite). Donc, par ([13], p. 312(b)), $(A-I)$ et $(A'-I)$ sont des processus croissants naturels, d'où, par ([14], VII T 31), $A-I=A'-I$, donc $M=M'$ et $A=A'$.

Remarque. On peut évidemment procéder de façon analogue pour la décomposition multiplicative.

Potentiels Réguliers. Voici encore une application, importante, de T 1. Ce théorème est établi, péniblement, dans ([14], p. 161 – 166), pour des surmartingales continues à droite. Nous continuons avec nos notations antérieures.

Théorème. *Soit $X_t = M_t - A_t$. Pour que A_t soit continu à gauche, il faut et il suffit que, pour toute suite strictement croissante et uniformément bornée de règles d'arrêt T_n, telle que $T = \lim T_n$, on ait $E(X_T) = \lim E(X_{T_n})$.*

Démonstration. Evidemment, toute martingale satisfait à l'énoncé. Donc $E(A_T) = \lim E(A_{T_n})$. Comme A est croissant, on conclut que $A_{T_n} \to A_T$ p.s. Donc, par (T 1), A est continu à gauche – étant évidemment accessible.

Chapitre II. Le problème de l'arrêt optimal

Ce chapitre est un fourre-tout. On y trouvera une série de résultats sur l'arrêt optimal que nous avions en général déjà obtenus antérieurement dans notre mémoire de licence, et dont nous aurons besoin dans la suite. On y trouvera, entre autres, l'important théorème d'existence d'une enveloppe de Snell, qui est crucial pour la suite.

Définition. On appelle régulière une surmartingale telle que

$$\forall S, T\colon \mathsf{P}\{S \leqq T < +\infty\} = 1 \Rightarrow X_S \geqq E(X_T \mid \mathscr{F}_S).$$

T 4. Théorème. 1) *Soit Z un processus bien mesurable tel que*

$$\forall S, \exists T, S \leqq T < +\infty\colon Z_T^- \in \mathbf{L}_1.$$

Alors l'ensemble des surmartingales régulières qui majorent Z a un plus petit élément, soit X, que nous appellerons l'enveloppe de Snell de Z.

2) *Soit Z un processus bien mesurable tel que $\forall S$, S borné, il existe T, $T \geqq S$, T borné, tel que $Z_T^- \in \mathbf{L}_1$.*

Alors l'ensemble des surmartingales qui majorent Z a un plus petit élément, soit X', que nous appellerons l'enveloppe de Dirichlet de Z.

S et T désignant des règles d'arrêt, on a $\forall T$ et $\forall \mathscr{G}$, $\mathscr{G}$ sous tribu de $\mathscr{F}_T$:

$$E(X_T \mid \mathscr{G}) = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T} E(Z_S \mid \mathscr{G})$$

$$E(X_{T+} \mid \mathscr{G}) = \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{S \geqq T \\ \mathsf{P}(S=T)=0}} E(Z_S \mid \mathscr{G}).$$

en supposant S et T à valeurs finies. On a les mêmes formules pour X', en supposant S et T bornés.

Démonstration. Nous ferons la démonstration seulement pour l'enveloppe de Snell.

Remarquons que pour $\forall T$, $\{E(Z_S \mid \mathscr{F}_T) \mid S \geqq T\}$ et $\{E(Z_S \mid \mathscr{F}_T) \mid S \gg T\}$ sont filtrants croissants. Donc (Neveu, II 4-1), $\forall T$ il existe une suite $\{S_i \mid i \in \mathbf{N}, S_i \geqq T\}$ telle que la suite des $E(Z_{S_i} \mid \mathscr{F}_T)$ soit croissante et $\lim E(Z_{S_i} \mid \mathscr{F}_T) = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T} E(Z_S \mid \mathscr{F}_T)$.

On peut de plus supposer $Z_{S_i}^- \in \mathbf{L}_1$.

Il en est de même pour $(\ll)$.

Posons $\forall T$, ${}_T X = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T} E(Z_S \mid \mathscr{F}_T)$; on a ${}_T X^- \in \mathbf{L}_1$.

Soit $T_1 \leqq T_2$, alors ${}_{T_2}X = \lim_{i\to\infty} E(Z_{S_i^2} | \mathscr{F}_{T_2})$, donc (Fatou):

$$E({}_{T_2}X | \mathscr{F}_{T_1}) = \lim_{i\to\infty} E(Z_{S_i^2} | \mathscr{F}_{T_1}) \leqq \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T_1} E(Z_S | \mathscr{F}_{T_1}) = {}_{T_1}X.$$

Posons $\forall t$, $Y_t = {}_tX$. Nous venons de montrer que Y_t est une surmartingale au sens habituel, et qu'elle est régulière pour les règles d'arrêt à valeurs discrètes – on voit en effet facilement que, si T est à valeurs discrètes, alors $Y_T = {}_TX$.

Désignons par Y' la régularisée à droite de (Y_t). Y' est une surmartingale continue à droite. De plus, comme (Y_t) est régulière pour les règles d'arrêt à valeurs discrètes, Y' est régulière, par la démonstration de ([14], VI 4). Enfin, le fait que $T_1 \leqq T_2 \Rightarrow {}_{T_1}X \geqq E({}_{T_2}X | \mathscr{F}_{T_1})$ implique, par un argument basé sur ([14], V 21) et un passage à la limite facile, que $\forall T$, ${}_TX \underset{\text{p.s.}}{\geqq} Y'_T \underset{\text{p.s.}}{\geqq} E({}_SX | \mathscr{F}_T) \forall S \gg T$.

Il en découle aisément que si on pose $X = Y' \vee Z$, alors $\forall T$, $X_T \underset{\text{p.s.}}{=} {}_TX$; d'autre part X est évidemment bien mesurable, de sorte que X est une surmartingale régulière telle que $\forall T$, $X_T = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T} E(Z_S | \mathscr{F}_T)$. Comme de plus X majore évidemment Z, on conclut que X est la plus petite surmartingale régulière qui majore Z.

Soit $\mathscr{G}$ une soustribu de $\mathscr{F}_T$. On a évidemment

$$E(X_T | \mathscr{G}) \geqq \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T} E(Z_S | \mathscr{G}).$$

D'autre part le lemme de Fatou et

$$X_T = \lim_{n\to\infty} E(Z_{S_n} | \mathscr{F}_T)$$

impliquent

$$E(X_T | \mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} E(Z_{S_n} | \mathscr{G}) \leqq \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T} E(Z_S | \mathscr{G}) \leqq E(X_T | \mathscr{G}),$$

d'où l'égalité.

Soit $T^n = \inf\left\{\frac{k}{n} \,\middle|\, \frac{k}{n} > T\right\}$. On a

$$X_{T+} = \lim_{n\to\infty} X_{T^n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T^n} E(Z_S | \mathscr{F}_T).$$

En effet

$$\lim_{n\to\infty} X_{T^n} = E(\lim_{n\to\infty} X_{T^n} | \mathscr{F}_T) = \lim_{n\to\infty} E(X_{T^n} | \mathscr{F}_T)$$

en utilisant ([14], V 21) et un passage à la limite facile; et

$$E\left(\operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T^n} E(Z_S | \mathscr{F}_{T_n}) \middle| \mathscr{F}_T\right) = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T^n} E(Z_S | \mathscr{F}_T)$$

à cause de l'égalité de l'alinéa précédent. Donc

$$X_{T+} = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq T^n} E(Z_S | \mathscr{F}_T) \leqq \operatorname*{ess\,sup}_{S \gg T} E(Z_S | \mathscr{F}_T).$$

Or nous avons vu que $X_{T+} = Y'_T \underset{\text{p.s.}}{\geqq} E(X_S | \mathscr{F}_T)\ \forall S \gg T$, et donc

$$X_{T+} \geqq \operatorname*{ess\,sup}_{S \gg T} E(Z_S | \mathscr{F}_T).$$

Par conséquent

$$X_{T+} = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqslant T} E(Z_S | \mathscr{F}_T).$$

On en déduit comme pour X_T que $\forall \mathscr{G}, \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}_T$:

$$E(X_{T+} | \mathscr{G}) = \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqslant T} E(Z_S | \mathscr{G}).$$

En suivant Chow et Robbins [3], on peut encore définir, lorsque Z est semi continu supérieurement à droite, l'ensemble $\mathscr{T}$ des temps d'arrêt réguliers: $\mathscr{T} = \{R | R$ temps d'arrêt à valeurs finies, p.p. on a $\forall t$, $t < R(\omega)$, $Z(\omega, t) < E(Z_R | \mathscr{F}_t)$, en prenant une version continue à droite de la martingale au second membre$\}$.

Citons encore pour mémoire les propriétés suivantes:

Soit X une surmartingale régulière, T un temps d'arrêt, $X_T = \limsup X$ sur $\{T = +\infty\}$, et Y une v.a. quasi-intégrable $Y \leqq X_T$. Alors si $S \leqq T$, $X_S \geqq E(Y | \mathscr{F}_T)$.

Soit X une v.a., $X^- \in \mathrm{L}_1$. Alors $E(X | \mathscr{F}_t)$ admet une version continue à droite (X_t), qui est une martingale régulière généralisée et telle que $\lim X_t = X$ sur $\{\exists t, X_t < +\infty\}$.

Soit Z un processus, X son enveloppe de Snell. Sur $\{\exists t, X_t < +\infty\}$, on a $\liminf X \leqq \limsup Z$.

Chapitre III. Applications à la théorie générale des processus stochastiques

§ 1. Processus de classe D

On dit qu'un processus Z est de classe D si $\{Z_T | T$ temps d'arrêt$\}$ est équiintégrable.

Cette notion a été introduite par Johnson et Helms [7], qui donnent aussi un critère pour qu'une surmartingale positive continue à droite soit de classe D.

Nous donnerons d'abord quelques définitions équivalentes, qui font beaucoup mieux saisir le sens de cette propriété, puis un critère pour qu'un processus soit de classe D – critère qui étend à tout processus bien mesurable le critère de Johnson et Helms [7].

Ensuite, nous appliquons cela à des problèmes de convergence de processus, en particulier à la convergence p.s. des espérances conditionnelles où nous obtenons un théorème qui généralise à la fois le résultat de Doob [4] à ce sujet et un résultat de Hunt [6].

T5. Théorème. *Soit Z un processus progressivement mesurable. On a les équivalences:*

Z est de classe D.

$\sup_T \|Z_T\|_1 < +\infty$ et $\forall T$, T temps d'arrêt à valeurs finies, $(Z_{t \wedge T})$ est de classe D.

$|Z|$ est majoré par une martingale de classe D.

Démonstration. Supposons que $Z \geqq 0$, $\sup_T E(Z_T) < +\infty$ et $\forall T$, T temps d'arrêt à valeurs finies, $(Z_{t \wedge T})$ est de classe D. Nous allons montrer que Z est majoré par une martingale de classe D, l'énoncé en suivra.

Soit X l'enveloppe de Snell de Z. On a $\sup_T E(X_T) = E(X_0) = \sup_T E(Z_T) < +\infty$. Montrons que $(X_{t \wedge T})$ est de classe D, T étant un temps d'arrêt à valeurs finies.

On vérifie qu'on a la formule, si $S \leqq T$:

$$X_S = E(X_T | \mathscr{F}_S) \vee \underset{S \leqq R \leqq T}{\text{ess sup}}\, E(Z_R | \mathscr{F}_S).$$

Comme l'ensemble de tous les Z_R pour $R \leqq T$ est équiintégrable, l'ensemble de toutes les espérances conditionnelles des Z_R est équiintégrable, comme il ressort immédiatement du théorème de de La Vallée-Poussin [9], (n^0 22–23).

Comme, pour S fixé, l'ensemble des $E(Z_R | \mathscr{F}_S)$ $(S \leqq R \leqq T)$ est filtrant croissant, l'ensemble des $Y_S = \underset{S \leqq R \leqq T}{\text{ess sup}}\, E(Z_R | \mathscr{F}_S)$ est équiintégrable, comme ensemble de points adhérents à une famille équiintégrable. Comme d'autre part, par l'intégrabilité de X_T, l'ensemble des $E(X_T | \mathscr{F}_S)$ est équiintégrable, on conclut que l'ensemble des X_S $(S \leqq T)$ est équiintégrable.

Soit maintenant $X = M - A$ la décomposition de Doob de X (cfr. T3). On a évidemment $M \geqq X \geqq Z \geqq 0$.

Comme A est intégrable, $\_E(A_\infty) \leqq E(X_0)\_$, $\{A_S\}$ est équiintégrable et donc $\{M_S = X_S + A_S | S \leqq T\}$ est équiintégrable.

M étant une martingale positive, pour montrer que M est de classe D, il suffit de montrer que $E(M_\infty) = E(M_0)$.

Soit Y_t une version continue à droite de la martingale $E(M_\infty | \mathscr{F}_t)$, et soit

$$T_n = \inf \left\{ t \,|\, M_t(\omega) \leqq Y_t(\omega) + \frac{1}{n} \right\}.$$

T_n est un temps d'arrêt à valeurs finies, donc $M_{t \wedge T_n}$ est une martingale de classe D, et donc

$$E(M_0) = E(M_{T_n}) \leqq E(Y_{T_n}) + \frac{1}{n} = E(M_\infty) + \frac{1}{n}.$$

D'où $E(M_0) = E(M_\infty)$.

Remarques. 1) De même, on démontre qu'un processus Z bien mesurable est de classe DL si et seulement si $|Z|$ est majoré par une martingale – si $\sup_T \|Z_T\|_1 < +\infty$.

2) Au cours de la démonstration, nous avons aussi démontré en substance le résultat suivant, qui est un corollaire facile du théorème cité de de La Vallee-Poussin:

Proposition. *Soit C une partie équiintégrable de $\mathbf{L}_1$. Il existe un disque fermé D de $\mathbf{L}_1$, tel que $C \subseteq D$, D est équiintégrable et:*

$$f \in \mathbf{L}_1,\, g \in D \text{ et } |f| \underset{\text{p.s.}}{\leqq} |g| \Rightarrow f \in D.$$

$\forall f \in D$, l'ensemble de toutes les espérances conditionnelles de f est contenu dans D.

Quoique cette proposition soit presque triviale et souvent utile, nous ne l'avons jamais rencontrée dans la littérature.

Elle contient par exemple ([14], II T 20, V T 18).

Nous donnons maintenant un critère pour que la partie positive d'un processus soit de classe D.

T6. Théorème. *Soit Z un processus bien mesurable tel que* $\sup_T \|Z_T\|_1 < +\infty$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *Z^+ est de classe D.*

2) *Bour toute suite croissante de temps d'arrêt*

$$T_1 \leqq T_2 \leqq T_3 \ldots T_n(\omega) < +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} T_n \underset{\text{p.s.}}{=} +\infty,$$

on a

$$\limsup_{n\to\infty} E(Z_{T_n}) \leqq E\big(\limsup_{t\to\infty} Z_t\big).$$

3) *Pour toute suite croissante de temps d'arrêt*

$$T_1 \leqq T_2 \leqq T_3 \ldots T_n(\omega) \underset{\text{p.s.}}{<} +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} T_n = \infty, \qquad \{Z^+_{T_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

est équiintégrable.

Remarques. Si $Z \geqq 0$, on peut dans (2) supposer les T_i bornés.

Il suffirait d'ailleurs de supposer, au lieu $\sup_T \|Z_T\|_1 < +\infty$, que $\sup_T E(Z^+_T) < +\infty$ et que $\limsup Z_t \in \mathbf{L}_1$.

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 3) est évident.

3) $\Rightarrow$ 2) est essentiellement le lemme de Fatou.

2) $\Rightarrow$ 1). Soit X l'enveloppe de Snell de Z.

On a $\sup_T \|X_T\|_1 < +\infty$, donc X converge p.s. et, par conséquent, $\lim X_t \underset{\text{p.s.}}{=} \limsup Z_t \in \mathbf{L}_1$ et X est minoré par une version continue à droite de la martingale de classe D, $E(X_\infty \mid \mathscr{F}_t)$.

Nous allons montrer que X est de classe D. On déduit sans peine du théorème de Johnson et Helms ([14], VI T 20) qu'il suffit pour cela de montrer que, pour toute suite croissante de temps d'arrêt S_n, tel que $S_n \underset{\text{p.s.}}{<} +\infty$ et $\lim S_n \underset{\text{p.s.}}{=} +\infty$, on a $\lim E(X_{S_n}) = E(X_\infty)$ — ne pas oublier que les trajectoires de X sont semi-continues supérieurement à droite (T 2), ce qui suffit dans la démonstration de Johnson et Helms.

Supposons donc a contrario que $\lim E(X_{S_n}) > E(\limsup Z) + \varepsilon$. Alors $\forall n$ $\exists R_n$, R_n temps d'arrêt $\geqq S_n$, $R_n < +\infty$ p.s., et $E(Z_{R_n}) \geqq E(\limsup Z) + \varepsilon$ — par (T 4).

Il reste à montrer qu'on peut remplacer la suite R_n par une suite croissante. On utilise à cet effet la technique des temps d'arrêt réguliers (fin du chapitre II).

Remarquons d'abord que, les R_n convergeant vers $+\infty$, on a $\forall \omega$, $\forall k$, $\{n \mid R_n(\omega) \leqq R_k(\omega)\}$ est fini.

Soit $\forall n$, Z^n_t une version continue à droite de la martingale $E(Z_{R_n} \mid \mathscr{F}_t)$.

Posons

$$T'_1(\omega) = T_1(\omega) = \inf\{R_n(\omega) \mid Z_{R_n}(\omega) \geqq Z^1_{R_n}(\omega)\}.$$

$\forall n$, $n \geqq 2$ posons

$$T'_n(\omega) = \inf\{R_k(\omega) \mid R_k(\omega) \geqq S_n(\omega),\ Z_{R_k}(\omega) \geqq Z^n_{R_k}(\omega)\}.$$

On a $S_n \leqq T'_n \leqq R_n$, $Z_{T'_n} \geqq Z^n_{T'_n} = E(Z_{R_n} \mid \mathscr{F}_{T'_n})$.

Posons $T_n = T'_n \vee T_{n-1}$ et montrons que $\forall n$, $Z_{T'_n} \leqq E(Z_{T_n} \mid \mathscr{F}_{T'_n})$.

Fixons n et posons $T''_1 = T'_n$, $T''_{i+1} = T''_i \vee T'_i$; on a

$$T'_n = T''_1 \leqq T''_2 \leqq \cdots \leqq T''_{n-1} \leqq T''_n = T_n.$$

Il suffit donc que nous montrions que $\forall i$, $Z_{T''_i} \leqq E(Z_{T''_{i+1}} \mid \mathscr{F}_{T''_i})$.

Sur $\{T_i''=T_{i+1}''\}$, il n'y a pas le problème.
Sur $\{T_i''<T_i'\}=\{T_i''<T_{i+1}''\}$, on a

$$Z_{T_i''}<Z^i_{T_i''}=E(Z^i_{T_i''}\,|\,\mathscr{F}_{T_i''})\leqq E(Z_{T_i'}\,|\,\mathscr{F}_{T_i''})=E(Z_{T_{i+1}''}\,|\,\mathscr{F}_{T_i''}).$$

Donc, $\forall n$, $E(Z_{T_n})\geqq E(Z_{T_n'})\geqq E(Z_{R_n})\geqq E(\limsup Z)+\varepsilon$.

D'où la contradiction.

Le théorème ci-dessus conduit à poser la définition suivante:

Définition. Un processus bien mesurable Z est de classe DA – classe D asymptotique – si $\sup_T \|Z_T\|_1<+\infty$, et si pour toute suite croissante S_n de temps d'arrêt à valeurs finies qui converge uniformément vers $+\infty$, les Z_{S_n} sont équi-intégrables.

Le nom de classe D asymptotique est justifié par la proposition suivante:

T 7. Proposition. *Un processus Z est de classe D si et seulement si il est de classe D asymptotique et de classe D locale.*

Démonstration. On peut supposer $Z\geqq 0$.

De même que dans (T 5), on montre alors que l'enveloppe de Snell X de Z est de classe DL. On vérifie alors que, dans le cas de surmartingales de classe DL, on peut supposer que la suite S_n de temps d'arrêt à valeurs finies converge *uniformément* vers $+\infty$, dans la variante du théorème de Johnson et Helms que nous avons utilisée dans T 6. On termine alors comme dans T 6.

On a aussi la

T 8. Proposition. *Z est de classe DA si et seulement si $\sup_T \|Z_T\|_1<+\infty$ et pour tout temps d'arrêt T à valeurs finies, on a: $Z_{t\wedge T}$ est de classe DA.*

Démonstration. Soit S_n une suite croissante de temps d'arrêt à valeurs finies qui converge uniformément vers $+\infty$. Par définition, il suffit de montrer que Z_{S_n} est un processus de classe D. Mais Z_{S_n} est discret, donc de classe DL, donc $Z_{S_n\wedge T}$ est de classe D par la proposition précédente, et donc, par T 5, Z_{S_n} est de classe D.

On a encore:

T 9. Proposition. *Supposons que* $\limsup_{t\to\infty} Z\in \mathbf{L}_1$.

Z^+ est de classe DA si et seulement si son enveloppe de Snell converge dans $\mathbf{L}_1$, ou encore si et seulement si pour toute suite croissante de temps d'arrêt S_n à valeurs finies qui converge uniformément vers $+\infty$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} E(Z_{S_n})\leqq E(\limsup Z), \quad \textit{et} \quad \sup E(|Z_T|)<+\infty.$$

Démonstration. La démonstration suit exactement les mêmes lignes que celle de T 6.

On a enfin:

T 10. Proposition. *Si Z^- est de classe DA, l'enveloppe de Dirichlet et l'enveloppe de Snell de Z sont égales.*

En particulier, lorsque Z converge p.s., ces résultats donnent:

T11. Corollaire. *Supposons* $\sup_T \|Z_T\|_1 < +\infty$.

On a les équivalences:

– *Z converge p.s. et Z est de classe DA.*

– $\lim E(Z_T)$ *existe dans* $\mathbf{R}$ *lorsque T converge uniformément vers* $+\infty$.

– $\lim Z_T = Z_\infty$ *p.s. et dans* $\mathbf{L}_1$ *lorsque T converge uniformément vers* $(+\infty)$.

– *Pour toute suite croissante T_n de temps d'arrêt à valeurs finies qui converge uniformément vers* $+\infty$, $\lim E(Z_{T_n})$ *existe et ne dépend pas de la suite choisie.*

– *Pour toute suite croissante T_n de temps d'arrêt bornés qui converge uniformément vers* $+\infty$, Z_{T_n} *est de Cauchy* $\sigma(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$.

De plus, on a les équivalences.

– *Z converge p.s. et Z^+ est de classe DA.*

– $\forall n$, $Z \vee (-n)$ *vérifie une des conditions équivalentes ci-dessus.*

– *Pour toute suite croissante de temps d'arrêt T_n à valeurs finies qui converge uniformément vers* $(+\infty)$, $\limsup_{n\to\infty} E(Z_{T_n}) \leqq E(Z_\infty)$.

Convergence p.s. des espérances conditionnelles
Régularité des trajéctoires d'une projection

Soit $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Soit $(\mathscr{G}_t)$ une famille croissante et continue à droite de tribus, $\mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{F}_t$.

Si Z est un processus mesurable sur $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, tel que $\forall T$, T temps d'arrêt, $Z_T \in \mathbf{L}_1$ – ou bien un processus mesurable positif – on désigne par $E(Z|\mathscr{G})$ la projection du processus Z sur l'ensemble des processus bien mesurables pour la famille de tribus $(\mathscr{G}_t)$ – (cfr. [13], p. 210). $E(Z|\mathscr{G})$ est donc caractérisé par les deux propriétés:

$E(Z|\mathscr{G})$ est un processus bien mesurable par rapport à $(\mathscr{G}_t)$.

$\forall T$, T temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{G}_t)$, T à valeurs finies, $[E(Z|\mathscr{G})]_T$ est une version de $E(Z_T|\mathscr{G}_T)$.

De même, on dénotera par $E^a(Z|\mathscr{G})$ la projection accessible de Z, et par $E^p(Z|\mathscr{G})$ sa projection prévisible.

T12. Théorème. *Si Z converge p.s. vers Z_∞ et est de classe DA, alors $E(Z|\mathscr{G})$ converge p.s. vers $E(Z_\infty|\mathscr{G}_\infty)$ et est de classe DA. De même pour $E^a(Z|\mathscr{G})$ et pour $E^p(Z|\mathscr{G})$.*

Une projection bien mesurable (ou accessible ou prévisible) d'un processus de classe DL qui a des limites à droite (à gauche) a des limites à droite (à gauche).

Une projection bien mesurable (ou accessible ou prévisible) d'un processus continu à droite de classe DL est continue à droite.

Une projection accessible (ou prévisible) d'un processus continu à gauche de classe DL est continue à gauche.

Démonstration. Le premier point résulte immédiatement de ce que les processus de classe DA qui convergent p.s. sont les processus tels que $\lim E(Z_T)$ existe dans $\mathbf{R}$ lorsque T converge uniformément vers $(+\infty)$ – cfr. corollaire ci-dessus – et de ce que, si T est un temps d'arrêt à valeurs finies de $(\mathscr{G}_t)$, on a:

$$E[E(Z|\mathscr{G})]_T = E\big(E(Z_T|\mathscr{G}_T)\big) = E(Z_T).$$

Les autres points se démontrent de même, en faisant appel au théorème 1 et aux remarques 2 et 3 qui le suivent.

Remarque. Cette proposition ne paraît triviale que parce qu'elle use intensivement de nos résultats précédents. En fait, elle illustre la puissance de ces résultats.

Elle contient évidemment tous les résultats connus jusqu'ici sur la convergence p.s. des espérances conditionnelles – cfr. Doob [4], p. 23, Hunt [6], p. 47, Meyer [17].

§ 2. Construction de variables arrêtées d'espérance infinie

Ce paragraphe est essentiellement consacré à la démonstration d'un lemme technique (Mertens [12]), dont les applications suivront dans le chapitre suivant. On discute aussi une catégorie d'exemples qui intéresse autant les chapitres II et IV que celui-ci.

Le lemme est énoncé en temps discret, nos résultats précédents nous permettant de passer facilement au temps continu.

Notations. Si R est un temps d'arrêt, Z un processus, on pose par définition $Z_R=0$ sur $\{R=+\infty\}$.

$\mathbf{T}_1$ est l'ensemble des temps d'arrêt de la forme $\inf\{n\,|\,\omega\notin A_n\}$, où A_n est un atome de $\mathscr{F}_n$, et $\forall n$, $A_n \supseteq A_{n+1} \neq \bigcap_n A_n$.

$\mathbf{T}_2$ est l'ensemble des temps d'arrêt T tels que $\{T=+\infty\}$ est, soit vide, soit un atome de $\mathscr{F}_\infty$ qui n'est pas $\bigcup_n \mathscr{F}_n$-mesurable.

Soit Z_n un processus positif. Pour tout atome A de $\bigcup_n \mathscr{F}_n$, soit $n(A)=\inf\{n\,|\,A\in\mathscr{F}_n\}$.

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des atomes A de $\bigcup_n \mathscr{F}_n$, tels que $\sup_n Z_n=+\infty$ sur A.

Soit $Z'=Z$ sauf sur $\mathscr{A}$ où nous posons: $Z'(A)=Z'_{n(A)}(A)$ après l'instant $n(A)$. Z' est encore un processus adapté.

Nous désignerons par X^Z l'enveloppe de Snell de Z'.

Lemme. *Supposons que* $\forall R$, $R\in\mathbf{T}_2$, $Z_R\in\mathbf{L}_1$. *Soit* $T=\inf\{n\,|\,X_n^Z \neq +\infty\}$. *Alors:*

1) $\mathscr{A}$ *est fini.*

2) T *est le* sup *d'une partie finie – éventuellement vide – de* $\mathbf{T}_1$.

3) $X_T^Z\in\mathbf{L}_1$.

Démonstration. Supposons pour commencer que X^Z soit l'enveloppe de Snell non de Z', mais de Z.

(a) Supposons que $\exists n$: $\int_{\{T\leq n\}} X_n^Z=+\infty$.

Alors – cfr. chapitre II – comme X^Z est à valeurs finies après l'instant n sur $\{T\leq n\}$, le temps d'arrêt $R - R=n$ sur $\{T>n\}$, $R=\inf\{k\,|\,k\geq n,\ X_k^Z-1\leq Z_k\}$ sur $\{T\leq n\}$ – est à valeurs finies et $E(Z_R)=+\infty$ – d'où la contradiction.

(b) Supposons que $\exists n$: $\{T>n\}$ admet une partition dénombrable $\mathscr{F}_n$ – mesurable: $\{T>n\}=\bigcup_k A_k$.

Alors on peut, sur $\{T \leqq n\}$, s'arrêter à l'instant n et, sur A_k, s'arrêter à un temps d'arrêt T_k à valeurs finies $\geqq n$ défini sur A_k, tel que $\int_{A_k} Z_{T_k} \geqq 1$. Cela donne un temps d'arrêt R à valeurs finies tel que $E(Z_R) = +\infty$. D'où la contradiction.

Donc $\forall n$, $B_n = \{T > n\}$ est la réunion d'un nombre fini d'atomes B_n^i de $\mathscr{F}_n$.

(c) Montrons que $\forall n, \forall i, B_n^i \cap B_{n+1} \underset{\text{p.s.}}{\neq} \emptyset$. Sinon on aurait sur B_n^i, $T \underset{\text{p.s.}}{=} n+1$ et $X_T^Z = X_{n+1}^Z$ sur B_n^i y serait intégrable, tandis que $X_n^Z \underset{\text{p.s.}}{=} +\infty$ sur B_n^i. Par le théorème 4, on conclurait que $Z_n \underset{\text{p.s.}}{=} +\infty$ sur B_n^i, d'où la contradiction.

Donc la suite d'ensembles finis $\{B_n^i \mid 1 \leqq i \leqq i_n\}$ est un système projectif pour les applications surjectives qui envoyent un atome de B_{n+1} sur l'atome de B_n qui le contient; et l'application canonique de la limite projective $\mathbf{L}$ sur chacun des ensembles est surjective.

(d) Montrons que $\mathbf{L}$ est un ensemble fini. Supposons le contraire. Posons $A_{-1} = \Omega$. A l'étape n, choisissons un $B_n^i \subseteq A_{n-1}$, soit A_n, tel que A_n soit l'image d'une infinité de points de $\mathbf{L}$ et arrêtons-nous en dehors de A_n.

Cela définit sur temps d'arrêt R. Montrons d'abord que $R \in \mathbf{T}_2$. Supposons donc $\mathsf{P}\{T = +\infty\} > 0$. Alors $A_\infty = \{R = +\infty\}$ est l'intersection d'une suite décroissante A_n d'atomes de $\mathscr{F}_n$ et est donc un atome de $\mathscr{F}_\infty$. Si $A_\infty = A_n$ pour un certain n, alors cet A_n serait évidemment l'image, non d'une infinité de points de $\mathbf{L}$, mais d'un seul, d'où la contradiction. Donc $R \in \mathbf{T}_2$. Evidemment $R \leqq T$.

Montrons encore qu'il existe une suite infinie d'instants n_i, tels que $\forall i$, si $C_n = \{R = n, T > n\} = (A_{n-1} \setminus A_n) \cap B_n$, alors $\mathsf{P}(C_{n_i}) > 0$. Supposons au contraire que $\forall n$, $n \geqq n_0$, on ait $C_n = \emptyset$. Cela signifie $A_n = A_{n-1} \cap B_n$, $\forall n$, $n \geqq n_0$, et donc A_n ne serait pas l'image d'une infinité de points de $\mathbf{L}$, mais d'un seul.

Alors on construit un temps d'arrêt S de la façon suivante: en dehors des C_i, on pose $S = R$; sur C_n on choisit $T_n \geqq n$, T_n un temps d'arrêt à valeurs finies tel que $\int_{C_n} Z_{T_n} \geqq 1$, et on pose $S = T_n$ sur C_n. Alors S est un temps d'arrêt, $\{S = +\infty\} = \{R = +\infty\}$, d'où $S \in \mathbf{T}_2$, et $E(Z_S) = +\infty$: d'où la contradiction. Donc $\mathbf{L}$ est fini.

(e) Comme toute élément de $\mathscr{A}$ correspond à un élément de la limite projective, on conclut d'abord que $\mathscr{A}$ est fini. Puis on peut remplacer dans tout ce qui précède Z par Z'.

(f) Alors, pour tout élément j $(1 \leqq j \leqq l)$ de $\mathbf{L}$, on désigne par B_n^j l'atome de B_n qui est l'image de j. On a $\bigcap_n B_n^j \neq B_k^j$. On définit $T_j = \inf\{n \mid \omega \notin B_n^j\}$. Alors $T_j \in \mathbf{T}_1$, et $T = \sup_{1 \leqq j \leqq l} T_j$.

(g) Reste à montrer que $E(X_T^Z) < +\infty$. Supposons le contraire. Mais alors il existe j tel que $\int_{\{T = T_j\}} X_T^Z = +\infty$. Soit $D_n = \{T = T_j = n\}$; et $I_n = \int_{D_n} X_T^Z$. $\forall n$, $I_n < +\infty$ – par (a) –, et $\sum_n I_n = +\infty$.

En dehors des D_n, arrêtons-nous à l'instant T_j. Sur D_n choisissons un temps d'arrêt T^n à valeurs finies $\geqq n$, tel que $\int_{D_n} Z_{T_n} \geqq I_n - 2^{-n}$, et arrêtons nous à l'instant T^n.

Cela définit un temps d'arrêt R, tel que $\{R = +\infty\} = \{T_j = +\infty\}$, et donc $R \in \mathbf{T}_2$, et $E(Z_R) \geqq \sum_n (I_n - 2^{-n}) = +\infty$, d'où la contradiction.

Donc $E(X_T^Z) < +\infty$.
La démonstration du lemme est achevée.

Exemples. Le lemme montre que, sauf dans le cas où il y a une suite décroissante A_n, où A_n est un atome de $\mathscr{F}_n$ telle que $\pi = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) > 0$, on peut travailler avec des temps d'arrêt à valeurs finies. Illustrons cette exception.

Cette exception est du type suivant: $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ est $[0, 1-\pi]$, muni de la mesure $(\pi\,\delta(0)+\lambda)$ où $\delta(0)$ est la masse unité au point 0 et λ la mesure de Lebesgue.

Soit $a_n = \mathsf{P}(A_n) - \pi$, et $a_{-1} = 1-\pi$. Alors $a_n \to 0$ et $[0, a_n]$ est un atome de $\mathscr{F}_n$. Pour simplifier l'exposition, on peut supposer que les autres atomes de $\mathscr{F}_n$ sont $]a_i, a_{i-1}] - 0 \leqq i \leqq n$.

Il est clair que, sur cet espace, tout temps d'arrêt à valeurs finies est borné. Donc toute surmartingale est régulière.

Or, pour toute suite x_n de nombres réels – même non convergente –, on construit facilement – de façon unique – une martingale X telle que $X_n(0) = x_n$; – on compense successivement à chaque étape la variation de x_n.

Un autre exemple est le suivant:

On pose

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{a_i - a_{i-1}} \quad \text{sur }]a_i, a_{i-1}] \quad \text{pour } 0 \leqq i \leqq n$$

et sinon $Z_n(\omega) = 0$. Z_n est un processus croissant qui converge p.s. vers la fonction

$$Z(\omega) = \frac{1}{a_i - a_{i-1}} \quad \text{sur }]a_i - a_{i-1}], \qquad Z(0) = 0.$$

L'enveloppe de Snell et l'enveloppe de Dirichlet X de (Z_n) est la martingale généralisée $X_T = E(Z|\mathscr{F}_T)$ pour tout temps d'arrêt $T_{-}(T \underset{\text{p.s.}}{<} +\infty)$.

X converge p.s. (c'est une surmartingale positive) vers X_∞, où $X_\infty(\omega) = Z(\omega)$ pour $\omega \neq 0$, mais $X_\infty(0) = +\infty \neq Z(0) = 0$.

Ces deux catégories d'exemples sont, avec l'exemple classique d'une martingale positive qui converge p.s. vers 0, les exemples qu'il faut avoir à l'esprit tout au long de cette dissertation.

Chapitre IV. Applications à la théorie des martingales

§ 1. Convergence p.s. des surmartingales Bornes dans $\mathbf{L}_1$ des variables arrêtées

Dans ce paragraphe, nous montrons comment le lemme du paragraphe 2 du chapitre précédent implique deux résultats de Chow ([1] et [2]) sur les surmartingales. En fait, il permet de préciser ces résultats, tout en en donnant une démonstration unifiée. Ces résultats ont été annoncés dans Mertens [12].

T13. Théorème. *Si Z est une surmartingale telle que $\forall T$, $T \in \mathbf{T}_2$, $Z_T^- \in \mathbf{L}_1$, alors Z converge p.s.*

Démonstration. Par T1, on se ramène au temps discret. On peut évidemment supposer $Z \leqq 0$. On sait évidemment que Z converge sur les atomes de $\bigcup_n \mathscr{F}_n$. On peut donc remplacer Z par Z'.

Soit $-X$ l'enveloppe de Snell de $-Z'$, et soient T etc.... définis comme dans le lemme. Comme $X_T \in \mathbf{L}_1$, Z' converge p.s. sur $\{T < +\infty\}$, car là-dessus on a $\sup E(-Z'_t) \leqq E(-X_T) < +\infty$.

Donc, par le lemme, il suffit de démontrer la convergence sur $\{T = +\infty\} = \bigcup_{1 \leqq j \leqq 1} \{T_j = +\infty\}$.

Soit n_0 un instant tel que $\{T_i \geqq n_0\} \cap \{T_j \geqq n_0\} = \emptyset$ $\forall i, j, i \neq j$ (cfr. lemme). On peut évidemment supposer $n_0 = 0$.

Il suffit alors de faire la démonstration sur $T_1 > 0$, et donc on peut supposer que $T = T_1$, c'est-à-dire $\forall n$, $A_n = \{T > n\}$ est un atome de $\mathscr{F}_n$, et que $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(A_\infty) > 0$.

Soit $z_n = Z_n(A_n)$. Il nous reste à montrer que z_n converge. Pour cela, nous allons montrer que $\sum (z_{n+1} - z_n)^+ < +\infty$. On a, en notant $B_{n+1} = A_n \setminus A_{n+1} = \{T = n+1\}$, et $\pi_n = \mathsf{P}(A_n)$, $\pi = \mathsf{P}(A_\infty)$

$$z_n \cdot \pi_n \geqq z_{n+1} \cdot \pi_{n+1} + \int_{B_{n+1}} Z_{n+1} \cdot$$

Donc $z_{n+1} \cdot \pi_{n+1} - z_n \cdot \pi_n \leqq \int_{(T=n+1)} -Z_T$.

On suppose $z_{n+1} \geqq z_n$, alors:

$$z_n(\pi_{n+1} - \pi_n) + (z_{n+1} - z_n)^+ \cdot \pi_{n+1} \leqq \int_{\{T=n+1\}} -Z_T$$

d'où:

$$(z_{n+1} - z_n)^+ \cdot \pi \leqq -\int_{\{T=n+1\}} Z_T.$$

Donc $\pi \cdot \sum_n (z_{n+1} - z_n)^+ \leqq \sum_{n:\, z_{n+1} \geqq z_n} \int_{\{T=n+1\}} -Z_T \leqq \int -Z_T$.

Donc $\sum (z_{n+1} - z_n)^+ \leqq \frac{1}{\pi} \int |Z_T| < +\infty$.

T 14. Théorème. *Si Z est une surmartingale telle que $\forall R$, $R \in \mathbf{T}_2$, $Z_R \in \mathbf{L}_1$ alors* $\sup_R E(Z_R^+) < +\infty$.

Démonstration. Nous nous ramenons d'abord au cas discret. Comme $\sup_{R \text{ borné}} E(Z_R^+) = \sup_R E(Z_R^+)$; si $\sup_R E(Z_R^+) = +\infty$, il existe une suite (R_i), R_i bornée, telle que $\sup_i E(Z_{R_i}^+) = +\infty$, et que $\lim_{i\to\infty} R_i = +\infty$.

Comme Z^+, étant la partie positive d'une surmartingale, a presque toutes ses trajectoires réglées et semi-continues supérieurement à droite, on peut appliquer la technique des temps d'arrêt réguliers – cfr. fin du chapitre II –, pour transformer la suite R_i en une suite croissante. Mais alors $Y_i = Z_{R_i}$ est une surmartingale en temps discret – car les R_i sont bornées – telle que $\sup_n E(Y_n^+) = +\infty$. Donc on peut supposer que Z est une surmartingale en temps discret.

Soit alors X l'enveloppe de Snell de Z^+ et les autres notations comme dans le lemme – on peut travailler avec Z^+, au lieu de $(Z^+)'$, car une surmartingale est un processus finalement décroissant sur les atomes de $\bigcup_n \mathscr{F}_n$.

Il faut démontrer que $T = 0$.

Dans le cas contraire on se ramène de nouveau immédiatement au cas où $T \in \mathbf{T}_1$.

On sait alors que

1) $\int_{A_n} Z_n^+ = \int_{A_n} Z_n \to +\infty$.

2) $\int Z_T^+ < +\infty$.

$A_n = \{T > n\}$ est un atome de $\mathscr{F}_n$.

Nous allons montrer que $\int Z_T^- = +\infty$, d'où la contradiction.

Soit $\pi_n = \mathsf{P}(A_n)$, $z_n = Z_n(A_n)$. On a:

$$\pi_n \cdot z_n \geqq \pi_{n+1} \cdot z_{n+1} + \int_{\{T=n+1\}} Z_{n+1}.$$

Donc $\pi_0 \cdot z_0 - \pi_n \cdot z_n \geqq \int_{\{T \leqq n\}} Z_T = \int_{\{T \leqq n\}} Z_T^+ - \int_{\{T \leqq n\}} Z_T^- \geqq \int_{\{T \leqq n\}} Z_T^+ - \int Z_T^-$.

Donc $-\infty = \lim_{n\to\infty} (\pi_0 \cdot z_0 - \pi_n \cdot z_n) \geqq \lim_{n\to\infty} \int_{\{T \leqq n\}} Z_T^+ - \int Z_T^- = \int Z_T^+ - \int Z_T^-$

Donc $\int Z_T^- = \infty$.

§ 2. Surmartingales régulières et surmartingales spéciales Décompositions des surmartingales

A partir de maintenant, toute surmartingale X sera telle que $\forall T$, $T \in \mathbf{T}_2$, $X_T \in \mathbf{L}_1$.

Définitions. X est dite régulière si X vérifie le théorème d'arrêt pour des temps d'arrêt à valeurs finies, mais non nécessairement bornés. Il est équivalent de dire que X^- est de classe D – ou de classe DA – après un temps d'arrêt sup. d'une famille finie de temps d'arrêt T du type tel que $\{T > t\} = A_t$ est un atome de $\mathscr{F}_t$, et que $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(A_t) \neq 0$.

X est dite spéciale si X^+ est de classe DA – ou encore si $\forall T$, T à valeurs finies, $X_{t\wedge T}^+$ est de classe DA.

A. Décomposition de Krickeberg d'une surmartingale

On décompose une surmartingale quelconque en une somme d'une surmartingale régulière et d'une surmartingale spéciale. On étend ainsi aux surmartingales la décomposition de Krickeberg d'une martingale.

T15. Théorème. *Soit X une surmartingale, Y son enveloppe de Snell, $Z = X - Y$. Alors $X = Y + Z$, où Y est une surmartingale régulière, et Z une surmartingale négative – et donc spéciale – qui converge p.s. vers zéro.*

X est régulière si et seulement si $Z = 0$.

X est spéciale si et seulement si Y est spéciale.

Démonstration. Montrons la propriété de surmartingale de Z. Soient donc R_1 et R_2 deux temps d'arrêt bornés, $R_1 \leqq R_2$. Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies, $T \geqq R_1$. On a: $X_{T\wedge R_2} - X_T = X_{R_2} - X_{T\vee R_2}$, et par la propriété de surmartingale, $X_{R_1} \geqq E(X_{T\wedge R_2} | \mathscr{F}_{R_1})$, et donc:

$$X_{R_1} - E(X_T | \mathscr{F}_{R_1}) \geqq E(X_{T\wedge R_2} | \mathscr{F}_{R_1}) - E(X_T | \mathscr{F}_{R_1}) = E(X_{R_2} | \mathscr{F}_{R_1}) - E(X_{T\vee R_2} | \mathscr{F}_{R_1})$$

d'où:
$$X_{R_1} - \operatorname*{ess\,sup}_{T \geqq R_1} E(X_T | \mathscr{F}_{R_1}) \geqq E(X_{R_2} | \mathscr{F}_{R_1}) - \operatorname*{ess\,sup}_{S \geqq R_2} E(X_S | \mathscr{F}_{R_1})$$

c'est-à-dire: $X_{R_1}-Y_{R_1}\geqq E(X_{R_2}|\mathscr{F}_{R_1})-E(Y_{R_2}|\mathscr{F}_{R_1})$, ou encore: $Z_{R_1}\geqq E(Z_{R_2}|\mathscr{F}_{R_1})$: c'est la propriété de surmartingale de Z.

Reste à montrer que, si X est spéciale, Y l'est aussi. Cela résulte de T9.

B. Décomposition de Riesz

On donne ici les propriétés principales des surmartingales régulières et des surmartingales spéciales. Elles s'analysent le mieux au moyen de la décomposition de Riesz.

Le théorème ci-dessous précise de beaucoup un résultat de Chow [2]. De plus, il met en évidence la dualité entre les surmartingales régulières et les surmartingales spéciales.

Dorénavant toute surmartingale sera telle que

$$\sup E(|X_t|)<+\infty.$$

On appelle potentiel une surmartingale de classe DA qui converge vers 0. L'enveloppe de Dirichlet d'une sousmartingale sera également appelée sa solution de Dirichlet. C'est une martingale, tout comme l'enveloppe de Snell.

T16. Théorème *(Décomposition de Riesz). Soit Z une sousmartingale, X son enveloppe de Snell, X' sa solution de Dirichlet, $Y=X'-Z$ son potentiel. On a les équivalences suivantes:*

(a) 1) *Z est régulière.*
2) $\forall t, T, t\leqq T$: $E(Z_t)\leqq E(Z_T)$.
3) $E(Z_\infty^+)=\lim E(Z_t^+)$ — *ou: Z_t^+ converge dans* $\mathbf{L}_1$.
4) *X' est une surmartingale spéciale — ou une sousmartingale régulière.*

(b) 1) *Z est spéciale.*
2) $\forall T$, $\lim\limits_{t\to\infty} E(Z_t)\geqq E(Z_T)$.
3) $E(Z_\infty^-)=\lim E(Z_t^-)$ — *ou: Z_t^- converge dans* $\mathbf{L}_1$.
4) *X' est une surmartingale regulière — ou une sousmartingale spéciale.*

En particulier $X'=X$.

Démonstration. (a) 1)$\equiv$2): En effet 2) implique que la formule $Z_S\leqq E(Z_T|\mathscr{F}_S)$ est vraie — $S\leqq T$ —

d'abord lorsque $S=t$ est constant, en considérant les temps d'arrêt $T\cdot I(A)+t(1-I(A))$, $A\in\mathscr{F}_t$,

puis lorsque S est à valeurs discrètes,

ensuite on passe à S quelconque, par un passage à la limite décroissante, en utilisant le théorème 2,

1) $\Rightarrow$ 2) est évident.

1) $\cdot\equiv\cdot$ 4) parce que les processus positifs de classe D sont les processus majorés par une martingale équiintégrable.

1) $\cdot\equiv\cdot$ 3). 1) $\Rightarrow$ 3) est évident.

3) $\Rightarrow Z_t^+\to Z_\infty^+$ dans $\mathbf{L}_1$. Donc $E(Z_\infty^+|\mathscr{F}_t)$ est une martingale équiintégrable qui majore Z^+, parce que sinon $\exists t$, $\exists A$, $A\in\mathscr{F}_t$: $\forall s$, $s\geqq t$, $\int_A Z_s^+\geqq\int_A Z_\infty^+ +\varepsilon$.

Donc on a 1).

(b) 4) $\cdot\equiv\cdot$ 2) Car $\sup\limits_T E(Z_T)=E(X_0)$ et $E(X_0')=\lim\limits_{t\to\infty} E(Z_t)$.

1) $\Rightarrow$ 3) est évident. Montrons encore que 3) $\Rightarrow$ 4) et 4) $\Rightarrow$ 1).

On a l'inégalité (car $Z_\infty = X'_\infty$): $\left||X'^-_\infty - X'^-_t| - |Z^-_\infty - Z^-_t|\right| \leqq Y_t$. Comme Y_t est un potentiel, et que 3) $\Rightarrow (Z^-_t \xrightarrow{\mathbf{L}_1} Z^-_\infty)$, on voit en intégrant l'inégalité que, si 3), $X'^-_t \xrightarrow{\mathbf{L}_1} X'^-_\infty$.

Comme (a) 3) $\Rightarrow$ (a) 1), on conclut que X' est une surmartingale régulière: on a 4).

Réciproquement, si 4), en intégrant de nouveau l'inégalité ci-dessus pour $t = T(\omega)$ on conclut que Z^-_T converge dans $\mathbf{L}_1$ vers Z^-_∞ lorsque T converge uniformément vers $(+\infty)$. C'est 1).

La démonstration est achevée.

Remarques. 1) On peut encore démontrer la

Proposition. *X' est l'élément minimal de l'ensemble des surmartingales locales qui majorent Z si et seulement si Z est de classe DL, ou encore si et seulement si Y est un potentiel de classe D.*

La *démonstration* résulte immédiatement de nos résultats antérieurs.

2) (sur la décomposition de Doob):

Soit X une surmartingale de classe DL, $X = M - A$ sa décomposition de Doob.

Alors X est régulière (spéciale) si et seulement si M est une surmartingale régulière (spéciale).

Cela résulte immédiatement de ce que A est de classe D.

C. Une réciproque au théorème de convergence p.s. des espérances conditionnelles

T17. Proposition. *Soit X une surmartingale. On a l'équivalence*

- *X est spéciale,*
- $E(X^+_\infty | \mathscr{F}_0) \underset{\text{p.s.}}{=} \lim_{t \to \infty} E(X^+_t | \mathscr{F}_0)$.

Démonstration. Le théorème de convergence p.s. des espérances conditionnelles donne l'implication dans un sens. Montrons la réciproque. Comme

$$2X^+_\infty \geqq |X^+_\infty - X^+_t| + (X^+_\infty - X^+_t) \geqq 0,$$

si on pose $Z_t = \sup_{s>t} [|X^+_\infty - X^+_s| + (X^+_\infty - X^+_s)]$, les Z_n forment une suite décroissante de fonctions intégrables positives, qui converge p.s. vers zéro.

Donc $E(Z_t | \mathscr{F}_0) \underset{\text{p.s.}}{\to} 0$.

Donc le fait que $E(X^+_t | \mathscr{F}_0) \underset{\text{p.s.}}{\to} E(X^+_\infty | \mathscr{F}_0)$ implique que

$$E\left(|X^+_\infty - X^+_t| \,|\, \mathscr{F}_0\right) \underset{\text{p.s.}}{\to} 0.$$

Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies. On a

$$X^+_{t\wedge T} - X^+_T = X^+_t \cdot I(T > t) - X^+_T \cdot I(T > t) \leqq (X^+_\infty - X^+_T) \cdot I(T > t) + |X^+_\infty - X^+_t|$$

et de même $X^+_{t\wedge T} - X^+_T \geqq -X^+_T \cdot I(T > t)$.

En prenant les espérances conditionnelles de ces deux inégalités par rapport à $\mathscr{F}_0$ et en passant à la limite on trouve (car X^+_T et X^+_∞ sont intégrables) $E(X^+_{t\wedge T} | \mathscr{F}_0) \underset{\text{p.s.}}{\to} E(X^+_T | \mathscr{F}_0)$.

D'autre part, $\lim_{t\to\infty} E(X_{t\wedge T}^{-}|\mathscr{F}_0) \geqq E(X_T^{-}|\mathscr{F}_0)$, par le lemme de Fatou – la limite dans le membre de gauche existe p.s. parce que les $E(X_{t\wedge T}^{-}|\mathscr{F}_0)$ sont croissants.

Par soustraction, $\lim_{t\to\infty} E(X_{t\wedge T}|\mathscr{F}_0) \leqq E(X_T|\mathscr{F}_0)$.

Comme $E(X_t|\mathscr{F}_0) \leqq E(X_{t\wedge T}|\mathscr{F}_0)$ et que les $E(X_t|\mathscr{F}_0)$ décroissent, on conclut en intégrant que $\lim E(X_t) \leqq E(X_T)$, et donc X est spéciale, par le théorème de décomposition de Riesz.

Ce nous est un très agréable devoir d'adresser ici nos plus vifs remerciements à Monsieur J. Paris qui a bien voulu, avec une bienveillance toute particulière, veiller au meilleur déroulement de ce travail, partie de notre thèse de doctorat défendue à l'Université Catholique de Louvain.

Nous sommes également très reconnaissants à Monsieur P.A. Meyer, qui nous a signalé la seconde partie du théorème 12.

Bibliographie

1. Chow, Y.S.: Convergence theorems of Martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **1**, 340–346 (1963).
2. – On the expected value of a stopped submartingale. Ann. math. Statistics **38**, 608–609 (1967).
3. – Robbins, H.E.: On values associated with a stochastic sequence. Proc. Fifth Berkeley Sympos. math. Statist. Probab. **1**, 417–440 (1967).
4. Doob, J.L.: Stochastic processes. New York: Wiley 1953.
5. Grodal, B., Mertens, J.F.: Integral representation of utility functions. CORE Disc. Paper 6823, Louvain (1968).
6. Hunt, G.A.: Martingales et processus de Markov. Paris: Dunod 1966.
7. Johnson, G., Helms, L.L.: Class (D) supermartingales. Bull. Amer. math. Soc. **69**, 59–62 (1963).
8. Krickeberg, K.: Convergence of Martingales with a directed index set. Trans. Amer. math. Soc. **83**, 313–337 (1956).
9. de La-Vallée-Poussin, Ch.: Sur l'intégrale de Lebesgue. Trans. Amer. math. Soc. **16**, 435–502 (1915).
10. Mertens, J.F.: Sur la théorie des processus stochastiques. C. r. Acad. Sci., Paris, Sér. A **268**, 495–496 (1969).
11. – Sur la théorie des martingales. C. r. Acad. Sci., Paris, Sér. A **268**, 552–554 (1969).
12. – Sur la construction de variables arrêtées d'espérance infinie. C. r. Acad. Sci. Paris, Sér. A **269**, 926–927 (1969).
13. Meyer, P.A.: «Guide détaillé de la théorie ‹générale› des processus» dans «Séminaire de probabilités II», p. 140–165; Lecture notes in mathematics **51**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
14. – Probabilités et potentiel. Paris: Hermann 1966.
15. – «Un résultat élémentaire sur les temps d'arrêt», dans «Séminaire de Probabilités III», p. 152–154; Lecture notes in mathematics **88**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967/1968.
16. – Processus de Markov; Lecture notes in mathematics **26**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
17. – «Un lemme de théorie des martingales», dans «Séminaire de probabilités III», p. 143; Lecture notes in mathematics **88**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967/1968.
18. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris: Masson 1964.
19. Snell, J.L.: Applications of martingale system theorems. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 293–312 (1952).

Prof. J.-F. Mertens
University of Louvain,
and Berkeley,
C.O.R.E.
54, de Croylaan
B-3030 Heverlee
Belgium

(Reçu le 15 juin 1970)