Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 31, 35–46 (1974)

Zuverlässige Inspektionsstrategien

Eckhard Höpfinger

1. Einleitung

Das in dieser Arbeit betrachtete Zweipersonennullsummenspiel kann als Modell des folgenden Konfliktes aufgefaßt werden:

Der erste Spieler, i.f. Aggressor genannt, wünscht während eines festen Zeitraumes einen bestehenden ökonomischen oder politischen Zustand durch eine sog. Aggression zu verändern. Dagegen ist der zweite Spieler, i.f. als Inspektor bezeichnet, an einer Aufrechterhaltung des Zustandes interessiert. Im Rahmen eines Budgets kann der Inspektor sog. Inspektionen ausführen, wobei eine Inspektion eine im Gange befindliche Aggression scheitern läßt. Die Aggression sei von solcher Bedeutung, daß sie höchstens einmal unternommen wird.

Zur Veranschaulichung seien drei Beispiele gegeben:

1. Nach einem Abrüstungsabkommen zwischen zwei Staaten darf der Inspektor des ersten Staates eine Anzahl von Inspektoren zur Kontrolle der Einhaltung des Abkommens durchführen. Insgesamt können nur N verdächtige Ereignisse auftreten. Die spieltheoretische Analyse findet sich in [Dr] für eine spezielle Nutzenfunktion und eine vorgegebene Anzahl von Inspektionen.

2. Kontrolle der kerntechnischen Anlagen eines Staates durch eine übernationale Überwachungsorganisation, um die militärische Verwendung von nuklearem Material zu verhindern. Eine Inspektion kann aus der Kontrolle des Durchflusses einer Atomanlage bestehen. Dieses Problem ist ausführlich dargestellt in [Bi].

3. Ein Produzent habe in einem Markt eine beherrschende Stellung inne. Ein weiterer Produzent versucht durch konzentrierte und aufwendige Werbung für ein gleichartiges Produkt einen großen Marktanteil zu erreichen. Die Abwehrmaßnahmen des ersten Produzenten bestehen ebenfalls aus Werbeaktionen, für die ein gewisses Budget vorgesehen ist. Bei konservativem Käuferverhalten ist der Versuch des Konkurrenten, einen größeren Marktanteil zu erobern, gescheitert, falls die Werbeaktionen beider Produzenten simultan ablaufen.

Es werden solche Inspektionsspiele betrachtet, in welchen der Aggressor die Zeitpunkte bereits durchgeführter Inspektionen kennt und somit die Höhe der verbrauchten Mittel. Während in [Bi] der Inspektor in einem unendlichen Zeitraum unendlich viele Inspektionen durchführen kann, wobei er im Mittel je Zeiteinheit eine gewisse Anzahl nicht überschreiten darf, und in [Dr] das Budget auch dem Aggressor bekannt ist, wird hier das Budget des Inspektors in einem Zufallsexperiment festgelegt. Die Realisierung des Experiments sei dem Aggressor nicht bekannt.

Von den auftretenden Fragen interessiert besonders die Festlegung der Zufallsexperimente, für welche der Inspektor eine „zuverlässige" Inspektionsstrategie besitzt. Eine Strategie des Inspektors sei dabei in Anlehnung an [Bi] als zuverlässig bezeichnet, falls „nichtaggressives Verhalten" optimal gegen diese Inspektionsstrategie ist. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz zuverlässiger Inspektionsstrategien angegeben, wobei die Existenz konstruktiv gezeigt wird.

2. Das Modell

Wir betrachten ein Zweipersonennullsummenspiel über $N \in \mathbb{N}$ (Zeit-)Stufen und vollständiger Erinnerung beider Spieler. Eine Partie beginnt mit der Bestimmung des Budgets U_0 in einem Zufallsexperiment. U_0 wird als diskrete Zufallsgröße angesehen mit der Verteilung R:

$$P(U_0 = r) = R_r (r \in C = \{0, 1, \dots, N\}) \tag{2.1}$$

mit $\sum_{r=0}^{N} R_r = 1$. R kann also mit dem Vektor $(R_r)_{r \in C}$ identifiziert werden. $U_0 = r$ wird angesehen als das Budget, das für die Ausführung von r Inspektionen notwendig ist. Dem Aggressor sei $R = (R_r)$, nicht aber die Realisation $\hat{U}_0 \in C$ bekannt.

Alle für die Spieler vor Ausführung eines Zuges relevanten Informationen werden als Vorgeschichte bezeichnet. Die Menge H_k der Vorgeschichten vor Ausführung der $(k+1)$-ten Züge der beiden Spieler sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} &H_0 = \{(r, 0) | r \in C\} \\ &H_k = \{(r, z, J_k) | r \in C, z \in \{0, 1, \dots, k\}, J_k \in \{0, 1\}^k, r \geqq |J_k|\} \qquad (k = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei sei $z = 0$, falls in den ersten k Stufen keine Aggression stattgefunden hat; $z \in \{1, \dots, k\}$ gibt die (Zeit-)Stufe der Aggression an. $r \in C$ bezeichnet die Höhe des Budget, d.h. die Anzahl der Inspektionen welche der Inspektor in dieser Partie ausführen kann. Die i-te Komponente j_i von $J_k = (j_1, \dots, j_k\}$ sei genau dann gleich 1, wenn in der i-ten Stufe inspiziert wurde. Wir definieren

$$|J_k| = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ j_1 + \dots + j_k, & k > 0 \end{cases}$$

(J_0 wird gleich der leeren Menge $\emptyset$ gesetzt). $|J_k|$ ist die Anzahl der bereits durchgeführten Inspektionen. Es ist $r \geqq |J_k|$, da das Budget nicht überschritten werden darf.

Die (endliche) Menge Γ an Partien ist gegeben durch

$$\Gamma = \{(r, z, J_N) | r \in C, z \in C, J_N \in \{0, 1\}, r \geqq |J_N|\}.$$

Wird in (2.2) für k der Wert N zugelassen, so ist $\Gamma = H_N$.

Die Auszahlung $a \colon \Gamma \to \mathbb{R}$ an den Aggressor wird definiert durch

$$a(r, z, j_1, \dots, j_N) := \begin{cases} 0, & \text{falls } z = 0 \\ d_z \geqq 0, & \text{falls } z > 0 \text{ und } j_z = 0 \\ -c_z < 0, & \text{falls } z > 0 \text{ und } j_z = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

d_k und $-c_k$ geben jeweils den Nutzen einer erfolgreichen oder gescheiterten Aggression in der k-ten Stufe an.

Eine reine Strategie x des Aggressors ist eine Abbildung der Vorgeschichten $H := \bigcup_{k=0}^{N-1} H_k$ in die Menge $\{0, 1\}$ der Alternativen, wobei

0 „warten", d.h. keine Aggression in der folgenden Stufe,
1 Aggression in der folgenden Stufe bezeichnet.

Da die Menge X der reinen Strategien i.allg. für Definitheit des Inspektionsspieles nicht ausreicht, lassen wir für den Aggressor sog. Verhaltensstrategien zu. Die Menge $V(X)$ der Verhaltensstrategien des Aggressors wird definiert durch:

$$\begin{aligned} V(X) = \{\chi\colon H \to [0, 1] \mid \chi(r, z, J_k) = \chi(|J_k|, z, J_k), \\ \chi(r, z, J_k) = 0 \text{ für } z > 0;\ (r, z, J_k) \in \mathrm{H}\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\chi(h) \in [0, 1]$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Aggressor bei Vorliegen der Vorgeschichte h in der nächsten Stufe die Alternative 1 wählt. Die erste Bedingung in (2.4) sagt aus, daß der Aggressor nur (z, J_k), nicht aber r kennt (für die Tragweite solcher „unvollständiger Informationsausnutzung" bei stochastischen Spielen sei auf [Ki] verwiesen). Statt $\chi(r, z, J_k)$ werden wir häufig $\chi(z, J_k)$ schreiben. Die zweite Bedingung in (2.4) verhindert die mehrmalige Durchführung einer Aggression. $\chi \in V(X)$ ist reine Strategie genau dann, wenn $\chi\colon H \to \{0, 1\}$ gilt.

Eine reine Strategie y des Inspektors ist eine Abbildung der Vorgeschichten $H = \bigcup_{k=0}^{N-1} H_k$ in die Menge $\{0, 1\}$ der Alternativen, wobei

0 für „warten", d.h. keine Inspektion in der nächsten Stufe,
1 für inspizieren in der nächsten Stufe steht.

Im allgemeinen ist es notwendig, weitere Strategien für den Inspektor zuzulassen. Die Menge $V(Y)$ der Verhaltensstrategien des Inspektors wird definiert durch:

$$V(Y) = \{\psi\colon H \to [0, 1] \mid \psi(r, z, J_k) = \psi(r, 0, J_k), \psi(|J_k|, z, J_k) = 0, (r, z, J_k) \in H\} \tag{2.5}$$

$\psi(h) \in [0, 1]$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, im nächsten Zug die Alternative 1 zu wählen. Die erste Bedingung legt fest, daß der Inspektor die für den weiteren Verlauf einer Partie unerhebliche Information über eine Aggression nicht berücksichtigt, die zweite, daß das Budget nicht überschritten werden darf. Auf Grund der ersten Bedingung schreiben wir häufig $\psi(r, J_k)$ statt $\psi(r, z, J_k)$. Eine Strategie $\psi \in V(Y)$ kann als reine Strategie genau dann angesehen werden, wenn $\psi\colon H \to \{0, 1\}$ gilt. Außerdem sei

$$\psi_0(h) = 1 - \psi(h); \qquad \psi_1(h) = \psi(h) \qquad (h \in H).$$

Durch ein Paar $(\chi, \psi) \in V(X) \times V(Y)$ von Verhaltensstrategien werden Wahrscheinlichkeitsmaße $P^k_{\chi,\psi}$ auf den Potenzmengen $\mathfrak{P}(H_k)$ der Vorgeschichten H_k und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P^N_{\chi,\psi}$ auf $\mathfrak{P}(\Gamma)$ definiert. Zunächst wird durch ein $\psi \in V(Y)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^k_ψ auf $\mathfrak{P}(\{(r, J_k) \mid r \in C, J_k \in \{0, 1\}^k, r \geqq |J_k|\})$ wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} &P^0_\psi(r) = R_r && (r \in C) \\ &P^k_\psi(r, j_1, \ldots, j_k) = R_r\, \psi_{j_1}(r) \prod_{l=2}^{k} \psi_{j_l}(r, j_1, \ldots, j_{l-1}) && (1 \leqq k \leqq N;\ j_1, \ldots, j_k \in \{0, 1\}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dann ist $P^k_{\chi,\psi}$ gegeben durch:

$$P^0_{\chi,\psi}(r,0)=R_r, \qquad k=0$$

$$P^k_{\chi,\psi}(r,z,j_1,\ldots,j_k)=P^k_\psi(r,j_1,\ldots,j_k)$$

$$\cdot\begin{cases}\chi(0), & z=1,\ 1\leqq k\leqq N \\ (1-\chi(0))\prod_{l=2}^{z-1}(1-\chi(0,j_1,\ldots,j_{l-1}))\,\chi(0,j_1,\ldots,j_{z-1}), & z>1,\ 1\leqq k\leqq N \\ (1-\chi(0))\prod_{l=2}^{k}(1-\chi(0,j_1,\ldots,j_{l-1})), & z=0,\ 1\leqq k\leqq N.\end{cases} \tag{2.7}$$

Setzen die beiden Spieler die Strategien χ und ψ ein, so ist der Auszahlungserwartungswert $A(R,\chi,\psi)$ gleich

$$\begin{aligned}A(R,\chi,\psi)&=\sum_{\gamma\in\Gamma}P^N_{\chi,\psi}(\gamma)\,a(\gamma)\\&=\sum_{k=1}^N\sum_{(r,k,j_1,\ldots,j_N)\in\Gamma,\,j_k=0}P^N_{\chi,\psi}(\gamma)\,d_k-\sum_{k=1}^N\sum_{(r,k,j_1,\ldots,j_N)\in\Gamma,\,j_k=1}P^N_{\chi,\psi}(\gamma)\,c_k.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (2.7) kann man durch elementare Umformungen die nachfolgende Formel erhalten:

$$\begin{aligned}A(R,\chi,\psi)=\sum_{k=1}^N&\sum_{J_{k-1}\in\{0,1\}^{k-1}}\chi(0,J_{k-1})\\&\cdot\sum_{r=|J_{k-1}|}^N P^{k-1}_{\chi,\psi}(r,0,J_{k-1})\,[d_k-\psi(r,J_{k-1})\,(c_k+d_k)].\end{aligned} \tag{2.8}$$

Da dieses Inspektionsspiel $(V(X),V(Y),A(R,.))$ ein Spiel mit vollständiger Erinnerung ist, läßt sich nach [Ku] jeder Verhaltensstrategie eine äquivalente gemischte Strategie und umgekehrt zuordnen. Da die Mengen X und Y der reinen Strategien beider Spieler endlich sind, ist $(V(X),V(Y),A(R,.))$ definit mit einem Spielwert $v(R)$, und beide Spieler besitzen optimale Strategien.

Bereits für $N=2$ Stufen lassen sich optimale Strategien für beide Spieler nicht mehr in durchsichtiger Weise angeben (vgl. [Hö]). Wir werden uns daher auf die von den Beispielen her interessante Frage der Bestimmung aller Verteilungen R mit zulässigen Inspektionsstrategien beschränken und eine solche Strategie angeben.

Definition 1. $\psi\in V(Y)$ heißt zuverlässig, wenn $A(R,\chi,\psi)\leqq 0$ ist für jedes $\chi\in V(X)$.

Ist ψ zuverlässig, so bilden ψ und χ^0, definiert durch $\chi^0(h)=0\,(h\in H)$, einen Sattelpunkt und $v(R)=A(R,\chi^0,\psi)=0$. Ist umgekehrt $v(R)=0$, so ist jede optimale Inspektionsstrategie zuverlässig.

3. Hinreichende Bedingung für $v(R)=0$

Nach Formel (2.7) ist

$$P^{k-1}_{\chi,\psi}(r,0,j_1,\ldots,j_{k-1})=P^{k-1}_\psi(r,j_1,\ldots,j_{k-1})\sum_{l=1}^{k-1}(1-\chi(0,j_1,\ldots,j_{l-1})).$$

Daher folgt aus

$$\sum_{r=|J_{k-1}|}^{N} P_\psi^{k-1}(r, J_{k-1})[d_k - \psi(r, J_{k-1})(c_k + d_k)] \leqq 0 \, (k=1, \ldots, N;\ J_{k-1} \in \{0,1\}^{k-1}) \quad (3.1)$$

nach (2.8) sofort $A(R, \chi, \psi) \leqq 0$. Wählt man umgekehrt zu einem beliebigen $J'_{k-1} \in \{0,1\}^{k-1}$ eine Strategie $\chi \in V(X)$ mit $\chi(0, J'_{k-1}) = 1$ und $\chi(0, J_l) = 0$ für $J_l \neq J'_{k-1}$, so ist $A(R, \chi, \psi)$ gleich dem in (3.1) mit diesem J'_{k-1} auftretenden Term. (3.1) ist also auch für die Zuverlässigkeit von ψ notwendig.

Wir werden zunächst zu einer speziellen Verteilung Z eine zuverlässige Inspektionsstrategie ψ^z konstruieren.

In einer Folge aus N unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit variablen Wahrscheinlichkeiten werde dem Inspektor im k-ten Experiment mit Wahrscheinlichkeit $E_k = \frac{d_k}{c_k + d_k}$ $(k=1, \ldots, N)$ die Mittel für eine Inspektion zugeteilt. Die Wahrscheinlichkeit $Z_i^k (k=1, \ldots, N;\ i=-1, 0, 1, \ldots, N)$, daß der Inspektor in den Bernoulli-Experimenten $k, k+1, \ldots, N$ ein Budget für i Inspektionen erhält, ist gleich:

$$Z_i^k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{j_k, \ldots, j_N \in \{0,1\} \\ j_k + \cdots + j_N = i}} \prod_{l=k}^{N} (E_l)^{j_l} (1-E_l)^{1-j_l} & (i=0, \ldots, N-k+1) \\ 0 & (i=-1, N-k+2, \ldots, N). \end{cases} \quad (3.2)$$

Weiter sei noch Z_i^{N+1} definiert durch

$$Z_i^{N+1} = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Aus (3.2) und (3.3) läßt sich sofort

$$Z_r^k = E_k Z_{r-1}^{k+1} + (1-E_k) Z_r^{k+1} \qquad (k=1, \ldots, N;\ r \in C) \quad (3.4)$$

ableiten. Da die hier auftretenden Summanden nichtnegativ sind, folgt aus $Z_r^k = 0$, daß $E_k Z_{r-1}^{k+1} = 0$ und $(1-E_k) Z_r^{k+1} = 0$ ist. Durch $(Z_r^1)_{r \in C}$ ist eine Verteilung von U_0 mit $P(U_0 = r) = Z_r^1$ festgelegt.

Wir definieren eine Inspektionsstrategie ψ^z durch:

$$\psi^z(r, J_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } Z_{r-|J_k|}^{k+1} = 0 \\ E_{k+1} \dfrac{Z_{r-1-|J_k|}^{k+2}}{Z_{r-|J_k|}^{k+1}}, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (k=0, \ldots, N-1;\ J_k \in \{0,1\}^k). \quad (3.5)$$

Hilfssatz 1. *Für $R = Z$ und $\psi = \psi^z$ gilt*

$$P_\psi^k(r, j_1, \ldots, j_k) = \prod_{l=1}^{k} [(E_l)^{j_l} (1-E_l)^{1-j_l}] Z_{r-j_1-\cdots-j_k}^{k+1} \qquad (r \geqq j_1 + \cdots + j_k).$$

Zum Beweis mit vollständiger Induktion nach wachsendem k bemerken wir zunächst, daß für beliebige Verteilungen R und Strategien $\psi \in V(Y)$ nach (2.6) gilt:

$$P_\psi^{k-1}(r, J_{k-1}) \, \psi_{j_k}(r, J_{k-1}) = P_\psi^k(r, J_{k-1}, j_k) \qquad (r \geqq |J_{k-1}| + j_k) \quad (3.6)$$

Für $k=0$ ist $P_\psi^0(r)=Z_r^1$ nach (2.6) trivial erfüllt. Sei also die Behauptung für $k-1$ erfüllt. Dann folgt nach (3.6)

$$\begin{aligned} P_\psi^k(r,j_1,\ldots,j_k) &= P_\psi^{k-1}(r,j_1,\ldots,j_{k-1})\,\psi_{j_k}(r,j_1,\ldots,j_{k-1}) \\ &= \prod_{l=1}^{k-1}\left[(E_l)^{j_l}(1-E_l)^{1-j_l}\right] Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}\,\psi_{j_k}(r,j_1,\ldots,j_{k-1}). \end{aligned}$$

Ist $Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}=0$, so ist wegen (3.4)

$$(E_k Z^{k+1}_{r-1-j_1-\cdots-j_{k-1}})^{j_k}((1-E_k)Z^{k+1}_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}})^{1-j_k}=(E_k)^{j_k}(1-E_k)^{1-j_k}Z^{k+1}_{r-j_1\ldots j_k}=0$$

und somit das Produkt in Hilfssatz 1 gleich Null, während nach (3.6) und Definition von ψ^z $P_\psi^k(r,j_1,\ldots,j_k)=0$ ist.

Für $Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}>0$ folgt durch Einsetzen des Wertes von ψ^z und der eben durchgeführten Umformung unmittelbar die Behauptung.

Satz 1. *Hat U_0 die Verteilung Z, so ist ψ^z (vgl. (3.5)) eine zuverlässige Inspektionsstrategie.*

Beweis. Wir zeigen, daß für $R=Z$ und $\psi=\psi^z$ in (3.1) Gleichheit vorliegt, d.h. wir verifizieren bei Verwendung von Hilfssatz 1:

$$\sum_{r=j_1+\cdots+j_{k-1}}^{N}\prod_{l=1}^{k-1}\left[(E_l)^{j_l}(1-E_l)^{1-j_l}\right]Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}\left[d_k-\psi^z(r,j_1,\ldots,j_{k-1})(c_k+d_k)\right]=0.$$

Für $Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}>0$ setzen wir ψ^z (vgl. (3.5)) ein und erhalten durch Voranstellen von Faktoren (auch wenn $Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}=0$ auftritt):

$$\prod_{l=1}^{k-1}[\ldots]\,d_k\left[\sum_{r=j_1+\cdots+j_{k-1}}^{N}Z^k_{r-j_1-\cdots-j_{k-1}}-\sum_{r=j_1+\cdots+j_{k-1}}^{N}Z^{k+1}_{r-1-j_1-\cdots-j_{k-1}}\right]=0,$$

weil beide Summen in der zweiten Klammer den Wert 1 ergeben.

Hat U_0 eine Verteilung R, nach der das Budget eher größer als bei der Verteilung Z ist, so wird vermutlich zu R ebenfalls eine zuverlässige Inspektionsstrategie existieren. Wir werden eine Klasse solcher Verteilungen von U_0 durch ein einfaches Kriterium festlegen und konstruktiv nachweisen, daß zu ihnen zuverlässige Inspektionsstrategien existieren.

Definition 2. S bestehe genau aus den Verteilungen R von U_0, für die gilt:

$$\sum_{r=i}^{N}R_r \geqq \sum_{r=i}^{N}Z_r^1 \qquad (i=1,\ldots,N). \tag{3.7}$$

Da ψ^z i.allg. nicht zuverlässig für eine beliebige Verteilung $R\in S$ ist, geben wir eine homogene Markoffsche Kette $(U_t \mid t\in\{0,1,\ldots,N+1\})$ an, wobei nach Umbezeichnung der Zustände U_{N+1} die Verteilung Z hat.

Die Menge der Zustände sei $C\cup \not{C}$ mit $\not{C}=\{\not{i}\mid i\in C\}$. Nach Voraussetzung ist $P(U_0=i)=R_i$ für $i\in C$ und somit $P(U_0=j)=0$ für $j\in C$. Die Übergangsmatrix (p_{kl})

wird definiert mittels der folgenden Größen $w_i \in [0, 1]$ für $R \in S$:

$$w_i = \begin{cases} \dfrac{Z_i^1}{\sum\limits_{r=i}^{N} R_r - \sum\limits_{r=i+1}^{N} Z_r^1}, & \text{falls } \sum\limits_{r=i}^{N} R_r > \sum\limits_{r=i+1}^{N} Z_r^1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i \in C), \tag{3.8}$$

$$p_{kl} = P(U_{i+1} = l \mid U_i = k) = \begin{cases} 1, & k = l \in \not{C} \\ w_k, & \not{k} = l \in \not{C} \\ 1 - w_k, & l + 1 = k \in C \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (i \in C).$$

Ein Übergang kann als eine Art Sparprogramm des Inspektors gedeutet werden: Falls nicht bereits ein absorbierender Zustand ($\in \not{C}$) erreicht wurde, wird mit Wahrscheinlichkeit $1 - w_k$ das Budget um 1 verkleinert.

Definieren wir noch $P(r \mid i) = P(U_{N+1} = \not{i} \mid U_0 = r)$, so folgt unmittelbar

$$P(r \mid i) = w_i \prod_{l=i+1}^{r} (1 - w_l) \qquad (i, r \in C, i \leqq r) \tag{3.9}$$

und

$$P(U_{N+1} = j) = \begin{cases} 0, & j \in C \\ \sum\limits_{r=i}^{N} R_r P(r \mid i), & j = \not{i} \in \not{C}. \end{cases}$$

Der Nachweis von $P(U_{N+1} = \not{i}) = Z_i^1$ $(i \in C)$ ergibt sich somit aus dem folgenden

Hilfssatz 2. $Z_i^1 = \sum\limits_{r=i}^{N} R_r P(r \mid i)$ $(i \in C)$.

Beweis. Aus (3.8) folgt $Z_i^1 = w_i \left(\sum\limits_{r=i}^{N} R_r - \sum\limits_{r=i+1}^{N} Z_r^1 \right)$. Für $i = N$ ist $R_N P(N \mid N) = R_N w_N$ und somit nach der soeben abgeleiteten Formel gleich Z_N^1. Sei jetzt die Behauptung erbracht für $r = N, N-1, \ldots, i+1$.

Dann folgt

$$\begin{aligned} Z_i^1 &= w_i \left(\sum_{r=i}^{N} R_r - \sum_{l=i+1}^{N} \sum_{r=l}^{N} R_r P(r \mid l) \right) \\ &= w_i \left(\sum_{r=i}^{N} R_r - \sum_{r=i+1}^{N} R_r \sum_{l=i+1}^{r} P(r \mid l) \right) \\ &= w_i \left(R_i + \sum_{r=i+1}^{N} R_r \left[1 - \sum_{l=i+1}^{r} w_l \prod_{m=l+1}^{r} (1 - w_m) \right] \right). \end{aligned}$$

Da für beliebige reelle w_m $(m \in C)$ der Term in der Klammer [ ] gleich $\prod_{l=i+1}^{r}(1 - w_l)$ ist, folgt sofort die Behauptung.

Wir führen noch weitere Abkürzungen ein:

$$P(r \mid i, j_1, \ldots, j_k) = P(r \mid i)\, \psi_{j_1}^z(i)\, \psi_{j_2}^z(i, j_1) \ldots \psi_{j_k}^z(i, j_1, \ldots, j_{k-1})$$
$$\cdot (r, i \in C;\ r \geqq i;\ k \in \{1, \ldots, N\};\ j_1, \ldots, j_k \in \{0, 1\};\ i \geqq j_1 + \cdots + j_k). \tag{3.10}$$

Insbesondere gilt dann die Rekursionsformel:

$$P(r|i, J_{k-1}, j_k) = P(r|i, J_{k-1})\, \psi^z_{j_k}(i, J_{k-1}). \tag{3.11}$$

$$P(r|J_k) = \sum_{i=|J_k|}^{r} P(r|i, J_k) \quad (r \geqq |J_k|), \tag{3.12}$$

$$P(r, J_k|i) = \begin{cases} \dfrac{P(r|i, J_k)}{P(r|J_k)}, & \text{falls } P(r|J_k) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.13}$$

$$(r, i \in C;\ i \leqq r;\ k \in \{1, \dots, N\}, i \geqq |J_k|)$$

$P(r, J_k|i)$ ist eine Schätzung des „Sparbudgets" i, falls nur das ursprüngliche Budget r und die „Inspektionenvorgeschichte" J_k bekannt sind.

Unter Verwendung der in (3.5) definierten Strategie ψ^z sei dann eine Strategie $\psi \in V(Y)$ definiert durch:

$$\psi_{j_k}(r, J_{k-1}) := \sum_{i=|J_{k-1}|}^{r} P(r, J_{k-1}|i)\, \psi^z_{j_k}(i, J_{k-1}) \tag{3.14}$$

$$(k = 1, \dots, N;\ J_{k-1} \in \{0, 1\}^{k-1};\ r \in C;\ r \geqq |J_{k-1}|).$$

Für diese Strategie läßt sich in einem Induktionsbeweis nach k nachweisen, daß $P^k_\psi(r, J_k) = R_r P(r|J_k)$ gilt. Wir verifizieren jetzt, daß ψ das Ungleichungssystem (3.1) löst.

$$\begin{aligned} &\sum_{r=|J_{k-1}|}^{N} P^{k-1}_\psi(r, J_{k-1})[d_k - \psi(r, J_{k-1})(c_k + d_k)] \\ &= \sum_{r=|J_{k-1}|}^{N} R_r P(r|J_k) \left[d_k - \sum_{i=|J_{k-1}|}^{r} P(r, J_{k-1}|i)\, \psi^z(i, J_{k-1})(c_k + d_k)\right] \\ &= \sum_{i=|J_{k-1}|}^{N} \sum_{r=i}^{N} R_r P(r|i, J_{k-1})[d_k - \psi^z(i, J_{k-1})(c_k + d_k)]. \end{aligned}$$

Hinreichend dafür, daß diese zweifache Summe Null ergibt, ist

$$\sum_{r=i}^{N} R_r P(r|i, J_{k-1})[d_k - \psi^z(i, J_{k-1})(c_k + d_k)] = 0 \qquad (i \geqq |J_{k-1}|).$$

Dies ist nach dem Beweis von Satz 1 gesichert, falls $\sum_{r=i}^{N} R_r P(r|i, J_{k-1}) = P^z(i, J_{k-1})$ gilt. Dabei sei $P^z(r, J_{k-1})$ definiert als $P^{k-1}_\psi(r, J_{k-1})$ für $R = Z$ und $\psi = \psi^z$. Wir führen einen Induktionsbeweis nach k aus.

Für $k = 1$ lautet die Behauptung $\sum_{r=i}^{N} R_r P(r|i) = Z^1_i$, die in Hilfssatz 2 bereits bewiesen wurde. Ist die Behauptung für $k = 1$ bewiesen, so folgt der Reihe nach mit (3.11), Induktionsannahme und (3.6):

$$\begin{aligned} \sum_{r=i}^{N} R_r P(r|i, J_{k-1}, j_k) &= \sum_{r=i}^{N} R_r P(r|i, J_{k-1})\, \psi^z(i, J_{k-1}) = P^z(i, J_{k-1})\, \psi^z(i, J_{k-1}) \\ &= P^z(i, J_{k-1}, j_k). \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des folgenden Satzes bewiesen.

Satz 2. *Zu einer Verteilung* $R=(R_r)_{r\in C}$ *existiert genau dann eine zuverlässige Inspektionsstrategie, falls* $R\in S$, *d.h.* (3.7) *gilt. Zu* $R\in S$ *ist eine zuverlässige Inspektionsstrategie in* (3.14) *definiert.*

Den Nachweis, daß $R\in S$ notwendig für die Existenz einer zuverlässigen Strategie ist, werden wir im anschließenden Abschnitt führen. Mittels Satz 2 läßt sich die Verteilung Z wie folgt charakterisieren.

Corollar. *Sei* $E(R)=\sum_{r=0}^{N} rR_r$ *der Erwartungswert von* U_0, *wenn* U_0 *die Verteilung* R *hat. Dann gilt:*

1. $E(R)\geqq E(Z)$ *für jedes* $R\in S$.
2. *Ist* $E(R)=E(Z)$ *und* $R\in S$, *so ist* $R=Z$.
3. $E(Z)=\sum_{k=1}^{N} E_k$.

Beweis.

1. $E(R)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=i}^{N} R_r \underset{(3.7)}{\geqq} \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=i}^{N} Z_r^1 = E(Z)$.

2. $E(R)=E(Z)$ und $R\in S$ ist nur möglich, falls $\sum_{r=i}^{N} R_r=\sum_{r=i}^{N} Z_r^1 (i=1,\ldots,N)$. Also folgt $R_i=\sum_{r=i}^{N} R_r-\sum_{r=i+1}^{N} R_r=\sum_{r=i}^{N} Z_r^1-\sum_{r=i+1}^{N} Z_r^1=Z_i^1$.

3. Folgt sofort aus der Herleitung von Z.

4. Notwendigkeit von $R\in S$ für $v(R)=0$

In diesem Abschnitt beweisen wir in einem Induktionsbeweis nach der Anzahl N der Stufen, daß die Bedingung $R\in S$ (3.7) auch notwendig dafür ist, daß zu $R=(R_r)$ eine zuverlässige Inspektionsstrategie existiert. Für $N=1$ ist $A(R,\chi,\psi)=\chi(0)\sum_{r=0}^{1} R_r[d_1-\psi(r)(c_1+d_1)]\geqq\chi(0)[d_1-R_1(c_1+d_1)]$. Der letzte Term ist $\leqq 0$ für jedes $\chi(0)\in[0,1]$ genau dann, wenn $R_1\geqq\dfrac{d_1}{c_1+d_1}=Z_1^1$.

Es sei nun für alle $(N-1)$-stufigen Spiele bereits nachgewiesen, daß aus der Existenz einer zuverlässigen Strategie die Gültigkeit von (3.7) folgt. Dabei ist Z nach (3.2) festgelegt und kann somit als Wert einer Abbildung der Menge von Auszahlungsparametervektoren in die Menge der Verteilungsmaße betrachtet werden. Sei $(V(X), V(Y), A(R,.))$ ein N-stufiges Spiel mit einer zuverlässigen Strategie $\psi\in V(Y)$. Nach (3.1) löst ψ die Ungleichungen

$$\sum_{r=0}^{N} R_r[d_1-\psi(r)(c_1+d_1)]\leqq 0, \tag{4.1}$$

$$\sum_{r=j_1+\cdots+j_{k-1}}^{N} R_r\psi_{j_1}(r)\prod_{l=2}^{k-1}\psi_{j_l}(r,j_1,\ldots,j_{l-1})[d_k-\psi(r,j_1,\ldots,j_{k-1})(c_k+d_k)]\leqq 0 \tag{4.2}$$

$$(k=2,\ldots,N;\ j_1,\ldots,j_j\in\{0,1\}).$$

Ist $\sum_{r=0}^{N} R_r\psi_0(r)=0$, so folgt wegen $\psi(r)=1-\psi_0(r)$ trivialerweise

$$-\sum_{s=i}^{N} Z_s^2\sum_{r=1}^{i-1} R_r\,\psi(r)+\left(1-\sum_{s=i}^{N} Z_s^2\right)\sum_{r=i}^{N} R_r\,\psi(r)\leqq\sum_{r=i}^{N}(R_r-Z_r^2)\quad (i=1,\ldots,N-1). \tag{4.3}$$

Für $D^0=\sum_{r=0}^N R_r \psi_0(r)>0$ definieren wir durch

$$R_r^0=\frac{R_r \psi_0(r)}{D^0} \quad (r=0,1,\dots,N-2), \qquad R_{N-1}^0=\frac{R_{N-1}\psi_0(N-1)+R_N\psi_0(N)}{D^0}$$

eine Verteilung $R^0=(R_r^0)_{r=1,\dots,N-1}$ des Budgets eines $(N-1)$-stufigen Spieles. Dann ist durch

$$\psi_{j_k}^0(r,j_2,\dots,j_{k-1})=\psi_{j_k}(r,0,j_2,\dots,j_{k-1}) \quad (0\leqq r\leqq N-2;\ r\geqq j_2+\dots+j_{k-1}),$$

$$\psi_{j_k}^0(N-1,j_2,\dots,j_{k-1})$$
$$=\frac{R_{N-1}\psi_0(N-1)\,\psi_{j_2}(N-1,0)\dots\psi_{j_k}(N-1,0,\dots,j_{k-1}) + R_N\psi_0(N)\,\psi_{j_2}(N,0)\dots\psi_{j_k}(N,0,\dots,j_{k-1})}{R_{N-1}\psi_0(N-1)\dots\psi_{j_{k-1}}(N-1,0,\dots,j_{k-2})+R_N\psi_0(N)\dots\psi_{j_{k-1}}(N,0,\dots,j_{k-1})}$$

(für $k=2$ sind die Argumente r bzw. $(r,0)$ zu verwenden) eine das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{N-1} R_r^0[d_2-\psi^0(r)(c_2+d_2)]\leqq 0\\ &\sum_{r=j_2+\dots+j_{k-1}}^{N-1} R_r^0\,\psi_{j_2}^0(r)\prod_{l=3}^{k-1}\psi_{j_l}^0(r,j_2,\dots,j_{l-1})\,[d_k-\psi^0(r,j_2,\dots,j_{k-1})(c_k+d_k)]\leqq 0\end{aligned} \tag{4.4}$$

lösende Inspektionsstrategie gegeben; denn die Ungleichungen (4.4) sind, mit D^0 multipliziert, Spezialfälle von (4.2). Das System (4.4) gibt die Bedingung für die Zuverlässigkeit von $\psi^0\in V(Y(2))$ in dem $(N-1)$-stufigen Inspektionsspiel $(2, V(X(2)), V(Y(2)), A(2,R^0,.))$ an, das wie $(V(X), V(Y), A(R,.))$ definiert ist, bis auf den Unterschied, daß $N-1$ Stufen vorliegen und die Auszahlungsparameter $c_k'=c_{k+1}$, $d_k'=d_{k+1}$ $(k=1,\dots,N-1)$. Da ψ^0 zuverlässig ist, folgt nach Induktionsannahme $\sum_{r=i}^{N-1}R_r^0\geqq\sum_{r=i}^{N-1}Z_r^2$ $(i=1,\dots,N-1)$. Durch Multiplikation mit D^0 ergeben sich hieraus Spezialfälle von (4.2).

Ein weiteres Ungleichungssystem ergibt sich analog auf folgende Weise: Ist $D^1=\sum_{r=1}^N R_r\psi(r)=0$, so folgt unmittelbar

$$\sum_{s=i}^{N} Z_s^2\sum_{r=1}^{i} R_r\psi(r)+\left(\sum_{s=i}^{N} Z_s^2-1\right)\sum_{r=i+1}^{N} R_r\psi(r)\leqq 0 \quad (i=1,\dots,N-1). \tag{4.5}$$

Für $D^1>0$ definieren wir durch $R_r^1=\dfrac{R_{r+1}\psi(r+1)}{D^1}$ $(r=0,\dots,N-1)$ eine Verteilung $R^1=(R_r^1)_{r=0,\dots,N-1}$ des Budgets des $(N-1)$-stufigen Inspektionsspieles $(2, V(X(2)), V(Y(2)), A(2,R^1,.))$. Durch

$$\psi_{j_k}^1(r,j_2,\dots,j_{k-1})=\psi_{j_k}(r,1,j_2,\dots,j_{k-1}) \quad (r=0,\dots,N-1;\ k=2,\dots,N)$$

(Argumente für $k=2$ sind r und $(r,1)$) ist eine Inspektionsstrategie $\psi^1\in V(Y(2))$ definiert, die das Ungleichungssystem (4.4) löst, wenn dort die oberen Indizes 0 durch 1 ersetzt werden. Durch Multiplikation mit D^1 ergeben diese Ungleichungen nämlich Spezialfälle von (4.2). ψ^1 ist somit zuverlässig in dem $(N-1)$-stufigen Inspektionsspiel $(2, V(X(2)), V(Y(2)), A(2,R^1,.))$. Nach Induktionsannahme gelten die Ungleichungen $\sum_{r=i}^{N-1}R_r^1\geqq\sum_{s=i}^{N-1}Z_s^2$ $(i=1,\dots,N-1)$, die äquivalent zu (4.5) sind. (4.1) formulieren wir neu als

$$-\sum_{r=1}^{N} R_r\,\psi(r) \leqq -E_1 \tag{4.6}$$

und ergänzen noch

$$\left.\begin{aligned}\psi(r)&\leqq 1\\ -\psi(r)&\leqq 0\end{aligned}\right\}\quad (r=1,\dots,N). \tag{4.7}$$

Eine zuverlässige Strategie $\psi\in V(Y)$ löst also nach Induktionsannahme (4.3, 4.5, 4.6, 4.7). Zum Nachweis, daß die Verteilung $R\in S$ sein muß, benützen wir die folgende Form des Galeschen Satzes für lineare Ungleichungen ([Ma], 2.4.10, S. 33):

Für eine gegebene $p\times n$ Matrix A und einen Vektor $c\in\mathbb{R}^p$ hat entweder $Ax\leqq c$ eine Lösung $x\in\mathbb{R}^n$ oder $y^T A=0$, $y^T c<0$, $y\geqq 0$ besitzt eine Lösung $y\in\mathbb{R}^p$ (x Spaltenvektor, y^T Zeilenvektor).

Fassen wir die Koeffizienten des Systems (4.3, 4.5, 4.6, 4.7) in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix A zusammen, so ist $p=4N-1$, $n=N$ und die Elemente von A sind gegeben durch:

$$a_{ij}=\begin{cases} R_j\left(1-\sum\limits_{s=i}^{N} Z_s^2\right), & i=1,\dots,N-1;\ j=i,i+1,\dots,N;\\ -R_j\sum\limits_{s=i}^{N} Z_s^2, & i=2,\dots,N-1;\ j=1,2,\dots,i-1;\\ R_j\left(\sum\limits_{s=i-N+1}^{N} Z_s^2-1\right), & i=N,\dots,2N-2;\ j=i-N+2;\\ R_j\sum\limits_{s=i-N+1}^{N} Z_s^2, & i=N,\dots,2N-2;\ j=1,\dots,i-N+1;\\ -R_j, & i=2N-1;\ j=1,\dots,N\\ 1, & i=2N,\dots,3N-1;\ j=i-2N+1;\\ -1, & i=3N,\dots,4N-1;\ j=i-3N+1;\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die Komponenten von $c\in\mathbb{R}^{4N-1}$ sind gleich

$$c_j=\begin{cases}\sum\limits_{r=i}^{N}(R_r-Z_r^2), & i=1,\dots,N-1;\\ 0, & i=N,\dots,2N-2;\\ -E_1, & i=2N-1;\\ 1, & i=2N,\dots,3N-1;\\ 0, & i=3N,\dots,4N-1.\end{cases}$$

Unter Verwendung von (3.4) kann man sofort die Äquivalenz von (3.7) und $b_i\geqq 0$ $(i=1,\dots,N)$ zeigen, wenn b_i folgendermaßen definiert ist:

$$b_i=\sum_{r=i}^{N}(R_r-Z_r^2)-E_1\,Z_{i-1}^2 \qquad (i=1,\dots,N). \tag{4.8}$$

Ist jedoch $b_1 < 0$, so sei ein $y \in \mathbb{R}^{4N-1}$ durch $y_1 > 0$ beliebig, $y_{2N-1} = (1 - \sum_{s=1}^{N} Z_s^2)\, y_1$ und restliche Komponenten Null gewählt. Man verifiziert sofort $y^T A = 0$, $y^T c = y_1 b_1 < 0$, $y \geqq 0$. Ist $b_i < 0$ für ein $i \in \{2, \ldots, N-1\}$, so sei $y_i > 0$ beliebig gewählt, $y_{N-2+i} = y_i$, $y_{2N-1} = Z_{i-1}^2 y_i$ und die restlichen Komponenten gleich Null gesetzt. Man verifiziert sofort: $y^T A = 0$, $y^T c = y_i b_i < 0$. Ist $b_N < 0$, so sei $y_{2N-2} > 0$, $y_{2N-1} = Z_{N-1}^2 y_{2N-2}$, $y_{3N-1} = R_N y_{2N-1}$ und die restlichen Komponenten gleich Null gewählt. Man erhält sofort $y^T A = 0$, $y^T c = y_{2N-2} b_N < 0$, $y \geqq 0$. Nach dem Galeschen Satz ist also $R \in S$ auch notwendig für $v(R) = 0$.

Für die Übertragung des Resultats auf Modelle mit unendlich vielen Stufen sei auf [Hö] verwiesen.

Literatur

[Bi] Bierlein, D.: Auf Bilanzen und Inventuren basierende Überwachungssysteme. Operations Research Verfahren VIII, 36–43 (1970)

[Dr] Dresher, M.: A sampling inspection problem in arms control agreements: A game theoretic analysis. Rand Corp.: RM-2972-ARPA 1962

[Hö] Höpfinger, E.: Reliable Inspection Strategies (erscheint in Mathematical Systems in Economics, Verlag Anton Hain)

[Ki] Kindler, J.: Definitheitskriterien für nichtstationäre stochastische Spiele; Dissertation, Karlsruhe 1971

[Ku] Kuhn, H.: Extensive Games and the Problem of Information, Contributions to the Theory Games II; Ann. of Math. Studies **28**. Princeton 193–216 (1953)

[Ma] Mangasarian, O.L.: Nonlinear Programming. New York: Mc Graw-Hill 1969

Eckhard Höpfinger
Universität Karlsruhe
Institut für Wirtschaftstheorie
und Operations Research
D-7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 7. Juni 1974)