Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
41, 87 – 114 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Flots filtrés et flots de processus a accroissements independants

Albert Benveniste

Irisa, Université de Rennes, Avenue du Général Leclerc, BP 25 A F-35031 Rennes Cédex

On donne des résultats d'homomorphismes et d'isomorphismes de flots *filtrés* $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ en les comparant aux flots de processus à accroissements indépendants et homogènes, qui sont l'analogue en temps continu (pour ce qui concerne les flots filtrés) des schémas de Bernoulli. Ces résultats sont d'une autre nature que ceux donnés par D.S. Ornstein pour les flots de Bernoulli en théorie ergodique, et sont plutôt à rapprocher du premier théorème de Sinai affirmant que tout système dynamique d'entropie positive et finie $\{X, \mathscr{X}, T, m\}$ admettant P comme générateur, contient une partition Q de Bernoulli (i.e. indépendante de ses translatées $T^n Q$ pour $n \neq 0$) et telle que $Q \subset \bigvee_{n>0} T^n P$.

A titre d'exemple, on montre que le flot canonique $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ du mouvement Brownien (B_t) contient dans son passé le flot du processus de Poisson, en ce sens que l'on peut définir sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ un processus de Poisson (N_t), stationnaire pour (θ_t) $(N_{t+s} - N_t = N_s \circ \theta_t)$, *et adapté à* $(\mathscr{F}_t)$ ($N_s - N_u$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable si $u \leqq t$). On définit également deux types d'isomorphismes de flots filtrés, que l'on étudie dans le cas des flots de processus à accroissements indépendants.

Je remercie P.A. Meyer, dont la question concernant les flots du mouvement Brownien et du processus de Poisson a été à l'origine de ce travail; sa lecture critique d'une première version de cet article a permis d'alléger considérablement certaines démonstrations. Je remercie également J. Jacod: sa collaboration a pour fruit un des résultats cités dans cet article, et dont la démonstration paraîtra ailleurs.

§ 1. Introduction, résultats, conjectures

Ce travail a pour but d'exposer quelques résultats de structure (homomorphi mes, isomorphismes) en théorie des flots filtrés (i.e. des systèmes dynamiques filtrés «en temps continu»), qui est la branche de la théorie des flots qui donne une importance particulière à l'écoulement du temps. Pour bien situer les problèmes, nous allons faire quelques rappels sur les systèmes dynamiques, et énoncer les résultats qui sont connus en temps discret.

1.1. Définition. Un *système dynamique filtré* $=\{X, \mathscr{X}, \mathscr{X}_n, S, m\}$ est la donnée d'un espace probabilisé $\{X, \mathscr{X}, m\}$, d'un automorphisme S de cet espace (bijection bimesurable préservant la mesure m) et d'une *filtration* $(\mathscr{X}_n)_{n\in Z}$, c'est-à-dire d'une famille croissante de sous-tribus de $\mathscr{X}$ telle que $\mathscr{X}_{n+1}=S^{-1}(\mathscr{X}_n)$. Pour simplifier les énoncés, on conviendra que $\mathscr{X}=\mathscr{X}_\infty=\bigvee_n \mathscr{X}_n$.

Nous dirons que deux systèmes dynamiques filtrés $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont *isomorphes* s'il existe $\bar{X}\in\mathscr{X}$ et $\bar{X}'\in\mathscr{X}'$, invariants et de probabilité 1, et une bijection bimesurable Φ de $\{\bar{X}, \mathscr{X}\}$ sur $\{\bar{X}', \mathscr{X}'\}$, échangeant m et m', les filtrations $(\mathscr{X}_n)$ et $(\mathscr{X}_n')$, et telle que $\Phi\circ S=S'\circ\Phi$.

Etant donné deux systèmes dynamiques filtrés $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$, nous disons que $\mathscr{T}$ *contient* $\mathscr{T}'$ *dans son passé* s'il existe une application Φ, mesurable de $\{X, \mathscr{X}_n\}$ dans $\{X', \mathscr{X}_n'\}$ pour tout $n\in Z$, telle que $m'=\Phi(m)$ et $\Phi\circ S=S'\circ\Phi$.

Le modèle le plus simple de système dynamique filtré est celui qui est engendré par une suite stationnaire de variables indépendantes: $\mathscr{T}=\{X, \mathscr{X}_n, S, m\}$ avec $X=\mathbb{R}^Z$, $\mathscr{X}_n=\sigma\{X_m; m\leqq n\}$ est la filtration engendrée par les applications coordonnées $(X_n)_{n\in Z}$, S est défini par $X_{n+1}=X_n\circ S$, et $m=\nu^{\otimes Z}$ où ν est une probabilité sur $\mathbb{R}$; un tel système est appelé *schéma de Bernoulli.*

Les schémas de Bernoulli servent souvent de modèle pour les deux types de comparaison (isomorphisme, inclusion) définis plus haut. Le résultat le plus célèbre d'inclusion est le théorème de Sinai ([17]) qui affirme que tout système dynamique filtré $\mathscr{T}$ (dont l'espace de base $\{X, \mathscr{X}, m\}$ est un espace probabilisé de Lebesgue, c'est-à-dire isomorphe à [0, 1] muni de la mesure de Lebesgue) d'entropie $H(\mathscr{T})$ positive et finie contient dans son passé tout schéma de Bernoulli $\mathscr{T}'$ tel que $H(\mathscr{T}')\leqq H(\mathscr{T})$. Il s'agit d'un résultat difficile, mais certains résultats élémentaires sur les inclusions remontent sans doute à P. Levy:

1.2. Définition. Soit $\{X, \mathscr{X}, m\}$ un espace probabilisé (non nécessairement complet), et $\mathscr{Y}$ une sous-tribu de $\mathscr{X}$. Nous disons que *$\mathscr{X}$ est diffuse conditionnellement à $\mathscr{Y}$* s'il existe une variable aléatoire Z sur $\{X, \mathscr{X}\}$ telle que $m\{Z=T\}=0$ pour toute variable aléatoire $\mathscr{Y}$-mesurable T. Cette condition équivaut à dire qu'il existe une version de la loi conditionnelle régulière m^Z de Z par rapport à $\mathscr{Y}$ $(m^Z(x, dt)=$«$m(Z\in dt/\mathscr{Y})$»$)$ telle que $m^Z(x,\cdot)$ soit diffuse pour tout x.

On a alors le résultat suivant, qui est en fait bien connu depuis P. Levy (voir par exemple Rosenblatt [15]); nous en reproduisons la démonstration car elle est élémentaire: nous dirons qu'un système dynamique filtré $\mathscr{T}=\{X, \mathscr{X}_n, S, m\}$ est *diffus* si la tribu $\mathscr{X}_1$ est diffuse conditionnellement à $\mathscr{X}_0$.

1.3. Théorème. *Si $\mathscr{T}$ est un système dynamique diffus, il contient dans son passé n'importe quel schéma de Bernoulli.*

Démonstration. Soit donc Z une variable $\mathscr{X}_1$-mesurable admettant une version continue pour tout x de la répartition conditionnelle $m\{Z\leqq t\,|\,\mathscr{X}_0\}$; notons $F(x, t)$ cette version, et $F^{-1}(x, t)=\inf\{s\,|\,F(x, s)>t\}$ l'inverse de F. Comme $t\to F(x, t)$ est continu pour tout x, on a pour tout x l'égalité $F(x, F^{-1}(x, t))=t$ pour $0\leqq t<1$. Posons alors $Y(x)=F(x, Z(x))$. Alors, (1.1) la variable Y est $\mathscr{X}_1$-mesurable, de loi uniforme sur [0, 1], et indépendante de $\mathscr{X}_0$.

En effet, on a $\{Y>t\}=\{Z>F^{-1}(\cdot,t)\}$ et, F^{-1} étant $\mathscr{X}_0\times\mathscr{B}(\mathbb{R})$-mesurable, nous pouvons écrire $m(Y>t/\mathscr{X}_0)\overset{\text{p.s.}}{=}F(\cdot,F^{-1}(\cdot,t))=t$. Par conséquent, le schéma de Bernoulli associé à la suite stationnaire de variables indépendantes $(Y\circ S^n)_{n\in Z}$ est contenu dans le passé de $\mathscr{T}$, l'application Φ associant au point $x\in X$ la trajectoire $n\to Y(S^n x)$ qui est un point de $\mathbb{R}^Z$. Pour obtenir un schéma de Bernoulli construit à partir d'une loi donnée v sur $\mathbb{R}$, il nous suffit de remplacer Y par $Y\circ f$, où f est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $v=f(\lambda)$, λ désignant la mesure de Lebesgue sur [0, 1], ce qui est toujours possible.

La question de savoir à quelles conditions un système dynamique filtré est isomorphe à un schéma de Bernoulli est mal connue: les résultats d'isomorphismes de systèmes dynamiques de Ornstein ne répondent pas à cette question. Il existe des conditions suffisantes connues sous le nom de «conditions de Döblin» pour lesquelles on peut par exemple consulter Rosenblatt [15].

Pour en finir avec le temps discret, remarquons que, toutes les lois diffuses étant isomorphes sur $\mathbb{R}$, il est immédiat que *tous les schémas de Bernoulli diffus sont isomorphes*, cet isomorphisme pouvant d'ailleurs être construit coordonnée par coordonnée.

Passons à nos problèmes en temps continu.

1.4. Définition. Un *flot filtré* $\mathfrak{H}=\{\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,\theta_t,\mathbb{P}\}$ est la donnée d'un espace probabilisé $\{\dot{\Omega},\mathscr{F},\mathbb{P}\}$, d'un groupe $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes de $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ tel que l'application $(t,\omega)\to\theta_t\omega$ soit mesurable de $\{\mathbb{R}\times\Omega,\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}\}$ dans $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ et d'une *filtration* $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, c'est-à-dire d'une famille croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$ telle que $\mathscr{F}_{t+s}=\theta_t^{-1}\mathscr{F}_s$. Il est sous-entendu que $\mathscr{F}=\mathscr{F}_{+\infty}=\bigvee_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{F}_t$.

La filtration $(\mathscr{F}_t)$ n'est *jamais* complétée par rapport à $\mathbb{P}$ (cela interdirait la mesurabilité du flot au sens où nous l'entendons), et en général pas continue à droite. De façon générale, pour obtenir de façon simple les conditions de mesurabilité, nous travaillerons systématiquement sur les tribus non complétées. En conséquence, nous n'utiliserons pas les espaces de Lebesgue couramment employés en théorie ergodique. Comme, malgré tout, il nous sera commode (surtout dans les questions d'isomorphismes) d'utiliser des propriétés topologiques sous-jacentes à nos espaces mesurables, nous aurons recours à l'équivalent «non complété» des espaces de Lebesgue: les espaces de Blackwell, pour lesquels nous renvoyons le lecteur à Dellacherie-Meyer [6, chap. III]. Etant donné un espace mesurable $\{\Omega,\mathscr{F}\}$, nous notons $\{\dot{\Omega},\dot{\mathscr{F}}\}$ l'espace mesurable séparé[1] obtenu à partir de $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ en passant au quotient par la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les atomes de $\mathscr{F}$.

1.5. Définition et propriétés. (i) Un espace mesurable $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ est dit *souslinien* s'il existe une bijection bimesurable de $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ sur $\{A,\mathscr{B}(\mathbb{R})\}$, où A est une partie *analytique* (ou souslinienne) de [0, 1], et $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

(ii) Un espace mesurable $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ est appelé *espace de Blackwell* si l'espace séparé $\{\dot{\Omega},\dot{\mathscr{F}}\}$ correspondant est souslinien.

[1] i.e. dont les atomes sont les ensembles réduits à un point

(iii) Soit $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ un espace de Blackwell, et soient $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux sous-tribus *séparables* de $\mathscr{F}$; alors, on a $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ si et seulement si tout atome de $\mathscr{H}$ est réunion d'atomes de $\mathscr{G}$.

(iv) Si $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ est un espace de Blackwell, et si f est une variable aléatoire à valeurs réelles, pour tout $A \in \mathscr{F}$, $f(A)$ est une partie analytique de $\mathbb{R}$.

Nous aurons également, pour les questions d'isomorphisme, recours au *théorème de Souslin-Lusin:* Soient $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ et $\{X, \mathscr{X}\}$ deux espaces mesurables séparables et séparés, et f une application mesurable et *injective* de $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ dans $\{X, \mathscr{X}\}$; alors, si $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ est souslinien, f est un *isomorphisme* entre les espaces mesurables $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ et $\{f(\Omega), \mathscr{X}\}$.

Nous demanderons donc que les flots sur lesquels nous travaillerons satisfassent à l'hypothèse suivante:

1.6. Hypothèse. L'espace mesurable $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ est un espace de Blackwell, et la tribu $\mathscr{F}_0$ est engendrée par une famille dénombrable (f_n) de variables pour lesquelles toutes les trajectoires $t \to f_n(\theta_t \omega)$ sont continues à droite et réglées.

En fait, nous allons voir que l'hypothèse (1.6) est satisfaite par toutes les réalisations canoniques de flots dont nous aurons besoin.

Disons que, en utilisant beaucoup plus systématiquement la théorie générale des processus que nous ne le ferons, nous aurions pu nous affranchir de toute hypothèse pour les résultats d'inclusion, et nous contenter des espaces de Lebesgue et de leurs propriétés (P. Shields [16]) pour les questions d'isomorphisme. Mais il nous aurait fallu utiliser les techniques plus lourdes de Benveniste [2], et faire un grand usage de la tribu des ensembles aléatoires prévisibles, ce que nous avons préféré éviter par souci de simplicité.

Nous introduisons maintenant l'analogue en temps continu des schémas de Bernoulli: ce sont *les flots de processus à accroissements indépendants et homogènes (en abrége P.A.I.)*. Rappelons ce qu'est la réalisation canonique d'un tel flot, en précisant (cf. Dellacherie-Meyer [6, chap. IV] que l'espace mesurable $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ ci-dessous est Souslinien (il est même Lusinien), donc en particulier de Blackwell.

On commence par définir $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, Z_t\}$ ainsi:

– Ω est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues à droite et réglées, nulles à l'origine;

– $Z_t(\omega) = \omega(t)$ est la famille des applications coordonnées;

– θ_t est défini par $Z_{t+s} - Z_t = Z_s \circ \theta_t$ pour tout $s \in \mathbb{R}$;

– $\mathscr{F}_t = \sigma\{Z_s - Z_u;\, s, u \leqq t\}$.

Comme $\mathscr{F}_0 = \sigma\{Z_t, t \in Q, t \leqq 0\}$, l'hypothèse (1.6) est bien satisfaite. Soit alors $\psi(u)$ une fonction de type négatif sur $\mathbb{R}$; il existe une loi $\mathbb{P}$ unique sur $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ telle que l'on ait, pour toute famille *finie* (t_n) de réels telle que $t_n < t_{n+1}$

$$E(\exp i(\sum_n u_n(Z_{t_{n+1}} - Z_{t_n}))) = \exp(\sum_n (t_{n+1} - t_n)\, \psi(u_n))$$

quels que soient les réels u_n. Il est clair que $\mathbb{P}$ est alors invariante par (θ_t), et que $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus à accroissements indépendants et homogènes pour la loi $\mathbb{P}$; nous dirons de $\psi(u)$ qu'elle est sa *fonction de Lévy*. Dans la suite, nous excluons le cas trivial de la translation uniforme correspondant à $\psi(u) = iu\alpha$. Les cas les plus importants sont ceux du mouvement brownien où $\psi(u)=u^2/2$ ($\mathbb{P}$ étant alors la mesure de Wiener), et du processus de Poisson de paramètre 1 (que nous appellerons simplement «processus de Poisson») où $\psi(u)=e^{iu}-1$.

1.7. Définition. Un flot filtré $\mathfrak{H}=\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ est dit *diffus* s'il existe $t_0 \geqq 0$, et une variable $\mathscr{F}_0$-mesurable Z, telle que $\mathbb{P}\{Z \circ \theta_U = V\}=0$ pour tout couple de variables (U, V) $\mathscr{F}_0$-mesurables tel que $U > t_0$.

Il s'ensuit donc que, pour $t > t_0$, chaque automorphisme θ_t (t étant fixé, on regarde les puissances θ_{nt} de l'automorphisme θ_t) définit un système dynamique diffus; mais la condition exigée est plus forte que cette seule propriété, puisqu'elle fait intervenir toutes les variables $\mathscr{F}_0$-mesurables et $> t_0$, et non pas seulement les constantes.

Voyons quels sont les flots de P.A.I. qui sont diffus. Soit $\psi(u)$ une fonction de Lévy; nous disons qu'elle définit un *P.A.I. du type de Poisson* (on dit aussi *processus de Poisson composé*) si sa représentation à l'aide de la formule de Lévy-Hinčin est de la forme

$$\psi(u)=i\,u\,\alpha+\int(e^{iux}-1)\,\mu(dx)$$

où μ est une mesure positive *bornée* sur $\mathbb{R}$, ne chargeant pas $\{0\}$, dite *mesure de Lévy* du P.A.I. Autrement dit le P.A.I. défini par $\psi(u)$ n'a pas de partie gaussienne et, à condition de retrancher la translation uniforme correspondant au coefficient de translation $iu\alpha$, reste p.s. un temps >0 en zéro avant de le quitter. La loi du premier temps de saut T est alors une loi exponentielle de paramètre $\mu(\mathbb{R})$. Le résultat suivant, dont nous reproduisons la démonstration au § 3 pour être complet, est dû à P.A. Meyer [11]:

1.8. Proposition. *Let flot canonique d'un P.A.I. est diffus si et seulement si ce P.A.I. n'est pas du type de Poisson; dans ce cas, on peut prendre* $t_0=0$ (cf. définition 1.7).

Voici maintenant le résultat d'inclusion (démonstration au § 3):

1.9. Théorème. *Soit* $\mathfrak{H}=\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ *un flot diffus. On peut alors définir sur* $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ *un P.A.I.* $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *dont la loi peut étre choisie arbitraire, et tel que*

(i) $Z_{t+s}-Z_t=Z_s\circ\theta_t$;

(ii) *la variable* (Z_s-Z_u) *est* $\mathscr{F}_t$*-mesurable pour tous* $s, u \leqq t$.

Ce resultat, qui exprime que tout flot diffus contient dans son passé n'importe quel flot de P.A.I., répond par l'affirmative à la question suivante, posée par P.A. Meyer: le flot du mouvement Brownien contient-il le flot du Processus de Poisson dans son passé? Par contre, ce résultat ne permet pas de conclure quant à l'inclusion inverse, puisque le flot de Poisson n'est pas diffus. Pourtant, cette inclusion ne paraît pas improbable à la lumière des résultats suivants concernant les processus ponctuels stationnaires.

La réalisation canonique du flot d'un processus ponctuel stationnaire peut se décrire ainsi: Ω est l'ensemble des fonctions en escalier (continues à droite) à sauts unité, nulles à l'origine, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est la famille des applications coordonnées; (θ_t) est défini par $N_{t+s}-N_t=N_s\circ\theta_t$; $\mathscr{F}_t=\sigma\{N_s-N_u;\ s, u\leqq t\}$; P est une probabilité (θ_t)-invariante sur $\{\Omega, \mathscr{F}\}$, c'est la loi du processus ponctuel (N_t). Remarquons que, ici encore, l'hypothèse (1.6) est satisfaite.

Un cas intéressant est celui des *processus de renouvellement de loi* ν: il correspond au cas où les intervalles successifs entre les auts de $(N_t)_{t>0}$ sont des variables indépendantes de loi ν, ν étant une loi de moyenne finie sur $\mathbb{R}_+$. On a à leur sujet le résultat suivant (démonstration § 3).

1.10. Proposition. *Soit ν une loi diffuse, à support borné sur $\mathbb{R}_+$; alors le flot canonique du processus de renouvellement de loi ν est un flot diffus.*

Autrement dit, si nous prenons pour ν une exponentielle tronquée arbitrairement loin, le flot correspondant, qui diffère «peu» du flot de Poisson, contient le flot du mouvement Brownien dans son passé.

Concernant les processus de Poisson, on a néanmoins un résultat. On montre (Jacod [7], Benveniste-Jacod [3]) que certains processus ponctuels, dits «quasi-continus à gauche», satisfont à la propriété suivante: il existe un processus croissant continu $(I_t)_{t\in\mathbb{R}}$, nul à l'origine, adapté à $(\mathscr{F}_t)$ (la variable $(I_s - I_u)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable pour $s, u \leqq t$) et additif en ce sens que $I_{t+s} - I_t = I_s \circ \theta_t$, tel que le processus $(N_t - I_t)_{t\geqq 0}$ soit une martingale locale sur $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P}\}$. Le processus (I_t) s'appelle *l'intensité stochastique du processus ponctuel*, et détermine entièrement la loi de celui-ci. Le cas du processus de Poisson de paramètre α (dont la fonction de Lévy est $\psi(u) = \alpha(e^{iu} - 1)$) correspond au cas où $I_t = \alpha t$ (Kunita-Watanabe [8]). On a alors le résultat suivant, qui montre en particulier que le Processus de Poisson de paramètre α contient dans son passé tout processus de Poisson de paramètre $\beta \leqq \alpha$.

1.11. Théorème. *Soit $\mathfrak{H} = \{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, N_t, \mathbb{P}\}$ la réalisation canonique d'un processus ponctuel quasi-continu à gauche dont l'intensité stochastique (I_t) satisfait à la condition $I_t \geqq t$ pour $t \geqq 0$ (ce qui signifie heuristiquement que (N_t) est «plus fréquent» que le processus de Poisson). Alors, ce flot contient dans son passé le flot du processus de Poisson, ce qui signifie que l'on peut définir sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ un processus de Poisson (Z_t), adapté (ce qui signifie que la variable $Z_s - Z_u$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable si $s, u \leqq t$) et additif (ce qui signifie que $Z_{t+s} - Z_t = Z_s \circ \theta_t$).*

Voyons maintenant les questions d'isomorphismes de flots filtrés. Bien entendu, la définition naturelle d'un isomorphisme est, comme en temps discret, la suivante:

1.12. Définition. Soient $\mathfrak{H} = \{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ et $\mathfrak{H}' = \{\Omega', \mathscr{F}'_t, \theta'_t, \mathbb{P}'\}$ deux flots filtrés. Ils sont dits *isomorphes* s'il existe $W \in \mathscr{F}$, $W' \in \mathscr{F}'$, tous deux invariants et pleins, et une bijection Φ de W sur W', échangeant les filtrations $\overline{\mathscr{F}}_{t/W}$ et $\overline{\mathscr{F}}'_{t/W}$ (respectivement *complétées* par rapport à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ des filtrations $\mathscr{F}_{t/W}$ et $\mathscr{F}'_{t/W'}$), les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$, et telle que $\Phi \circ \theta_t = \theta'_t \circ \Phi$.

Contrairement à ce qui se passe en temps discret, nous allons voir que les isomorphismes de flots de P.A.I. exigent des conditions très fortes, et que le caractère diffus ne suffit en aucun cas. A cet effet, rappelons que la formule de Lévy-Hinčin permet d'écrire toute fonction de Lévy $\psi(u)$ sous la forme

$$\psi(u) = iu\alpha - \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \int_{|x|\leqq 1} (e^{iux} - 1 - iux)\, \mu(dx) + \int_{|x|>1} (e^{iux} - 1)\, \mu(dx),$$

où la variance σ^2, et la *mesure de Lévy* μ (qui est une mesure positive sur $\mathbb{R}$, ne chargeant pas $\{0\}$, et telle que $\int |x|^2 \wedge 1\, \mu(dx) < +\infty$) sont déterminés de manière unique. On a alors le résultat suivant, dont la démonstration, qui ne relève pas de la théorie des flots, paraîtra dans Benveniste-Jacod [4]).

1.13. Théorème. *Soient $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ les réalisations canoniques des flots de deux P.A.I. admettant respectivement ψ_1 et ψ_2 comme fonction de Lévy. Alors, ces deux flots filtrés sont isomorphes si et seulement si les conditions* (i) *et* (ii) *suivantes sont satisfaites:*

(i) *ou bien les deux P.A.I. sont sans partie gaussienne ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), ou bien ils ont tous deux une partie gaussienne ($\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$);*

(ii) *les espaces mesurés $\{\mathbb{R}, \mu_1\}$ et $\{\mathbb{R}, \mu_2\}$ sont isomorphes.*

Autrement dit, l'isomorphisme de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ exige une propriété tès forte des deux processus Z_t^1 et Z_t^2, qui permet en fait de calculer explicitement un processus en fonction de l'autre par une formule «instantanée» que l'on peut écrire très grossièrement sous la forme

«$dZ_t^1 = f(dZ_t^2)$», f étant inversible.

Par contre, le résultat suivant, qui donne une condition d'isomorphisme «flou», est exclusivement un résultat de théorie des flots:

1.14. Théorème. *Soient $\Psi(u)$ et $\Phi(u)$ deux fonctions de Lévy de P.A.I. diffus, admettant de plus une mesure de Lévy non nulle. Soit $\mathfrak{H} = \{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, Z_t, \mathbb{P}\}$ la réalisation canonique du P.A.I. de fonction de Lévy $\Psi(u)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut définir sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ un P.A.I. (Y_t) (dépendant de ε) de fonction de Lévy $\Phi(u)$, tel que*

(i) $Y_{t+s} - Y_t = Y_s \circ \theta_t$;

(ii) *si $\mathscr{G}_t = \sigma\{Y_s - Y_u \mid s, u \leq t\}$ est la filtration engendrée par (Y_t), quitte à se restreindre à un ensemble $\mathscr{F}$-mesurable, plein[2] et invariant, on a $\mathscr{G}_{t-\varepsilon} \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{G}_{t+\varepsilon}$.*

Nous disons que les flots canoniques de deux P.A.I. diffus de mesure de Lévy non nulle sont «*à peu près isomorphes*». Ce résultat est vrai quelle que soit la forme des mesures de Lévy, pourvu qu'elles soient non nulles, et il n'y a pas de formule explicite permettant de calculer un processus en fonction de l'autre. Le cas du mouvement brownien est donc le seul cas exclus par ce théorème; pourtant, il est vraisemblable que cette exclusion est due aux insuffisances de la méthode employée plutôt qu'à un obstacle fondamental. Il paraît donc raisonnable de poser la conjecture suivante:

1.15. Conjecture. Tout flot de P.A.I. diffus est à peu près isomorphe au flot du mouvement brownien.

Comme il le sera signalé au passage, certaines démonstrations sont dues à P.A. Meyer [11], et ont permis de simplifier considérablement la présentation initiale, qui était passablement obscure. Je tiens enfin à remercier J. Jacod pour ses remarques, et pour sa collaboration dont le fruit est le théorème (1.13), dont la démonstration paraîtra ailleurs.

---

[2] i.e. de probabilité 1

§ 2. Un lemme fondamental et quelques outils techniques

Dans tout ce paragraphe, nous travaillons sur un flot $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ qui satisfait à l'hypothèse (1.5), et nous supposons que le flot (non filtré) $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, \mathbb{P}\}$ où $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty$ est *propre* au sens d'Ambrose-Kakutani [1].

Le mot *processus* désignera toujours une application $(t, \omega) \to Z_t(\omega)$ qui soit mesurable par rapport à la tribu produit $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{F}$ (on rappelle que la tribu $\mathscr{F}$ n'est pas supposée complète, et nous insistons sur le fait que nous n'utilisons pas la complétée de $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{F}$ par rapport à la mesure produit $dt \times \mathbb{P}$ pour définir la mesurabilité en (t, ω)).

Nous dirons d'un processus (Z_t) à trajectoires continues à droite et réglées qu'il est *additif* s'il satisfait identiquement aux relations $Z_{t+s} - Z_t = Z_s \cdot \theta_t$, $Z_0 = 0$.

Nous appellerons *compteur* un processus additif (N_t) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (infini exclus), dont toutes les trajectoires sont croissantes, purement discontinues, et à sauts unité; nous supposons de plus que, pour tout ω, $N_t(\omega)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \uparrow +\infty$, et vers $-\infty$ lorsque $t \downarrow -\infty$.

Enfin, rappelons qu'un processus additif (Z_t) est dit *adapté* à $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ si la variable $Z_s - Z_u$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable pour $s, u \leqq t$.

Rappelons (cf. Lazaro [9] ou Benveniste [2]) que, si $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, \mathbb{P}\}$ est un flot (non filtré) propre au sens d'Ambrose-Kakutani, *on peut, quitte à jeter un ensemble invariant négligeable appartenant à $\mathscr{F}$, supposer l'existence d'un compteur adapté à $(\mathscr{F}_t)$*, que nous notons $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$, et que nous fixons une fois pour toutes dans tout ce paragraphe.

Si (N_t) est ce compteur, on définir sa *mesure de Palm m*, qui est une mesure positive σ-finie sur $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ portée par l'ensemble $X = \{\Delta N_0 = 1\}$[3], par la formule

$$(2.1) \quad m(f) = E \int_0^1 f \circ \theta_t \, dN_t, \quad f \text{ positive et } \mathscr{F}\text{-mesurable;}$$

les propriétés de stationnarité et un raisonnement de classes monotones, permettent d'étendre (2.1) sous la forme (f étant $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}$-mesurable et positive)

$$(2.2) \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f(t, \theta_t \omega) \, dN_t(\omega) = \int_{\mathbb{R} \times \Omega} f(t, \omega) \, dt \, m(d\omega) = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f(-t, \theta_t \omega) \, dN_t(\omega)$$

où la seconde égalité résulte de la première, et de l'invariance de la mesure de Lebesgue par la symétrie $t \to -t$.

Si (N_t) est un compteur, nous notons $(T_n)_{n \in Z}$ la suite de ses temps de saut, définie de la façon suivante:

$$T_1 = T = \inf\{t > 0 \mid N_t = 1\}; \qquad T_{n+1} = \inf\{t > T_n \mid \Delta N_t = 1\} \text{ pour } n > 1;$$
$$T_0 = \sup\{t \leqq 0 \mid \Delta N_t = 1\}; \qquad T_{n-1} = \sup\{t < T_n \mid \Delta N_t = 1\} \text{ pour } n < 0.$$

Pour les distinguer des autres points de Ω, nous noterons x les points de l'ensemble $X = \{T_0 = 0\} = \{\Delta N_0 = 1\}$. Nous introduisons l'intervalle stochastique suivant de $X \times \mathbb{R}_+$, que nous utiliserons constamment dans la suite:

$$\tilde{\Omega} =]\!]0, T]\!] = \{(x, u) \in X \times \mathbb{R}_+ \mid 0 < u \leqq T(x)\}.$$

---

[3] $\Delta N_t = N_t - N_{t-}$ est le saut à l'instant t

Nous notons S la restriction à X de l'application $\omega \to \theta_{T(\omega)}(\omega)$, et θ l'application $(\omega, u) \to \theta_u \omega$, qui est mesurable de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{F}$. Enfin, nous notons $\mathscr{X}$ la restriction à X de la tribu $\mathscr{F}$.

Rappelons que le théorème classique d'Ambrose-Kakutani se compose de deux assertions principales: 1) l'existence d'un compteur adapté dans un flot propre, que nous avons déjà invoquée, et pour laquelle nous renvoyons le lecteur à [9]; 2) la possibilité de représenter le flot considéré comme le flot spécial sous une fonction, à l'aide de ce compteur. Nous allons préciser cette seconde assertion dans notre situation, et en donner une démonstration très élémentaire[4], ce qui est rendu possible grâce aux hypothèses faites sur la mesurabilité du flot qui sont plus fortes que les hypothèse habituelles des ergodiciens:

2.1. Lemme. *L'application θ définit un isomorphisme entre les espaces probabilisés $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ et $\{\tilde{\Omega}, \mathscr{X} \times \mathscr{B}(\mathbb{R})_{|\tilde{\Omega}}, m \otimes dt_{|\tilde{\Omega}}\}$, où m désigne la mesure de Palm du compteur (N_t); de plus, S est un automorphisme de l'espace mesuré $\{X, \mathscr{X}, m\}$.*

Démonstration. Posons

$$L = \sup\{t < 0 \mid \Delta N_t = 1\};$$

on vérifie que $\theta^{-1}(\omega) = (\theta_L \omega, -L(\omega)) \in \tilde{\Omega}$ est bien l'application inverse de θ, ce qui montre déjà que θ est une bijection bimesurable de $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ sur $\{\tilde{\Omega}, \mathscr{X} \times \mathscr{B}(\mathbb{R})_{|\tilde{\Omega}}\}$. Voyons les autres assertions; soit g une fonction $\mathscr{F}$-mesurable et positive, posons

$$f_0(t, \omega) = g(\theta_t \omega) \cdot 1_{\{T_0(\omega) \leqq t < T_1(\omega)\}},$$
$$f_1(t, \omega) = g(\theta_t \omega) \cdot 1_{\{T_1(\omega) \leqq t < T_2(\omega)\}};$$

nous allons appliquer la seconde égalité de (2.2) aux fonctions f_0 et f_1. Pour cela, commençons par remarquer que

$$\{T_0(\theta_t \omega) \leqq -t < T_1(\theta_t \omega)\} = \{T_0(\omega) \leqq t < T_1(\omega)\};$$
$$\{T_1(\theta_t \omega) \leqq -t < T_2(\theta_t \omega)\} = \{T_1(\omega) \leqq t < T_0(\omega)\}.$$

On obtient alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\int_X m(dx) \int_0^{T(x)} g(\theta_u x)\, du &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}} f_0(t, \omega)\, m(du)\, dt \\
&= \mathbb{E} \int f_0(-t, \theta_t \cdot)\, dN_t = \mathbb{E} \int_{[T_0, T_1[} g \cdot dN_t = \mathbb{E}(g) \\
&= \mathbb{E} \int_{[T_{-1}, T_0[} g\, dN_t = \mathbb{E} \int f_1(-t, \theta_t \cdot)\, dN_t = \int_{\Omega \times \mathbb{R}} f_1(t, \omega)\, dt\, m(d\omega) \\
&= \int_X m(dx) \int_{T_1(x)}^{T_2(x)} g(\theta_u x)\, du = \int_X m(dx) \int_0^{T(Sx)} g \circ \theta_u(Sx)\, du.
\end{aligned}$$

[4] Nous avons appris depuis que J. Neveu a donné cette démonstration dans son cours sur les processus ponctuels fait à St Flour en septembre 1976 [12]

La comparaison entre le premier et le cinquième membre de cette suite d'égalités montre que l'image par θ^{-1} de $\mathbb{P}$ est la restriction à $\tilde{\Omega}$ de la mesure produit $m \times du$. Par ailleurs, soit h une fonction $\mathscr{X}$-mesurable et positive sur X, et posons

$$g(\omega) = g \circ \theta(x, u) = \frac{1}{T(x)} \cdot h(x) \cdot 1_{\{0 < u \leqq T(x)\}}.$$

La comparaison entre le premier et le dernier membre de la suite d'égalités permet alors de conclure que $m(h) = m(h \circ S)$. Pour achever de montrer que S est un automorphisme de $\{X, \mathscr{X}, m\}$, il reste à montrer que S est une bijection bimesurable; et cela résulte de ce que l'inverse de S est donné par la formule

$$S^{-1} x = \theta_L(x).$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Contrairement aux résultats qui précèdent, ceux qui suivent vont utiliser explicitement le fait que le compteur (N_t) est *adapté*; ce sont des résultats de mesurabilité, qui ne font intervenir que les tribus et pas les mesures, puisque nous avons pris soin de ne compléter aucune des tribus que nous avons définies.

Rappelons qu'un processus $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini sur Ω est dit *adapté* à la filtration $(\mathscr{F}_t)$ si g_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable pour tout t. Les notions d'adaptation sont donc différentes suivant que l'on considère les processus ou les processus additifs.

Par ailleurs, si U est un temps d'arrêt $\geqq 0$ de la filtration $(\mathscr{F}_t)$, rappelons que $\mathscr{F}_U$ désigne la tribu sur Ω constituée par les événements $A \in \mathscr{F}$ tels que $A \cap \{U \leqq t\} \in \mathscr{F}_t$ pour tout t.

Le résultat suivant est le seul, dans tout ce paragraphe, qui utilise les propriétés des espaces de Blackwell.

2.2. Lemme. (i) *Les processus adaptés à la filtration $(\mathscr{F}_t)$ sont de la forme $(t, \omega) \to f(t, \theta_t \omega)$, où f est une fonction $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_0$-mesurable.*

(ii) *Soit U un temps d'arrêt $\geqq 0$ de la filtration $(\mathscr{F}_t)$; alors les variables aléatoires $\mathscr{F}_U$-mesurables sont de la forme $f(U, \theta_U \cdot)$, où f est une fonction $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_0$-mesurable.*

Démonstration. (i) Nous désignerons par $\mathfrak{A}$ la tribu sur $\Omega \times \mathbb{R}$ constituée par les ensembles aléatoires adaptés, et par $\mathscr{B}$ la tribu constituée par les ensembles aléatoires dont l'indicatrice est de la forme $(t, \omega) \to 1_H(t, \theta_t \omega)$, où $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_0$. La tribu $\mathscr{B}$ est une tribu séparable (comme $\mathscr{F}_0$) contenue dans $\mathfrak{A}$, et les tribus $\mathfrak{A}$ et $\mathscr{B}$ sont elles-mêmes contenues dans la tribu de Blackwell $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}$. Pour montrer que $\mathfrak{A}$ et $\mathscr{B}$ sont égales, il nous suffit alors de montrer qu'elles ont mêmes atomes. Or, (ω, t) et (ω', t') sont dans un même atome de $\mathfrak{A}$ si et seulement si $Z(t, \omega) = Z(t', \omega')$ lorsque Z parcourt l'ensemble des processus adaptés; prenant Z déterministe, il vient déjà $t = t'$; mais alors, lorsque Z parcourt l'ensemble des processus adaptés, la variable Z_t parcourt l'ensemble des variables $\mathscr{F}_t$-mesurables, et la condition $Z_t(\omega) = Z_t(\omega')$ exige alors que ω et ω' appartiennent au même atome de $\mathscr{F}_t$. On montre de la même manière que (ω, t) et (ω', t') sont dans un même atome de $\mathscr{B}$ si et seulement si $(\theta_t \omega, t)$ et $(\theta_{-t}, \omega', t')$ sont dans un même atome de $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}_0$, donc si $t=t'$ et si $\theta_{-t}\omega$ et $\theta_{-t}\omega'$ sont dans un même atome de $\mathscr{F}_0$. Les atomes de $\mathfrak{A}$ et $\mathscr{B}$ sont donc les mêmes.

(ii) Nous utilisons un résultat de théorie générale des processus pour lequel nous renvoyons le lecteur à [6, chap. IV]: soit $\mathcal{O}$ la tribu des ensembles aléatoires *optionnels* sur $\Omega\times\mathbb{R}$, engendrée par les processus adaptés à $(\mathscr{F}_t)$, continus à droite et limités à gauche; alors, *une variable est $\mathscr{F}_U$-mesurable si et seulement si elle est de la forme f_U, où $f(t)$ est un processus optionnel ($\mathcal{O}$-mesurable).* Le résultat provient alors de ce que, grâce à l'hypothèse (1.6), on a l'inclusion $\mathscr{B}\subset\mathcal{O}$, qui implique en vertu de (i) l'égalité $\mathscr{B}=\mathcal{O}=\mathscr{A}$.

Après ces lemmes généraux, nous revenons à l'étude de notre compteur (N_t) et du système dynamique $\{X,\mathscr{X},S,m\}$, dit *système dynamique de base*, qu'il permet de définir. Nous avons besoin de munir X des deux filtrations suivantes:

– une filtration en temps continu $(\mathscr{X}_t)_{t\geqq 0}$, où $\mathscr{X}_t$ est la restriction à X de la tribu $\mathscr{F}_t$;

– une filtration en temps discret $(\mathscr{X}^n)_{n\in Z}$, où $\mathscr{X}^0=\mathscr{X}_0$ et $\mathscr{X}^n=S^{-n}(\mathscr{X}^0)$.

Le résultat suivant justifie le terme de «filtration» pour la famille de tribus $(\mathscr{X}^n)_{n\in Z}$, puisqu'il montre en particulier que c'est une famille croissante:

2.3. Lemme. (i) *Pour $n\geqq 1$, T_n est un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t)$; pour $n\leqq 0$, T_n est $\mathscr{F}_0$-mesurable.*

(ii) *Pour $n\geqq 0$, $\mathscr{X}^n$ est la restriction à X de la tribu $\mathscr{F}_{T_n}$; en conséquence, la famille de tribus $(\mathscr{X}^n)_{n\in Z}$ est croissante, et $\bigvee_{n\in Z}\mathscr{X}^n=\mathscr{X}$.*

(iii) *L'application $\theta((x,u)\to\theta_u x)$ définit un isomorphisme entre les espaces mesurables $\{\tilde{\Omega},\mathscr{X}^1\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})_{/\tilde{\Omega}}\}$ et $\{\Omega,\mathscr{F}_{T_1}\}$.*

Démonstration. (i) Immédiat.

(ii) Rappelons que $T=T_1$ et que $L=\sup\{t<0\,|\,\Delta N_t=1\}$ est également $\mathscr{F}_0$-mesurable. Nous allons montrer (ii) par récurrence sur n; pour $n=0$, c'est la définition de $\mathscr{X}^0$ puisque $T_0=0$ sur X. Supposons donc montrée l'égalité $\mathscr{X}^n=\mathscr{F}_{T_n}/X$; pour montrer que $\mathscr{X}^{n+1}\supset\mathscr{F}_{T_{n+1}/X}$, il nous suffit, en vertu du lemme (2.2), de montrer que $x\to f(T_{n+1}(x),\,\theta_{T_{n+1}}(x))$ est $\mathscr{X}^{n+1}$-mesurable si f est $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}_0$-mesurable. Mais alors les formules suivantes, valables pour $n\geqq 0$

$$(2.3)\quad T_{n+1}(\omega)=T(\omega)+T_n\circ\theta_T(\omega);\qquad T(x)=-L(Sx);\qquad \theta_T x=Sx,$$

permettent d'écrire l'égalité suivante

$$(2.4)\quad f(T_{n+1}(x),\theta_{T_{n+1}}(x))=f(-L(Sx)+T_n(Sx),\theta_{T_n}(Sx));$$

mais alors, comme la fonction $(t,\omega)\to f(t-L(\omega),\omega)$ est également $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}_0$-mesurable, il vient, grâce au lemme (2.2) que la variable aléatoire $x\to f(-L(x)+T_n(x),\theta_{T_n}(x))$ est $\mathscr{F}_{T_n/X}$-mesurable, donc $\mathscr{X}^n$-mesurable d'après l'hypothèse de récurrence; il s'ensuit que le premier membre de (2.4) est $\mathscr{X}^{n+1}$-mesurable, ce qui montre donc l'inclusion $\mathscr{F}_{T_{n+1}/X}\subset\mathscr{X}^{n+1}$. L'inclusion inverse est plus facile: toute variable $\mathscr{X}^n$-mesurable est de la forme $f(S^n x)$ où f est une fonction $\mathscr{F}_0$-mesurable sur Ω; en vertu de (2.3), $x\to f(S^n x)$ est la restriction à X de la variable $f\circ\theta_{T_n}$, qui est $\mathscr{F}_{T_n}$-mesurable en vertu du lemme (2.2), puisque $(t,\omega)\to f(\theta_t\omega)$ est $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}_0$-mesurable. L'assertion (ii) est donc montrée.

(iii) Pour tout couple $(x,u)\in\tilde{\Omega}=]\!]0,T]\!]$, on a l'égalité $T_1(\omega)=T(x)-u$ si $\omega=\theta_u x$ est l'image de (x,u) par l'isomorphisme θ. On a alors les égalités suivantes:

$$(2.5)\quad f(T_1(\omega),T_1(\omega))=f(T(x)-u,\theta_{T(x)-u}(\theta_u x))=f(-L(Sx)-u,Sx).$$

Et cette égalité montre le résultat cherché: lorsque f décrit l'ensemble des fonctions $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}_0$-mesurables, le premier membre de l'égalité (2.5) décrit l'ensemble des variables $\mathscr{F}_{T_1}$-mesurables en vertu du lemme (2.2), et le dernier membre décrit l'ensemble des fonctions $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{X}^1$-mesurables (puisque $(x,u)\to f(-L(x)-u,x)$ décrit l'ensemble des fonctions $\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{X}^0$-mesurables). Le lemme est donc montré.

Pour la suite du paragraphe, nous supposerons pour simplifier (cette condition sera d'ailleurs remplie dans toutes les utilisations que nous ferons du résultat ci-dessous) que *la mesure de Palm m du compteur (N_t) est bornée*; nous noterons $\bar{m}$ la probabilité sur $\{X,\mathscr{X}\}$ obtenue en normalisant m: $\bar{m}=m/m(X)$. A condition d'utiliser le fait que la mesure de Palm m est toujours σ-finie *sur la tribu $\mathscr{F}_0$* (cf. [2]), il n'y a pas de difficulté supplémentaire pour traiter le cas général; seulement, cela alourdirait inutilement les notations.

Nous allons maintenant passer à l'exposé du lemme fondamental; nous en donnerons une démonstration directe, due à P.A. Meyer [11], et qui remplace très avantageusement la démonstration prévue initialement. Comme l'énoncé de ce lemme est un peu plus précis que ce qui se trouve dans [11], nous avons choisi de faire figurer intégralement la démonstration. Commençons par rappeler une notion classique:

2.4. Définition. Soit $\{\Omega,\mathscr{G}_t,\mathbb{R}\}_{t\in\mathbb{R}}$ un espace probabilisé filtré, et $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus continu à droite et réglé, nul à l'origine, défini sur Ω. Nous dirons que (Z_t) est un $(\mathscr{G}_t)$-P.A.I. si

(i) $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall s\geqq 0$, la variable $Z_{t+s}-Z_t$ est $\mathscr{G}_{t+s}$-mesurable et indépendante de $\mathscr{G}_t$;

(ii) la loi de la variable $(Z_{t+s}-Z_t)$ ne dépend pas de $t\in\mathbb{R}$.

On sait que $\{\Omega,\mathscr{G}_t,Z_t,\mathbb{P}\}_{t\geqq 0}$ est un processus fortement Markovien.

Remarquons que la notion d'adaptation que nous utilisons ici porte sur les accroissements du processus, comme pour les processus additifs.

Bien entendu, tout P.A.I. est un $(\mathscr{G}_t)$-P.A.I. si nous prenons pour $(\mathscr{G}_t)$ la filtration propre du processus; inversement, tout $(\mathscr{G}_t)$-P.A.I. est à fortiori un P.A.I. par rapport à sa filtration propre, donc un P.A.I. tout court.

2.5. Lemme fondamental. *Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus additif sur $\{\Omega,\mathscr{F},\theta_t\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *le processus $(t,\omega)\to Z_t(\omega)$ est un $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$-*P.A.I. *sur* $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$;

(ii) *le processus $(t,x)\to Z_t(x)$ est un $(\mathscr{X}_t)_{t>0}$-*P.A.I. *sur* $\{X,\mathscr{X},\bar{m}\}$[4]

(iii) *il existe une filtration $(\bar{\mathscr{X}}_t)_{t>0}$ sur $\{X,\mathscr{X},\bar{m}\}$ et un $(\bar{\mathscr{X}}_t)$-P.A.I. noté $(\bar{Z}_t)$ tels que*

$$\bar{\mathscr{X}}_{t\wedge T}=\mathscr{X}_{t\wedge T};\qquad \bar{Z}_{t\wedge T}(x)=Z_{t\wedge T}(x)\quad \textit{pour}\ t\geqq 0.$$

De plus, tous ces P.A.I. *ont même loi.*

---

4 Rappelons que $\bar{m}=m/m(X)$, où m est la mesure de Palm, supposée bornée, de (N_t)

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii). Comme $Z_t(\omega)$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable pour $t \geqq 0$, et que $\mathscr{X}_t$ est la restriction à X de la tribu $\mathscr{F}_t$, on sait déjà que $Z_t(x)$ est $\mathscr{X}_t$-mesurable pour tout $t>0$. Voyons les questions de loi. Soit $A \in \mathscr{F}_t$, et f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}$; on a, pour $s>0$ et $t \geqq 0$:

$$(2.6)\quad m[f(Z_{t+s}-Z_t);\, A] = \mathbb{E} \int_0^1 f(Z_{t+s}-Z_t) \circ \theta_u \cdot 1_A \circ \theta_u \, dN_u$$

par définition de la mesure de Palm de (N_t). Voyons le second membre: le compteur (N_u) est adapté à la filtration $(\mathscr{F}_u)_{u \in \mathbb{R}}$, donc à fortiori à $(\mathscr{F}_{t+u})_{u \in \mathbb{R}}$ puisque $t>0$; d'autre part, le processus $(1_A \circ \theta_u)_{u \in \mathbb{R}}$ est optionnel (cf. lemme (2.2), démonstration de (ii)) par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_{t+u})_{u \in \mathbb{R}}$ en vertu du lemme (2.2). La théorie générale des processus (cf. Dellacherie [5]) nous apprend alors que l'on peut, dans le calcul du second membre de (2.6), remplacer le processus $(f(Z_{t+s}-Z_t) \circ \theta_u)_{u \in \mathbb{R}}$ par sa projection optionnelle (qui est une version convenablement choisie de la famille $\mathbb{E}(f(Z_{t+s}-Z_t) \circ \theta_u | \mathscr{F}_{t+u})$) par rapport à $(\mathscr{F}_{t+u})_{u \in \mathbb{R}}$; dans notre cas, la variable $(Z_{t+s}-Z_t) \cdot \theta_U = Z_{t+s+U} - Z_{t+U}$ étant indépendante de la tribu $\mathscr{F}_{t+U}$ pour tout temps d'arrêt $U \geqq 0$ de la filtration $(\mathscr{F}_u)$ (c'est la propriété de Markov forte), cette projection optionnelle n'est autre que la constante $\mathbb{E}(f(Z_{t+s}-Z_t)) = \mathbb{E}(f \circ Z_s)$; (2.6) donne alors

$$(2.7)\quad m(f(Z_{t+s}-Z_t);\, A) = \mathbb{E}(f \circ Z_s) \cdot m(A),$$

et ceci montre que $\bar{m}(f(Z_{t+s}-Z_t)|\mathscr{X}_t) = \bar{m}(f(Z_{t+s}-Z_t)) = \mathbb{E}(f \circ Z_s)$; l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est donc montrée, ainsi que l'égalité des lois des deux processus.

(ii)$\Rightarrow$(iii): c'est immédiat.

(iii)$\Rightarrow$(ii): Nous utiliserons la version suivante de la propriété de Markov forte pour les P.A.I. *homogènes*, dont nous donnons une démonstration en annexe:

2.6. Lemme. *Soient* $(A_t)_{t \geqq 0}$ *un* $(\mathfrak{A}_t)$-P.A.I. *et* $(B_t)_{t \geqq 0}$ *un* $(\mathscr{B}_t)$-P.A.I. *de même loi, défines sur un espace probabilisé* $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$*; supposons qu'il existe un temps d'arrêt* T *de* $(\mathfrak{A}_t)$ *tel que* $\mathfrak{A}_T = \mathscr{B}_0$. *Alors, on peut «recoller» ces deux P.A.I. en* T *de la façon suivante: soit*

$$C_t = A_t \quad \text{si } t \leqq T, \qquad = A_T + B_{t-T} \quad \text{si } t > T;$$

$\mathscr{C}_t$ *coïncide avec* $\mathfrak{A}_t$ *sur* $\{t \leqq T\}$, *et avec* $\mathscr{B}_{t-T}$ *sur* $\{t > T\}$*; le processus* $(C_t)_{t \geqq 0}$ *est un* $(\mathscr{C}_t)$-*P.A.I. sur* $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$, *de même loi que les deux P.A.I. initiaux.*

Appliquons ce résultat. Les propriétés d'additivité de (Z_t) permettent d'écrire, pour $0 \leqq T_n(x) < t \leqq T_{n+1}(x)$:

$$(2.8)\quad \begin{aligned} Z_t(x) &= Z_t(x) - Z_{T_n}(x) + Z_{T_n}(x) - Z_{T_{n-1}}(x) + \cdots + Z_T(x) \\ &= Z_{t+T_{-n}} \circ S^n(x) + Z_T \circ S^{n-1}(x) + \cdots + Z_T(x), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations

$$(2.9)\quad T_n = T_{-n} \circ S^n, \quad \text{et} \quad T_{i+1} - T_i = T \circ S^i.$$

Définissons alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ les processus et filtrations suivantes:

$$Z_t^0 = \bar{Z}_t, \qquad \mathscr{X}_t^0 = \bar{\mathscr{X}}_t;$$

et pour $p > 0$

$$\begin{aligned} Z_t^p &= Z_t^{p-1} \text{ sur } \{t \leqq T_p\}, \qquad = Z_{T_p}^{p-1} + Z_{t+T_{-p}} \circ S^p \text{ sur } \{t > T_p\}, \\ \mathscr{X}_t^p &= \mathscr{X}_t^{p-1} \text{ sur } \{t \leqq T_p\}, \qquad = S^{-p}(\bar{\mathscr{X}}_{t+T_{-p}}) \text{ sur } \{t > T_p\}. \end{aligned}$$

Remarquons que Z, en vertu de la formule (2.8), et des relations (2.9) et de l'hypothèse (iii), on a

(2.10) $\quad Z_{t \wedge T_p}^{p-1} = Z_{t \wedge T_p}, \qquad \mathscr{X}_{t \wedge T_p}^{p-1} = \mathscr{X}_{t \wedge T_p}.$

Pour montrer que (iii)$\Rightarrow$(ii) il nous suffit de montrer que

(2.11) $\quad$ pour tout p, (Z_t^p) est un $(\mathscr{X}_t^p)$-P.A.I. de même loi que $(\bar{Z}_t)$ sur $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$.

Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur p. Pour $p = 0$, c'est la condition (iii). Supposons le résultat montré pour $p-1$, et montrons le pour p. En vertu de (2.10), T_p est un temps d'arrêt de $(\mathscr{X}_t^{p-1})$, et l'on a $\mathscr{X}_{T_p}^{p-1} = \mathscr{X}_T = S^{-p}(\mathscr{X}_0) = S^{-p}(\bar{\mathscr{X}}_0)$. Utilisons alors le fait que $\bar{m}$ est S-invariante pour en conclure que le processus $(\bar{Z}_t \circ S^p)_{t \geqq 0}$ est, par rapport à la filtration $S^{-p}(\bar{\mathscr{X}}_t)_{t \geqq 0}$, un P.A.I. sur $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$ de même loi que $(\bar{Z}_t)$. Nous sommes alors dans les conditions d'application du lemme 2.6 en prenant pour (A_t) et $(\mathfrak{A}_t)$ respectivement (Z_t^{p-1}) et $(\mathscr{X}_t^{p-1})$, et pour (B_t) et $(\mathscr{B}_t)$ respectivement $(\bar{Z}_t \circ S^p)$ et $S^{-p}(\bar{\mathscr{X}}_t)$. La conclusion du lemme (2.7) dit alors que (Z_t^p) est un $(\mathscr{X}_t^p)$-P.A.I. sur $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$ de même loi que (Z_t^{p-1}), donc que $(\bar{Z}_t)$. L'assertion (2.11) est donc montrée, et avec elle, l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii).

(ii)$\Rightarrow$(i): Voyons d'abord les propriétés d'adaptation. Définissons sur Ω le processus suivant

$$\tilde{Z}_t(\omega) = Z_t(\omega) \cdot 1_X(\omega) \cdot 1_{\{t \geqq 0\}}.$$

L'assertion (ii) signifie en particulier que le processus $(t, \omega) \to \tilde{Z}_t(\omega)$ est adapté à la filtration $(\mathscr{F}_t)$; en vertu du lemme (2.2), le processus $(t, \omega) \to \tilde{Z}(t, \theta_{-t}\omega)$ est donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_0$-mesurable. Pour $t \geqq 0$, posons

$$L_t(\omega) = t - L(\theta_{-t}\omega),$$

qui est $\mathscr{F}_0$-mesurable. La variable aléatoire $\omega \to \tilde{Z}(L_t(\omega), \theta_{-L_t}\omega)$ est donc $\mathscr{F}_0$-mesurable. Mais, si nous remarquons que l'image du point $\theta_{-t}\omega \in \Omega$ par l'isomorphisme θ entre Ω et $\tilde{\Omega}$ n'est autre que le point $(L_t(\omega), \theta_{-L_t}\omega) \in \tilde{\Omega}$, il vient, grâce à l'additivité de Z et à la définition de $\tilde{Z}$, que, pour tout $t \geqq 0$, on a

$$\begin{aligned} Z(t, \theta_{-t}\omega) &= Z(L_t(\omega), \theta_{-L_t}\omega) - Z(L_0(\omega), \theta_{-L_0}\omega) \\ &= \tilde{Z}(L_t(\omega), \theta_{-L_t}\omega) = \tilde{Z}(L_0(\omega), \theta_{-L_0}\omega), \end{aligned}$$

qui est par conséquent $\mathscr{F}_0$-mesurable en vertu du résultat montré sur $\tilde{Z}$. Cela montre que Z_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable pour $t \geqq 0$, donc que le processus additif (Z_t) est adapté à $(\mathscr{F}_t)$.

Voyons les questions de loi. Les égalités suivantes utilisent successivement le lemme (2.1) et la propriété de Markov forte du P.A.I. $(Z_t(x))$. Soit $A \in \mathscr{F}_0$, I un borélien de $\mathbb{R}$, et $s \geqq 0$:

$$\begin{aligned} P\{Z_s(\omega)\in I;\, A(\omega)\} &= \int_X m(dx) \int_0^{T(x)} \{Z_s(\theta_u x)\in I;\, A(\theta_u x)\}\, du \\ &= \int_0^\infty du \int_X \{Z_{s+u}(x) - Z_u(x) \in I;\, T(x) \geqq u;\, \theta_u^{-1} A(x)\}\, m(dx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Z_s(\omega)\in I;\, A(\omega)\} &= \bar{m}(Z_s \in I) \cdot \int_0^\infty du \int_X \{T \geqq u;\, \theta_u^{-1} A\}\, m(dx) \\ &= \bar{m}(Z_s \in I) \cdot \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Cette égalité, jointe au caractère additif de (Z_t), achève de montrer que (Z_t) est un $(\mathscr{F}_t)$-P.A.I., et, du même coup, de montrer le lemme fondamental.

La fin de ce paragraphe est consacrée au choix du compteur (N_t) qui servira de référence pour l'utilisation des résultats précédents.

2.7. Lemme. *Soit $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ un flot filtré tel que le flot $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, \mathbb{P}\}$ $(\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty)$ est propre au sens d'Ambrose et Kakutani. Alors, pour tout $l > 0$, il existe un compteur adapté (N_t) satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes:*

(i) *les sauts de (N_t) sont espacés d'au moins l et d'au plus $2l$; en particulier, la mesure de Palm de (N_t) est bornée;*

(ii) *le premier temps de saut T_1 de (N_t) est $\mathscr{F}_0$-mesurable.*

Démonstration. Il nous suffit de trouver un compteur adapté (N_t) satisfaisant à (i): en effet, pour un tel compteur, on a $T_1 = T_1 \wedge 2l$ qui est donc $\mathscr{F}_{2l}$-mesurable (puisque l'on sait déjà que T_1) est un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t)$, et le compteur retardé $(N_t \circ \theta_{-2l})$ satisfait alors à (i) et (ii). Pour satisfaire (i), nous procédons en trois étapes.

Étape 1. Partons d'un compteur adapté (N_t^1) quelconque, il en existe par hypothèse; *nous allons le modifier de façon à ce que, pour presque tout ω, les intervalles entre les sauts de $t \to N_t^1(\omega)$ ne soient pas tous $< l$.*

Soit A l'ensemble des points ω tels que les sauts de la trajectoire $t \to N_t(\omega)$ soient $< l$; la masse totale de la mesure de Palm m^1 de (N_t^1) qui est aussi le nombre moyen de sauts par unité de temps, est donc minorée par $\mathbb{P}(A)/l$. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, c'est fini. Dans le cas contraire soit $\{X, \mathscr{X}_n, S, m^1\}$ le système dynamique de base associé au compteur (N_t^1); *comme* m^1 est σ-finie sur $\mathscr{X}_0$ (cf. [2]), nous pouvons choisir $C \in \mathscr{X}_0$ tel que:

$$(2.12)\quad \text{(i)}\ m^1(C) < \frac{\mathbb{P}(A)}{l}, \qquad \text{(ii)}\ X = \bigcup_{n \in Z} S^{-n}(C).$$

Soit (N_t^c) le compteur défini par $N_t^c = \int_0^t 1_C \circ \theta_u \, dN_u^1$ pour $t \geqq 0$: il est adapté puisque $C \in \mathscr{F}_0$, et satisfait bien à la condition $N_{\pm\infty}^c = \pm\infty$ en vertu de (2.12.ii), et la masse totale de sa mesure de Palm est $m^1(C)$. Soit maintenant B l'ensemble des points ω tels que les sauts de la trajectoire $t \to N_t^c(\omega)$ soient $< l$: en vertu de (2.12.i), il vient

(2.13) $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$.

Nous allons donc achever l'étape 1 par récurrence transfinie[5]. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des ordinaux dénombrables. Posons $C = C_1$, et définissons la suite $(C_\alpha)_{\alpha < \mathscr{I}}$ décroissante d'éléments de $\mathscr{F}_0$ de la façon suivante, où B_α est associé au compteur $(N_t^{C_\alpha})$ comme $B = B_1$ à (N_t^c): si α est un ordinal limite, on pose $C_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} C_\beta$, et $(N_t^{c_\alpha})$ est encore un compteur adapté; si $\mathbb{P}(B_\alpha) > 0$, la construction faite ci-dessus nous permet d'affirmer l'existence de $C_{\alpha+1} \subset C_\alpha$ et appartenant à $\mathscr{F}_0$, tel que $(N_t^{C_{\alpha+1}})$ soit un compteur adapté avec $\mathbb{P}(B_{\alpha+1}) < \mathbb{P}(B_\alpha)$. Il existe alors un ordinal dénombrable $i < \mathscr{I}$ tel que $\mathbb{P}(B_{i+1}) = \mathbb{P}(B_i)$, ce qui exige $\mathbb{P}(B_i) = 0$ d'après ce qui a été vu.

Le compteur $(N_t^{C_i})$ répond aux exigences de l'étape 1: nous le notons (N_t^2).

Étape 2. On définit (N_t^3) à partir de (N_t^2) de la façon suivante: soient $(T_n^2)_{n \in Z}$ les sauts de (N_t^2), à chaque instant T_n^2, on met en marche une horloge H_n^2 qui sonne aux instants $T_n^2 + l$, $T_n^2 + 2l, \ldots$, et qui fonctionne pendant l'intervalle de temps $]T_n^2, T_{n+1}^2]$. En vertu de l'étape 1, le processus (N_t^3) qui, pour $t \geqq 0$, compte le nombre de sonneries produites pendant l'intervalle $]0, t]$ par l'ensemble des horloges H_n^2 est un compteur adapté (c'est la précaution prise à l'étape 1 qui permet d'affirmer que $N_{\pm\infty}^3 = \pm\infty$); ses sauts sont au moins espacés de l, mais pas nécessairement bornés supérieurement: il se peut en effet qu'un nombre arbitrairement grand d'intervalles successifs $]T_n^2, T_{n+1}^2]$ soient de longueur $< l$, auquel cas les horloges correspondantes H_n^2 ne sonnent pas.

Étape 3. On répète une nouvelle fois l'opération de l'étape 2 avec la même constante l, mais à partir de (N_t^3), pour obtenir le compteur (N_t) cherché: c'est un compteur adapté dont les sauts sont au moins espacés de l et au plus de $2l$, puisque, les intervalles $]T_n^3, T_{n+1}^3]$ étant de longueur $\geqq l$, chaque horloge H_n^3 sonne au moins une fois.

§ 3. Démonstration du théorème (1.9) et des propositions (1.8) et (1.10)

Soit $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$ un flot filtré diffus, et t_0 la constante $\geqq 0$ introduite dans la définition (1.7). Soit (N_t) un compteur satisfaisant aux conditions du lemme (2.7), avec $l > t_0$. Nous considérons, comme indiqué au § 2, le système dynamique filtré de base $\{X, \mathscr{X}^n, S, m\}$ associé à ce compteur.

3.1. Lemme. *Soit Φ une variable $\mathscr{F}_0$-mesurable telle que $\mathbb{P}\{\Phi \circ \theta_V = U\} = 0$ pour tout couple (U, V) de variables $\mathscr{F}_0$-mesurables, avec $V > t_0$. Alors, on a, en notant également Φ la restriction à X de $\Phi(\omega)$, $m(\Phi \cdot S = U\} = 0$ pour toute variable U, $\mathscr{X}_0$-mesurable sur X. Autrement dit, le système dynamique de base $\{X, \mathscr{X}^n, S, m\}$ est diffus.*

[5] Cette récurrence transfinie est inutile si le flot est ergodique puisque alors, B étant invariant, (2.13) exige $\mathbb{P}(B) = 0$

Démonstration. Prenons $V=T_1 \vee t$, avec $t_0<t<l$ fixé, V est une variable $\mathscr{F}_0$-mesurable d'après les conditions du lemme (2.7). Soit d'autre part $\bar{U}$ une variable $\mathscr{X}_0$-mesurable sur X, et posons $U(\omega)=\bar{U}(\theta_L\omega)$ où l'on rappelle que $L=\sup(t<0\,|\,\Delta N_t=1\}$; U est également une variable $\mathscr{F}_0$-mesurable. Pour $\omega\in\Omega$ nous notons $(x,u)\in\tilde{\Omega}$ l'image de ω par l'isomorphisme θ: on a $V(\omega)=(T(x)-u)\vee t$, et $U(\omega)=\bar{U}(x)$. Les égalités suivantes utilisent alors l'hypothèse concernant le caractère diffus du flot, et le lemme (2.1):

$$\begin{aligned}0&=\mathbb{P}\{\Phi\circ\theta_V=U\}=\int_X m(dx)\int_0^{T(x)}\{\Phi\circ\theta_V(x,u)=U(x,u)\}\,du\\&=\int_X m(dx)\int_0^{[T(x)-t]_+}\{\Phi\circ S(x)=\bar{U}(x)\}\,du+\int_X m(dx)\int_{[T(x)-t]_+}^{T(x)}\{\phi(x,u+t)=\bar{U}(x)\}\,du\\&\geqq\int_X m(dx)\int_0^{l-t}\{\Phi\circ S=\bar{U}\}\,du=(l-t)\,m\{\Phi\circ S=\bar{U}\},\end{aligned}$$

où l'inégalité résulte de ce que $T(x)\geqq l$ en vertu du choix de (N_t). Comme l'égalité $m\{\Phi\circ S=\bar{U}\}=0$ est montrée pour toute variable $\mathscr{X}_0$-mesurable $\bar{U}$, le lemme est montré.

Démonstration du théorème (1.9). Reprenons notre flot diffus $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}\}$, le compteur (N_t) satisfaisant aux conditions du lemme (2.7) avec $l>t_0$; nous utilisons le fait que le système dynamique de base est diffus. La formule (1.1) affirme l'existence d'une sous-tribu separable $\mathfrak{A}$ de $\mathscr{X}^1$, indépendante de $\mathscr{X}^0$ et diffuse par la probabilité $\bar{m}$. On peut alors définir sur $\{X,\mathfrak{A},\bar{m}\}$ une variable Y de loi uniforme sur $[0,1]$. D'autre part (cf. par exemple Shields [3]), tous les espaces de Lebesgue étant isomorphes à $[0,1]$ muni de ses boréliens et de la mesure de Lebesgue λ, on peut construire sur $\{[0,1], \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda\}$ un P.A.I. $(\tilde{Z}_t)_{t\geqq 0}$ *dont la loi peut être choisie arbitrairement.* Posons $\bar{Z}_t(x)=\tilde{Z}_t(Y(x))$, nous avons défini sur $\{X,\mathfrak{A},\bar{m}\}$ un P.A.I. $(\bar{Z}_t)_{t\geqq 0}$ de même loi que $\tilde{Z}_t$. La formule suivante permet alors de construire sur $\{\Omega,\mathscr{F},\theta_t\}$ un processus additif $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tel que $Z_{t\wedge T}(x)=\bar{Z}_{t\wedge T}(x)$ pour $t\geqq 0$:

$$(3.1)\quad Z_t(\omega)=\sum_{n\geqq 0}\bar{Z}(t+u-T_n(x), S^n x)\cdot 1_{\{T_n(x)<t\leqq T_{n+1}(x)\}}-\bar{Z}_u(x)$$

pour $t\geqq 0$, $(x,u)\in\tilde{\Omega}$ désignant l'image de $\omega\in\Omega$ par l'isomorphisme θ entre $\tilde{\Omega}$ et Ω. Pour $t\leqq 0$, on pose $Z_t(\omega)=-Z_{-t}(\theta_t\omega)$.

Nous allons montrer que ce processus additif répond aux conditions du théorème en utilisant le lemme fondamental. A cet effet, nous munissons le flot $\{\Omega,\mathscr{F},\theta_t,\mathbb{P}\}$ d'une nouvelle filtration $(\mathscr{G}_t)$ (on vérifie aisément que $\mathscr{G}_{t+s}=\theta_t^{-1}\mathscr{G}_s$):

$$(3.2)\quad \mathscr{G}_t=\sigma\{Z_s-Z_u;\, s,u\leqq t\}\vee\sigma\{N_s-N_u;\, s,u\leqq t\}.$$

Le compteur de référence (N_t) étant adapté à cette filtration, nous pouvons appliquer à la filtration $(\mathscr{G}_t)$ les résultats du § 2. Partant de $(\mathscr{F}_t)$, nous disposons donc du système de base $\{X,(\mathscr{X}^n)_{n\in Z},(\mathscr{X}_t)_{t\geqq 0}, S, \bar{m}\}$, où l'on rappelle que $\mathscr{Y}_t$ est, pour $t\geqq 0$, la restriction de $\mathscr{G}_t$ à X, et que $\mathscr{Y}^n=S^{-n}\mathscr{Y}_0$. Posons

$$\mathbf{Y}=\sigma\{T; Z_{t\wedge T}, t\geqq 0\},$$

et montrons que

(3.3) $\mathscr{Y}_0(=\mathscr{Y}^0)=\bigvee_{n>0} S^n(\mathbf{Y})$.

Rappelons que $T\circ S^{-1}(x)=-T_{-1}(x)$ est $\mathscr{Y}_0$-mesurable (lemme (2.3)), et que $S^{-1}(x)=\theta_L x=\theta_{T_{-1}}x$; la relation suivante

$$Z_{t\wedge T}\circ S^{-1}=Z_{(t\wedge -T_{-1})+T_{-1}}-Z_{T_{-1}}$$

qui résulte de l'additivité de Z, montre que $S(\mathbf{Y})\subset\mathscr{Y}_0$; comme $S(\mathscr{Y}_0)=\mathscr{Y}^{-1}\subset\mathscr{Y}_0$, cela suffit pour montrer que $\bigvee_{n>0} S^n(\mathbf{Y})\subset\mathscr{Y}_0$. Voyons l'inclusion inverse.

Tout d'abord $\sigma\{N_t(x), t\leqq 0\}=\sigma\{T_{-n}, n>0\}=\sigma\{T\circ S^{-n}, n>0\}$ montre déjà que $\sigma\{N_t, t\leqq 0\}\subset\bigvee_{n>0} S^n(\mathbf{Y})$.

Pour achever de montrer (3.3), il reste à montrer que, pour $t\leqq 0$, $Z_t(x)$ est $\bigvee_{n>0} S^n(\mathbf{Y})$-mesurable. En vertu de l'analogue suivant de (3.1) pour $t\leqq 0$:

(3.4) $Z_t=Z_{t+T_n}\circ S^{-n}-\sum_{\rho-1}^{n-1} Z_T\cdot S^{-\rho}$ sur $\{T_{-n}<t<T_{-n+1}\}$ pour $n>0$,

il nous reste à montrer que la variable $Z_{t+T_n}\circ S^{-n}\cdot 1_{\{T_{-n}<t\leqq T_{-n+1}\}}$ est $\bigvee_{p>0} S^p(\mathbf{Y})$-mesurable pour $n>0$; mais cela résulte de la possibilité d'écrire cette variable sous la forme $x\to Z_{t-T_{-n}(x)}(S^{-n}x)\cdot 1_{\{T_{-n}(x)<t\leqq T_{-n+1}(x)\}}$. Nous avons donc montré l'égalité (3.3).

Comme, par construction de (Z_t), on a $\mathbf{Y}\subset\mathfrak{A}\subset\mathscr{X}^1$, il vient, en vertu de (3.3),

(3.5) $\mathscr{Y}_0\subset\mathscr{X}_0$, soit encore $\mathscr{G}_{T_1}\subset\mathscr{F}_{T_1}$ en vertu du lemme (2.3.iii).

Posons

(3.6) $\overline{\mathscr{Y}}_t=\mathscr{Y}_0\vee\sigma\{T\wedge t\}\vee\sigma\{\bar{Z}_s; 0\leqq s\leqq t\}$,

où l'on rappelle que $(\bar{Z}_t)$ est le P.A.I. défini sur $\{X,\mathfrak{A},\bar{m}\}$ qui nous a servi à construire $(Z_t(\omega))$. On a clairement, pour $t\geqq 0$

(3.7) $\bar{Z}_{t\wedge T}(x)=Z_{t\wedge T}(x)$, $\quad\overline{\mathscr{Y}}_{t\wedge T}=\mathscr{Y}_{t\wedge T}$.

D'autre part,

(3.8) $(\bar{Z}_t)_{t\geqq 0}$ est un $(\overline{\mathscr{Y}}_t)$-P.A.I. sur $\{X,\mathscr{X},\bar{m}\}$;

en effet, on a $\mathscr{Y}_t\subset\mathscr{X}_0\vee\sigma\{\bar{Z}_s, s\leqq t\}$, puisque T est $\mathscr{X}_0$-mesurable, et (3.8) provient de ce que $(\bar{Z}_t)$ est un P.A.I. indépendant de $\mathscr{X}_0$ par construction. Mais alors en vertu du lemme fondamental, (3.7) et (3.8) impliquent que $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est un* $(\mathscr{G}_t)$-*P.A.I. sur* $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$, *de même loi que* $(\bar{Z}_t)$. Mais, comme d'autre part T_1 est un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t)$ et $(\mathscr{G}_t)$ majoré par $2l$, on a

$$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}_{T_1}\subset\mathscr{F}_{T_1}\subset\mathscr{F}_{2l}$$

en vertu de (3.5). Il est alors clair que le processus retardé $(Z_t \circ \theta_{-2t})_{t \in \mathbb{R}}$ répond à toutes les exigences du théorème, dont la démonstration est ainsi achevée.

Démonstration de la proposition (1.8). Soit donc $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, Z_t, \mathbb{P}\}$ le flot canonique d'un P.A.I. Voyons d'abord le cas où Z_t n'est pas du type de Poisson. Ou bien Z_t possède une partie brownienne (B_t) et alors la variable B_t est, pour tout $t>0$, de loi diffuse et indépendante de $\mathscr{F}_0$, et $\mathbb{P}\{\mathscr{B}_{-t} \circ \theta_U - V\} = 0$ si U et V sont $\mathscr{F}_0$-mesurables, avec $U \geqq t$; comme $t>0$ est arbitraire, le flot est bien diffus avec $t_0 = 0$. Ou bien Z_t ne possède pas de partie Gaussienne; dans ce cas, si nous posons

$$T_n = \inf\left(t>0 \,\middle|\, |\Delta Z_t| \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right),$$

le fait que la mesure de Lévy de Z soit de masse infinie permet d'affirmer que $\mathbb{P}(\bigcup_n \{T_n \leqq t\}) = 1$; la variable T_n étant de loi exponentielle, il est alors clair que, pour tout $t>0$, $\Phi = \sum_{n \geqq 0} \frac{1}{2^n} (T_n \wedge t)$ est une variable de loi diffuse, et indépendante de $\mathscr{F}_0$. On achève comme précédemment dans ce cas.

Inversement, si (Z_t) est du type de Poisson, pour tout $t>0$, la tribu $\sigma\{Z_s, 0 \leqq s \leqq t\}$ est indépendante de $\mathscr{F}_0$ et contient l'atome $\{T_1 > t\}$, où T_1 est le premier temps de saut de (Z_t). Il est alors clair que, pour tout $t>0$, la tribu $\mathscr{F}_t$ n'est pas diffuse conditionnellement à $\mathscr{F}_0$; le flot considéré n'est donc pas diffus.

Démonstration de la proposition (1.10). Soit donc $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, N_t, \mathbb{P}\}$ le flot canonique d'un processus de renouvellement de loi v diffuse et portée par l'intervalle $[0, t_0]$, $t_0 < \infty$. Soit $(T_n)_{n \in Z}$ la suite des temps de saut de (N_t), et $\Phi = T_0 - T_{-1}$, qui est $\mathscr{F}_0$-mesurable (lemme (2.3)). Il nous suffit de montrer que $\mathbb{P}\{\Phi \circ \theta_V = U\} = 0$ pour tout couple (U, V) de variables $\mathscr{F}_0$-mesurables, avec $V > 2t_0$, ce qui montrera la proposition. La condition $V > 2t_0$ exige $V > T_2$; donc, pour $n \geqq 2$, on a $\Phi \circ \theta_V = T_n - T_{n-1}$ sur $\{T_n \leqq V < T_{n+1}\}$. Par conséquent, $\mathbb{P}\{\Phi \circ \theta_V = U\} \leqq \sum_{n \geqq 2} \mathbb{P}\{T_n - T_{n-1} = U\}$, et cette dernière somme est nulle, puisque $T_n - T_{n-1}$ est une variable de loi diffuse et indépendante de $\mathscr{F}_{T_{n-1}}$, donc de $\mathscr{F}_0$ dès que $n > 2$.

§ 4. Démonstration du théorème (1.11)

Soit donc $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, Z_t, \mathbb{P}\}$ la réalisation canonique d'un processus ponctuel quasi-continu à gauche d'intensité stochastique (I_t): le processus (I_t) est donc continu, additif, adapté, et tel que $(Z_t - I_t)_{t \geqq 0}$ soit une martingale locale sur $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P}\}$. Nous avons choisi de noter (Z_t) le processus ponctuel, réservant la notation (N_t) au compteur de référence que nous utiliserons pour appliquer le lemme fondamental.

Soit donc (N_t) un compteur adapté, par ailleurs arbitraire; comme précédemment, nous supposerons pour simplifier que sa mesure de Palm m est bornée, et nous notons $\bar{m} = m/m(X)$, où $X = \{\Delta N_0 = 1\}$. On introduit comme au § 2 le système de base $\{X, (\mathscr{X}^n)_{n \in Z}, (\mathscr{X}_t)_{t \geqq 0}, S, \bar{m}\}$:

4.1. Lemme. *Le processus ponctuel $(Z_t(x))_{t \geqq 0}$ est quasi-continu à gauche, et admet $(I_t(x))_{t \geqq 0}$ comme intensité stochastique sur l'espace de base $\{X, \mathscr{X}_t, \bar{m}\}$.*

Démonstration. Il est clair que $(I_t(x))_{t \geqq 0}$ est continu et adapté à $(\mathscr{X}_t)$. Pour s'assurer que $(Z_t - I_t)_{t \geqq 0}$ est une martingale locale des $\{X, \mathscr{X}_t, \bar{m}\}$, il nous suffit (Dellacherie [5]) de vérifier que $\bar{m}(Z_U) = \bar{m}(I_U)$ pour tout temps d'arrêt U fini de $(\mathscr{X}_t)$. Or, si nous notons (T_n) la suite des temps de saut de (N_t), il est clair que les variables $T_n + U \circ \theta_{T_n}$ sont des temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t)$ dès que $n \geqq 1$. Par conséquent, on a les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} m(Z_U) &= \mathbb{E} \int_0^1 (Z_{u+U \circ \theta_u} - Z_u)\, dN_u \\ &= \sum_{n \geqq 1} \mathbb{E}\{T_n \leqq 1; Z_{T_n} + U \circ \theta_{T_n} - Z_{T_n}\} \\ &= \sum_{n \geqq 1} \mathbb{E}\{T_n \leqq 1; I_{Tn + U \circ \theta_{T_n}} - I_{T_n}\} \\ &= \mathbb{E} \int_0^1 (I_{u+U \circ \theta_u} - I_u)\; dN_u = m(I_U), \end{aligned}$$

la troisième égalité résultant de ce que $(Z_t - I_t)_{t \geqq 0}$ est une martingale locale sur $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P}\}$.

Passons à la démonstration du théorème. Choisissons (N_t) comme au lemme (2.6). Soit $\tau_t(x)$ l'inverse de $I_t(x)$ défini par $\tau_t(x) = \inf\{s \mid I_s(x) > t\}$; c'est un temps d'arrêt de $(\mathscr{X}_t)$; d'autre part, (I_t) étant continu, on a identiquement $I_{\tau_t} = t$. Posons pour $t \geqq 0$

(4.1) $\quad \bar{Y}_t(x) = Z_{\tau_t(x)}; \qquad \tilde{\mathscr{Y}}_t = \mathscr{X}_{\tau_t}.$

Alors,

(4.2) $\quad (\bar{Y}_t)$ est un $(\tilde{\mathscr{Y}}_t)$-processus de Poisson sur $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$.

Cela résulte en effet des égalités suivantes, où $s \leqq t$ et $A \in \tilde{\mathscr{Y}}_s$:

$$\bar{m}(\bar{Y}_t - \bar{Y}_s; A) = \bar{m}(Z_{\tau_t} - Z_{\tau_t}; A) = \bar{m}(I_{\tau_t} - I_{\tau_s}; A) = (t-s)\, \bar{m}(A),$$

et de la caractérisation de $(\tilde{\mathscr{Y}}_t)$-processus de Poissons donnée dans Watanabe [8].

Définissons, à l'aide de la formule (3.1), un processus $(Y_t(\omega)_{t \in \mathbb{R}}$ additif sur $\{\Omega, \theta_t\}$, tel que $Y_{t \wedge T}(x) = \bar{Y}_{t \wedge T}(x)$. Munissons le flot $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, \mathbb{P}\}$ de la filtration

$$\mathscr{G}_t = \sigma\{Y_s - Y_u; s, u \leqq t\} \vee \sigma\{N_s - N_u; s, u \leqq t\},$$

dont nous notons $(\mathscr{Y}_t)_{t \geqq 0}$ la trace sur X. Posons également:

$$\bar{\mathscr{Y}}_t = \mathscr{Y}_0 \vee \sigma\{T \wedge t\} \vee \sigma\{\bar{Y}_s; s < t\} \subset \mathscr{X}_0 \vee \sigma\{\bar{Y}_s; s \leqq t\}.$$

On a alors, pour $t \geqq 0$

(4.3) $\quad \bar{Y}_{t \wedge T}(x) = Y_{t \wedge T}(x); \qquad \bar{\mathscr{Y}}_{t \wedge T} = \mathscr{Y}_{t \wedge T}; \bar{\mathscr{Y}}_t \subset \tilde{\mathscr{Y}}_t.$

Mais alors, (4.1), (4.2), (4.3) et le lemme fondamental montrent que (Y_t) est un $(\mathscr{G}_t)$-processus de Poisson sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$. Enfin $I_t \geqq t$ implique $\tau_t \leqq t$ et donc $\tilde{\mathscr{Y}}_t = \mathscr{X}_{\tau_t} \subset \mathscr{X}_t$; il en résulte que $\mathscr{Y}_t \subset \mathscr{X}_t$ pour $t \geqq 0$, et l'argument utilisé dans la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du lemme fondamental permet d'en conclure que $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$.

§ 5. Démonstration du théorème (1.14)

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui est technique, mais précise de manière commode le calcul effectué dans la démonstration du théorème (1.3).

5.1. Lemme. *Soit $\{X, \mathscr{X}\}$ un espace mesurable séparable, $\mathscr{Y}$ une sous-tribu séparable de $\mathscr{X}$, et m une probabilité sur $\{X, \mathscr{X}\}$ telle que $\mathscr{X}$ soit diffuse conditionnellement à $\mathscr{Y}$ pour cette probabilité m. Il existe alors une tribu séparable diffuse $\mathfrak{A} \subset \mathscr{X}$, indépendante de $\mathscr{Y}$, et telle que $\mathscr{X} = \mathfrak{A} \vee \mathscr{Y}$ (il s'agit là d'une égalité entre tribus non complétées).*

Démonstration. Soit Φ une variable aléatoire à valeurs dans [0, 1], engendrant la tribu $\mathscr{X}$. Soit $F(t, x)$ une version, continue pour tout x, de la répartition conditionnelle $m\{\Phi \leqq t \mid \mathscr{Y}\}$ (cf. définition (1.2)). Posons

$$S = \{(t, x) \mid F(s, x) < F(t, x) < F(s', x) \text{ dès que } s < t < s'\}.$$

L'ensemble aléatoire $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{Y}$-mesurable S est donc l'ensemble des points de croissance à gauche et à droite de F. Son complémentaire S^c est à coupes fermées, et satisfait à

(5.1) $m\{\Phi \in S^c\} = 0.$

Posons alors

(5.2) $\psi(x) = F(\Phi(x), x) \cdot 1_{\{\Phi(x) \in S(\cdot, x)\}} + (\Phi(x) + 2) \cdot 1_{\{\Phi(x) \in S^c(\cdot, x)\}}.$

En vertu de (5.1), $\psi = F(\phi, \cdot)$ m-p.s. et ψ est donc une variable de loi uniforme sur [0, 1], indépendante de $\mathscr{Y}$ d'après le calcul effectué au § 1. Posons

(5.3) $F^{-1}(t, x) = \inf\{s \mid F(s, x) > t\},$

qui est $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{Y}$-mesurable. Alors, on a la formule inverse suivante

(5.4) $\Phi = (\Psi - 2) \cdot 1_{\{\Psi \geqq 2\}} + F^{-1}(\psi, \cdot) \cdot 1_{\{\psi \leqq 1\}},$

qui nous permet de calculer Φ en fonction de Ψ et de F. Il est alors clair que la tribu $\mathfrak{A}$ engendrée par Ψ répond à la question.

5.2. Corollaire. *Soient $\{X, \mathscr{X}, m\}$ et $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$ deux espaces de Blackwell munis de probabilités diffuses, $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ étant de plus séparé. Alors, il existe $A \in \mathscr{X}$, avec $m(A) = 1$, et une application Φ de X dans Ω telle que*

(i) $B = \Phi(A) \in \mathscr{F}$;

(ii) $\Phi^{-1}(\mathscr{F}/B) = \mathscr{X}/A$;

(iii) $\Phi(m) = \mathbb{P}$.

Démonstration. Appliquons le lemme (5.1) en prenant pour $\mathscr{Y}$ la tribu grossière, ce qui donne $\mathfrak{A} = \mathscr{X}$, et la variable Ψ de la démonstration du lemme (5.1) envoie donc $\{X, \mathscr{X}, m\}$ sur $\{C, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda\}$, où C est une partie analytique (en raison des propriétés des espaces de Blackwell) de [0, 3] telle que $\lambda(C \cap [0, 1]) = 1$, où λ est la mesure de Lebesgue, et $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens; prenons alors $B \subset C \cap [0, 1]$ borélien, satisfaisant à $\lambda(B)=1$ (on rappelle que les ensembles analytiques sont universellement mesurables), puis $A=\Psi^{-1}(B)\in\mathscr{X}$, et le corollaire est montré dans le cas où $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}=\{[0,1],\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda\}$. Dans le cas général, nous obtenons d'abord à l'aide du lemme (5.1) une application Ψ' de $\{\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}\}$ sur $\{C',\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda\}$ où C' est analytique tel que $\lambda(C')=1$; mais, cette fois-ci, la tribu $\mathscr{F}$ étant séparée, Ψ' est injective et il résulte alors du théorème de Souslin-Lusin (Dellacherie-Meyer [6, Th. 3−21]) que Ψ' est un *isomorphisme* des espaces mesurables $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ et $\{C',\mathscr{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $A=\Psi^{-1}(C'\cap C)$, la restriction à A de $\Phi=(\Psi')^{-1}\circ\Psi$ satisfait aux conditions du corollaire.

Nous allons utiliser la conséquence suivante des deux résultats cidessus. Les notations qui viennent sont propres au lemme que nous allons énoncer maintenant. Soit Ω l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues à droite et réglées, nulles à l'origine; soient $(Z_t)_{t\geqq 0}$ les applications coordonnées de Ω définies par $Z_t(\omega)=\omega(t)$, et $\mathscr{F}_t=\sigma\{Z_s;\, s\leqq t\}$ la filtration engendrée par (Z_t); nous notons $\mathscr{F}$ pour $\mathscr{F}_\infty$. L'espace Ω est Lusinien (Dellacherie-Meyer [6, chap. IV]) et $\mathscr{F}$ est la tribu des boréliens de Ω; en particulier l'espace mesurable $\{\Omega,\mathscr{F}\}$ est un espace de Blackwell séparé, et toutes les tribus $\mathscr{F}_t$ sont séparables, et sont donc des tribus de Blackwell. On a le même résultat si nous considérons Ω^1, l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues à droite et réglées, avec sa filtration $(\mathscr{F}_t^1)_{0\leqq t\leqq 1}$ et ses applications coordonnées $(Z_t^1)_{0\leqq t\leqq 1}$.

Soit d'autre part $\{W,\mathscr{Y}\}$ un autre espace de Blackwell séparé, et T une variable sur cet espace, à valeurs dans $]0,+\infty[$. Nous munissons $\Omega\times W$ de la filtration $\bar{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_t\times\mathscr{Y}$, et nous considérons T comme une variable sur $\Omega\times W$ ne dépendant que de la seconde coordonnée, et par conséquent $\mathscr{Y}$-mesurable [6]. Enfin, nous donnons d'une part une probabilité μ sur $\{W,\mathscr{Y}\}$ et d'autre part deux probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur $\{\Omega,\mathscr{F}\}$, pour lesquelles (Z_t) est un P.A.I. diffus. Il est connu que les espaces probabilisés $\{\Omega,\mathscr{F}_t,\mathbb{P}\}$ et $\{\Omega,\mathscr{F}_t,\mathbb{Q}\}$ sont isomorphes dès que t est >0, le lemme cidessous étend ce résultat au cas où t est remplacé par une variable aléatoire indépendante de (Z_t):

5.3. Lemme. *Il existe $A\in\bar{\mathscr{F}}$ tel que $\mathbb{P}\times\mu(A)=1$, et $B\in\bar{\mathscr{F}}$ tel que $Q\times\mu(B)=1$, et une bijection bimesurable φ échangeant les mesures de $\{A,\bar{\mathscr{F}}_{T|A},\mathbb{P}\times\mu\}$ sur $\{B,\bar{\mathscr{F}}_{T|B},Q\times\mu\}$, telle que $H\circ\varphi=H$ pour toute variable $\mathscr{Y}$-mesurable H.*

Démonstration: la relation ainsi définie entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ étant transitive, nous pouvons supposer que $\mathbb{Q}$ est la mesure de Wiener, pour laquelle (Z_t) est donc le mouvement brownien.

Partons de l'espace $\{\Omega\times W,\bar{\mathscr{F}},\mathbb{P}\times\mu\}$. Le P.A.I. (Z_t) étant diffus et indépendant de $\mathscr{Y}$, la tribu $\sigma\{T;Z_{s\wedge T},s\geqq 0\}$ est diffuse conditionnellement à $\mathscr{Y}$ (puisque la variable T est strictement positive) et *indépendante de $\mathscr{Y}$ conditionnellement* à T.

La construction faite au lemme (5.1) fournit alors une tribu séparable $\mathfrak{A}$, telle que

(5.5) $\mathfrak{A}$ soit indépendante de $\mathscr{Y}$;

$$\mathfrak{A}\vee\sigma\{T\}=\sigma\{T;Z_{s\wedge T},s\geqq 0\}.$$

[6] Nous identifions la tribu $\mathscr{Y}$ sur W et la tribu $\bar{\mathscr{F}}_0$ sur $\Omega\times W$

En conséquence, on a aussi $\overline{\mathscr{F}}_T = \mathfrak{A} \vee \mathscr{Y}$. Par ailleurs, en vertu de la propriété de Markov forte des $(\overline{\mathscr{F}}_t)$-P.A.I., la tribu

(5.6) $\mathscr{B} = \sigma\{Z_{T+s} - Z_t, s \geqq 0\}$

est indépendante de $\overline{\mathscr{F}}_T$, et diffuse car T est finie. Le corollaire (5.2) nous permet de mettre en relation les espaces $\{\Omega \times W, \mathfrak{A}, \mathbb{P} \times \mu\}$ (resp. $\{\Omega \times W, \mathscr{B}, \mathbb{P} \times \mu\}$) et $\{\Omega^1, \mathscr{F}_1^1, \mathbb{Q}\}$ (resp. et $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q}\}$); comme les tribus $\mathfrak{A}$ et $\mathscr{B}$ sont indépendantes, il existe $A \in \mathfrak{A} \vee \mathscr{B}$ tel que $\mathbb{P} \times \mu(A) = 1$ et un Brownien $(\tilde{B}_t)_{t \geqq 0}$ sur $\{\Omega \times W, \mathfrak{A} \vee \mathscr{B}, \mathbb{P} \times \mu\}$ tel que

(5.7) les tribus $\mathfrak{A}$ et $\sigma\{\tilde{B}_t, t \leqq 1\}$ coïncident sur A;

les tribus $\mathscr{B}$ et $\sigma\{\tilde{B}_{t+1} - \tilde{B}_1, t \geqq 0\}$ coïncident sur A.

Le mouvement brownien ainsi défini est indépendant de $\mathscr{Y}$. Posons alors

(5.8) $B_t = \sqrt{T} \cdot \tilde{B}_{t/T}$; $\mathscr{B}_t = \mathscr{Y} \vee \sigma\{B_s, s \leqq t\}$

$\tilde{\mathscr{B}}_t = \mathscr{Y} \vee \sigma\{\tilde{B}_s; s \leqq t\}$.

Nous allons montrer le résultat suivant:

(5.9) (B_t) est un $(\mathscr{B}_t)$-mouvement brownien sur $\{\Omega \times W, \overline{\mathscr{F}}, \mathbb{P} \times \mu\}$;

les tribus $\overline{\mathscr{F}}_T$ et $\overline{\mathscr{B}}_T$ coïncident sur A.

Remarquons que la première assertion équivaut à dire que (B_t) est un brownien indépendant de $\mathscr{Y}$. La seconde assertion de (5.9) est une conséquence immédiate de (5.5) et (5.8). Pour la première, remarquons déjà que T est $\mathscr{B}_0 = \tilde{\mathscr{B}}_0$-mesurable, et que $\mathscr{B}_t = \tilde{\mathscr{B}}_{t/T}$. Le brownien $\tilde{B}$, étant indépendant de $\mathscr{Y}$, est un $(\tilde{\mathscr{B}}_t)$-brownien, ce qui, d'après une caractérisation due à Watanabe [8], équivaut à dire que $(\tilde{B}_t)$ et $(\tilde{B}_t^2 - t)$ sont des $(\tilde{\mathscr{B}}_t)$-martingales. Pour obtenir (5.9), il nous suffit donc de déduire de ceci que (B_t) et $(B_t^2 - t)$ sont des $(\mathscr{B}_t)$-martingales, ce qui résulte des égalités suivantes, où $t \geqq s$:

$$E(B_t - B_s \mid \mathscr{B}_s) = \sqrt{T} \cdot \mathbb{E}(\tilde{B}_{t/T} - \tilde{B}_{s/T} \mid \tilde{\mathscr{B}}_{s/T}) = 0,$$

$$E(B_t^2 - B_s^2 \mid \mathscr{B}_s) = T \cdot \mathbb{E}(\tilde{B}_{t/T}^2 - \tilde{B}_{s/T}^2 \mid \tilde{\mathscr{B}}_{s/T}) = T \cdot \frac{t-s}{T} = t - s,$$

où nous avons appliqué le théorème d'arrêt de Doob au temps d'arrêt s/T. Interprétons (5.9): l'application φ, qui au point $(\omega, w) \in \Omega \times W$ associe le point $(B(\omega, w), w) \in \Omega \times W$, où $B(\omega, w)$ est la trajectoire $t \to B_t(\omega, w)$, définit donc une bijection bimesurable (en vertu du théorème de Souslin-Lusin déjà cité) échangeant les mesures entre deux parties de probabilité 1 de $\{\Omega \times W, \overline{\mathscr{F}}, \mathbb{P} \times \mu\}$ et $\{\Omega \times W, \overline{\mathscr{F}}, Q \times \mu\}$, qui échange les restrictions correspondantes de la tribu $\overline{\mathscr{F}}_T$; comme de plus $\varphi(\omega, w)$ est de la forme (ω', w) (avec *le même* w), la condition $H \circ \varphi = H$ si H est $\mathscr{Y}$-mesurable est satisfaite. Le lemme est montré.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème (1.14), et nous retenons donc deux notations du § 2. Soient donc $\Psi(u)$ et $\Phi(u)$ deux fonctions de Lévy de P.A.I. diffus admettant respectivement μ et ν comme mesures de Lévy, que nous supposons non nulles. Nous allons d'abord montrer le théorème dans le cas particulier où

5.4. Hypothese. *Il existe un borélien B de $\mathbb{R}$, situé à une distance >0 de l'origine, et tel que*

(i) *μ et ν coïncident sur B, avec $\mu(B)=\nu(B)>0$;*

(ii) *le remplacement des mesures de Lévy μ et ν par μ/B^c et ν/B^c respectivement dans les fonctions de Lévy ψ et ϕ n'affecte pas le caractère diffus des P.A.I. correspondants.*

Soit donc $\{\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, Z_t, \mathbb{P}\}$ la réalisation canonique du P.A.I. de fonction de Lévy ϕ. Nous allons construire dans ce flot un processus additif (Y_t), qui soit un P.A.I. de fonction de Lévy ψ, et satisfasse aux propriétés d'adaptation définies au théorème (1.14). Nous exposons la démonstration en plusieurs étapes:

Choix du compteur de référence (N_t)

Comme B est situé à une distance >0 de l'origine, $\mu(B)<\infty$, et nous pouvons définir les processus additifs (Z_t^B) et (N_t^B) en posant pour $t>0$

$$(5.10)\quad Z_t^B=\sum_{0<s\leqq t} \Delta Z_s\cdot 1_{\{\Delta Z_s\in B\}},$$

$$N_t^B=\sum_{0<s\leqq t} 1_{\{\Delta Z_s\in B\}}.$$

Le processus (N_t^B) est un processus de Poisson de paramètre $\nu(B)=\mu(B)<\infty$. A partir de (N_t^B), nous allons fabriquer notre compteur de référence (N_t) par une méthode analogue à celle employée au lemme (2.7). Si $(T_n^B)_{n\in Z}$ désigne la suite des temps de saut de (N_t^B), à chaque instant T_n^B, nous mettons en route une horloge H_n qui fonctionne durant l'intervalle $[T_n^B, T_{n+1}^B[$, et qui sonne aux instants T_n^B, $T_n^B+\varepsilon$, $T_n^B+2\varepsilon, \ldots$; le compteur qui compte toutes les sonneries sur $]0, t]$ sera donc notre compteur (N_t): c'est un processus de renouvellement dont les sauts sont au plus espacés de ε, qui saute lorsque le processus de Poisson (N_t^B) saute, et qui est adapté à $(\mathscr{F}_t)$.

Ce compteur de référence (N_t) permet de définir comme d'habitude le système de base $\{X, (\mathscr{X}^n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\mathscr{X}_t)_{t\geqq 0}\, S, \bar{m}\}$, où $\bar{m}=m/m(X)$, m étant la mesure de Palm *bornée* de (N_t).

Construction du processus (Y_t)

Posons $\tilde{Z}_t=Z_t-Z_t^B$ pour $t\geqq 0$: on définit ainsi un P.A.I. sans saut commun avec (Z_t^B), donc indépendant de (Z_t^B). Ce P.A.I. est diffus, puisque sa fonction de Lévy $\tilde{\Psi}$ s'obtient en remplaçant μ par μ/B^c dans Ψ (cf. hypothèse (4.4.ii)). Posons

$$\mathscr{X}_t^0=\sigma\{Z_s(x), 0\leqq s\leqq t\}$$

pour $t\geqq 0$. Du fait que $(\tilde{Z}_t)$ est un $(\mathscr{F}_t)$-P.A.I. de fonction de Lévy $\tilde{\Psi}$ sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, \mathbb{P}\}$, il résulte, en vertu du lemme fondamental, que $(\tilde{Z}_t(x))_{t\geqq 0}$ est un $(\mathscr{X}_t)$ P.A.I., donc à fortiori un $(\mathscr{X}_t^0)$-P.A.I. de fonction de Lévy $\tilde{\Psi}$ sur $\{X, \mathscr{X}, \bar{m}\}$. Désignons par $\mathscr{Y}$ la tribu $\sigma\{Z^B_{t\wedge T}, t \geqq 0\}$ contenue dans $\mathscr{X}$, et interprétons le lemme (5.3):

(5.11) il existe $A \in \mathscr{X}$ tel que $\bar{m}(A)=1$ (on peut supposer que A est S-invariant), et un P.A.I. de fonction de Lévy $\tilde{\Phi}$[7], noté $(\bar{Y}_t(x))_{t\geqq 0}$ défini sur la tribu $\mathscr{Y} \vee \sigma\{\tilde{Z}_s(x), s \geqq 0\}$, $\bar{m}$-indépendant de $\mathscr{Y}$, et tel que les tribus $\mathscr{X}_T^0$ et $\mathscr{Y} \vee \sigma\{\bar{Y}_{t\wedge T}, t \geqq 0\}$ coïncident sur A.

Quitte à modifier $(\bar{Y}_t)$ sur un ensemble $\bar{m}$-négligeable (ce qui ne change rien à (5.11)), nous pouvons supposer que.

(5.12) $\Delta \bar{Y}_t(x) \in B^c \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geqq 0,$

puisque la mesure de Lévy de $\bar{Y}$ est portée par B^c. Nous définissons, comme il est maintenant habituel, un processus additif $(\tilde{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t\}$ à partir de $(\bar{Y}_{t\wedge T}(x))_{t\geqq 0}$ en posant, pour $t \geqq 0$:

(5.13) $$\tilde{Y}_t(\omega) = \sum_{n\geqq 0} \bar{Y}(t+u-T_n(x), S^n x)\cdot 1_{\{T_n(x)<t+u\leqq T_{n+1}(x)\}} - \bar{Y}_u(x),$$

où $(x, u) \in \tilde{\Omega}$ est l'image du point $\omega \in \Omega$ par l'isomorphisme θ entre Ω et $\tilde{\Omega}$. Il est clair que, en vertu de (5.12), on a

(5.14) $\Delta \tilde{Y}_t(\omega) \in B^c \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Enfin, nous définissons le processus additif $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ en posant pour $t>0$

(5.15) $Y_t(\omega) = \tilde{Y}_t(\omega) + Z_t^B(\omega).$

Propriétés de (Y_t)

Introduisons la filtration suivante sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t\}$

(5.16) $\mathscr{G}_t = \sigma\{Y_s - Y_u;\, s, u \leqq t\} = \sigma\{\tilde{Y}_s - \tilde{Y}_u;\, s, u \leqq t\} \vee \sigma\{Z_s^B - Z_u^B;\, s, u \leqq t\},$

où la seconde égalité résulte de (5.10) et (5.14).

Posons

(5.17) $E = \{\theta_L \in A\} \in \mathscr{F};$

l'ensemble E s'identifie donc à l'aide de θ à l'ensemble des couples $(x, u) \in \tilde{\Omega}$ tels que $x \in A$. L'ensemble E est donc invariant par (θ_t), et tel que $\mathbb{P}(E)=1$. Nous allons montrer les assertions suivantes:

(5.18) l'inclusion suivante est satisfaite sur E: $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{G}_\varepsilon \subset \mathscr{F}_{2\varepsilon}$;

(5.19) $(Z_t^B)_{t\in\mathbb{R}}$ est un $(\mathscr{G}_t)$-P.A.I., et $(\tilde{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un $(\mathscr{G}_t)$-P.A.I. de fonction de Lévy $\tilde{\Phi}$ sur $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}\}$.

Et ces deux assertions montreront le théorème sous l'hypothèse (5.4). Pour voir (5.18), nous restreignons le flot à $\{\Omega, \mathscr{F}, \theta_t, \mathbb{P}\}$ à E; en vertu de (5.11), la filtration

[7] Obtenue en remplaçant ν par ν/B^c dans Φ (cf. hypothèse (4.4.ii))

$(\mathscr{F}_t)$ et $(\mathscr{G}_t)$ engendrent sur le système de base $\{X, \mathscr{X}, S, \bar{m}\}$ deux filtrations discrètes qui admettent le même générateur $\mathscr{X}_T^0$. En vertu de (3.3) et (3.5), ces deux filtrations discrètes $(\mathscr{X}^n)_{n\in Z}$ et $(\mathscr{Y}^n)_{n\in Z}$ sont donc égales. Mais alors, en vertu du lemme (2.2.iii), on en déduit l'égalité des tribus $\mathscr{F}_{T_1}$ et $\mathscr{G}_{T_1}$, ce qui donne (5.18) puisque T_1 est un temps d'arrêt à la fois pour $(\mathscr{F}_t)$ et $(\mathscr{G}_t)$, à valeurs dans $[0, \varepsilon]$, Voyons (5.19); il nous suffit d'examiner l'assertion relative à $(\tilde{Y}_t)$, l'autre en étant la conséquence. Posons

$$\mathscr{Y}_t = \mathscr{G}_{t|x};$$
$$\overline{\mathscr{Y}}_t = \mathscr{Y}_0 \vee \sigma\{Z^B_{s\wedge T}(x), 0<s<t\} \vee \sigma\{\overline{Y}_s; 0\leqq s\leqq t\}.$$

Alors, on a $\overline{\mathscr{Y}}_{t\wedge T} = \mathscr{Y}_{t\wedge T}$, $\tilde{Y}_{t\wedge T}(x) = \overline{Y}_{t\wedge T}(x)$, et $(\overline{Y}_t)$ est un $(\overline{\mathscr{Y}}_t)$-P.A.I. en vertu de (5.11) et du fait que $\mathscr{Y}_0 = \mathscr{X}_0$ (voir plus haut). Le lemme fondamental nous donne alors le résultat. La démonstration du théorème (1.14) est donc achevée sous l'hypothèse (5.4).

Elimination de l'hypothèse (5.4), *démonstration dans le cas général*

Soient donc ψ et Φ deux fonctions de Lévy de P.A.I. diffus dont les mesures de Lévy respectives μ et ν sont non nulles.

Supposons que l'hypothèse (5.4) ne soit pas satisfaite. J'affirme que nous pouvons nous ramener au cas où

(5.20) il existe deux boréliens disjoint B et C de $\mathbb{R}-\{0\}$, tels que $0<\mu(B)<\infty$ et $0<\nu(C)<\infty$.

En effet, le seul cas où (5.20) n'est pas satisfait est le cas où $\mu=\alpha\varepsilon_x$ et $\nu=\beta\varepsilon_x$ avec $\alpha\neq\beta$. Dans ce cas, si nous notons (Z_t) le P.A.I. de mesure de Lévy μ, nous obtenons un P.A.I. $(\tilde{Z}_t)$ admettant la même filtration (non complétée) que (Z_t) en remplaçant ΔZ_t par $2\Delta Z_t$ en tout point où $\Delta Z_t>0$. La mesure de Lévy du nouveau P.A.I. est alors $\alpha\varepsilon_{2x}$, et satisfait à (5.20), tandis que nous n'avons rien modifié quant à l'étude des filtrations. (Nous venons en fait de voir un cas élémentaire du théorème (1.13)).

Comme $\mu(B)$ et $\nu(C)$ sont finis, la proposition (1.8) nous assure que le remplacement de μ par μ/B^c et ν par ν/C^c respectivement n'affecte pas le caractère diffus de ψ et ϕ.

Soit alors $\chi(u)$ une fonction de Lévy admettant une partie Gaussienne non nulle, et dont la mesure de Lévy λ est égale à $\lambda=\mu_{|B}+\nu_{|C}$. Il est clair que Φ et χ d'une part, χ et ψ d'autre part, satisfont à l'hypothèse (5.4). Comme la propriété d'isomorphisme flou défini par le théorème (1.14) est une relation transitive entre flots, on déduit de l'existence d'un isomorphisme flou entre les flots canoniques des P.A.I. de fonctions de Lévy Φ et χ d'une part, et χ et ψ d'autre part, l'existence d'un isomorphisme flou entre les flots canoniques des P.A.I. de fonctions de Lévy Φ et ψ. La démonstration du théorème est donc achevée.

Annexe: Démonstration du lemme (2.6)

Nous utilisons la caractérisation suivante: le processus $(C_t)_{t>0}$ est un $(\mathscr{C}_t)$-P.A.I. homogène de fonction de Lévy $\psi(u)$ si et seulement si le processus

$$(\mathrm{A.1}) \quad M_t^u = \frac{\exp iu C_t}{\exp t\psi(u)}$$

est une $(\mathscr{C}_t)$-martingale pour tout $u \in \mathbb{R}$. Revenant à l'énoncé du lemme (2.6), il est déjà clair que les processus $(M_t^u)_{t>0}$ sont adaptés à la filtration $(\mathscr{C}_t)$. La propriété de martingale résulte alors des égalités suivantes, qui utilisent la propriété de Markov forte des P.A.I. et le fait que les processus (A_t) et (B_t) sont des P.A.I. homogènes admettant même fonction de Lévy $\psi(u)$:

$$\frac{1}{M_t^u} \cdot \mathbb{E}(M_{t+s}^u \mid \mathscr{C}_t) = \frac{1}{s\psi(u)} \mathbb{E}(\exp iu(C_{t+s} - C_t) \mid \mathscr{C}_t) = ① + ② + ③;$$

où

$$(\mathrm{A.2}) \quad ① = \frac{1}{s\psi(u)} \cdot 1_{\{t>T\}} \cdot \mathbb{E}(\exp iu(B_{t+s-T} - B_{t-T}) \mid \mathscr{B}_{t-T}) = 1_{\{t>T\}};$$

$$(\mathrm{A.3}) \quad ② = \frac{1}{s\psi(u)} \cdot 1_{\{t \leqq T\}} \cdot \mathbb{E}(1_{\{t+s \leqq T\}} \cdot \exp iu(A_{t+s} - A_t) \mid \mathfrak{A}_t);$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A.4}) \quad ③ &= \frac{1}{s\psi(u)} \cdot 1_{\{t \leqq T\}} \cdot \mathbb{E}(1_{\{t+s>T\}} \cdot \exp iu(A_T - A_t) \cdot \exp iu B_{t+s-T} \mid \mathfrak{A}_t) \\
&= \frac{1}{s\psi(u)} \cdot 1_{\{t \leqq T\}} \cdot \mathbb{E}(1_{\{t+s>T\}} \cdot \exp iu(A_T - A_t) \cdot \mathbb{E}(\exp iu B_{t+s-T} \mid \mathfrak{A}_T) \mid \mathfrak{A}_t) \\
&= \frac{1}{s\psi(u)} \cdot 1_{\{t<T\}} \cdot \mathbb{E}(1_{\{t+s>T\}} \cdot \exp iu(A_T - A_t) \cdot \mathbb{E}(\exp iu(A_{t+s} \\
&\quad - A_T) \mid \mathfrak{A}_T) \mid \mathfrak{A}_t) \\
&= \frac{1}{s\psi(u)} \cdot 1_{\{t<T\}} \cdot \mathbb{E}(1_{\{t+s>T\}} \cdot \exp iu(A_{t+s} - A_t) \mid \mathfrak{A}_t).
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant la caractérisation (A.1) pour le processus (A_t): en vertu de (A.3) et (A.4), il vient $② + ③ = 1_{\{t \leqq T\}}$, ce qui donne bien pour finir l'égalité cherchée: $① + ② + ③ = 1_{\{t>T\}} + 1_{\{t \leqq T\}} = 1$. La démonstration du lemme (2.6) est achevée.

Références

1. Ambrose, W., Kakutani, S.: Structure and Continuity of Ergodic flows. Duke math. J. **9**, 25–42 (1942)
2. Benveniste, A.: Processus stationaires et mesures de Palm du flot spécial sous une fonction. Sém. Probab. IX; Lecture Notes in Math. 465 (§ 1 à 5). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
3. Benveniste, A., Jacod, J.: Processus stationnaires et mesures de Palm du flot spécial sous une fonction. Sém. Probab. IX; Lecture Notes in Math. 465, § 6. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
4. Benveniste, A., Jacod, J.: Isomorphisme des filtrations des processus à Accroissements Indépendants et Homogènes. [A paraître]
5. Dellacherie, C.: Capacités et Processus stochastiques dans Ergebnisse der Mathematik und Grenzgebiete. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
6. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiel. Version refondue des chapitres I à IV. Paris: Hermann 1975

7. Jacod, J.: Multivariate Point Processes: predictables projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of Martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **31**, 235–253 (1975)
8. Watanabe, S.: On discontinuous Additive Functionals and Lévy measures of a Markov Process; Jap. J. Math. **34**, 53–79 (1964)
9. de Sam Lazaro, J.: Sur les hélices du flot spécial sous une fonction. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **30**, 279–302 (1974)
10. de Sam Lazaro, J., Meyer, P.A.: Question de théorie des flots. Sém. Probab. IX; Lecture Notes in Math. 465. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
11. Meyer, P.A.: Résultats récents de Benveniste en théorie des flots [A paraître dans Sém. Probab. XI.]
12. Neveu, J.: Cours sur les Processus Ponctuels. École d'Été de St Flour 1976
13. Ornstein, D.S.: Ergodic Theory, Randomnes, and Dynamical Systems. Yale Math. Monographs 1974
15. Rosenblatt, M.: Stationary Processes as Shifts of Functions of Independent Random Variables; J. Math. Mech., **8** (1959)
16. Shields, P.: The Theory of Bernoulli Shifts; Chicago Lecture in Math. 1973
17. Sinai, Ya.G.: A Weak isomorphism of transformations with an invariant measure. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 147 (1962); Soviet Math. Dokl. **3**, 1725–1729 (1962)

Reçu le 17 Février 1977