Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 11, 74–81 (1968)

Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse

J. Mecke

Eingegangen am 23. Februar 1968

Summary. For every Radon measure λ on the real line let P_λ denote the Poisson process with intensity λ, i.e. with the property that the mean of the occurrences in the Borel set B is $\lambda(B)$. A point process P is called a doubly stochastic Poisson process, if it can be represented as a mixture of Poisson processes:

$$P = \int P_\lambda Q(d\lambda),$$

where Q is a probability measure on a suitable σ-algebra of subsets of the set of all Radon measures (Cox, Bartlett, Kingman).

If the occurrences of a point process P are independently selected with probability q, we obtain a resulting point process $D_q P$. For instance we have $D_q P_\lambda = P_{q\lambda}$. Let Π denote the set of all point processes and consequently

$$D_q \Pi = \{D_q P\colon\ P \in \Pi\}.$$

It is shown, that the set

$$\bigcap_{0<q<1} D_q \Pi$$

of point processes is identical with the set of all doubly stochastic Poisson processes.

1. Grundbegriffe

Es sei M die Menge der Radonschen Maße λ auf der reellen Achse R. Die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von M, bez. der für alle Borelmengen B die Funktionen $z_B(\lambda) = \lambda(B)$ meßbar sind, werde durch $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Ein zufälliges Radonsches Maß Λ ist dann gegeben durch ein Verteilungsgesetz P auf $\mathfrak{M}$. Wir werden kürzer von einem zufälligen Maß (z.M.) Λ sprechen.

2. Das Laplacesche Funktional

Mit $\mathscr{U}$ werde die Menge der beschränkten, meßbaren, finiten Funktionen $u(x) \geqq 0$ auf R bezeichnet. (Eine Funktion heißt finit, wenn sie einen kompakten Träger besitzt; d.h. außerhalb eines gewissen endlichen Intervalls verschwindet.) Jedem Verteilungsgesetz P auf $\mathfrak{M}$ ordnen wir eine Funktion L_P auf $\mathscr{U}$ zu:

$$L_P(u) = \int \exp[-\int u(x)\,\lambda(dx)]\,P(d\lambda),$$

und nennen L_P das Laplacesche Funktional (L.F.) zu P. Durch L_P ist P eindeutig bestimmt.

3. Doppelt stochastische Poissonsche Prozesse

Falls Λ mit Wahrscheinlichkeit 1 ein ganzzahliges Maß ist, wird Λ als zufällige Punktfolge (z.Pf.) oder Punktprozeß bezeichnet. Wir werden für z.Pf. im allgemeinen das Symbol Φ, für die Realisierungen die Bezeichnung φ wählen.

Im folgenden bedeute $\mathfrak{B}$ das System der Borelmengen von R, $\mathfrak{B}'$ dagegen das System der beschränkten Borelmengen. Einem ganzzahligen Maß $\varphi \in M$ läßt sich eine Folge von nichtnegativen ganzen Zahlen a_k und eine Folge von Punkten $x_k \in R$, die sich nirgends häufen, zuordnen, derart, daß für alle $B \in \mathfrak{B}'$ gilt

$$\varphi(B) = \sum_{\{k:\, x_k \in B\}} a_k .$$

Diesen Sachverhalt drücken wir formelmäßig wie folgt aus:

$$\varphi = \sum_k a_k \, \delta_{x_k}$$

mit

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (B \in \mathfrak{B}).$$

Spezielle z. Pf. sind die Poissonschen Prozesse. Ein Poissonscher Prozeß ist eindeutig charakterisiert durch seine Intensitätsverteilung $\lambda \in M$:

$$\lambda(B) = \int \varphi(B)\, P(d\varphi) \qquad (B \in \mathfrak{B}).$$

Das zugehörige L. F. ist

$$L_P(u) = \exp[-\int (1 - \exp[-u(x)])\, \lambda(dx)] \qquad (u \in \mathscr{U}).$$

Daran kann man beispielsweise ablesen, daß die Zufallsgrößen $\varphi(B)$ $(B \in \mathfrak{B}')$ Poissonsch verteilt sind mit dem Parameter $\lambda(B)$, und daß für disjunkte $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}'$ die Zufallsgrößen $\varphi(B_1), \ldots, \varphi(B_n)$ unabhängig sind. (Man setze $u = y_1 k_{B_1}(x) + \cdots + y_n k_{B_n}(x)$, wobei k_B die Indikatorfunktion der Menge B bedeutet.) Im folgenden bezeichne P_λ das Verteilungsgesetz des Poissonschen Prozesses mit der Intensitätsverteilung λ.

Es sei nun Λ ein z. M. mit dem Verteilungsgesetz Q. Wir können Λ eine Mischung Poissonscher Prozesse zuordnen:

$$P(A) = \int P_\lambda(A)\, Q(d\lambda) \qquad (A \in \mathfrak{M}).$$

Derartige Mischungen Poissonscher Prozesse nennt man nach Cox [2], Bartlett [1] und Kingman [5] doppelt stochastische Poissonsche Prozesse (d. s. P. P.). Als L. F. zu P erhält man:

$$L_P(u) = L_Q(1 - \exp[-u]) \qquad (u \in \mathscr{U}). \tag{3.1}$$

4. Ein Auswürfelverfahren

Gegeben sei eine z. Pf. Φ mit dem Verteilungsgesetz P. Zu jeder Realisierung

$$\varphi = \sum_k a_k \, \delta_{x_k}$$

wird eine neue Realisierung

$$\varphi' = \sum_k a_k' \, \delta_{x_k}$$

ausgewürfelt, und zwar in folgender Weise:

Wir stellen uns vor, daß an den Stellen x_k sich a_k Teilchen befinden. Für jedes einzelne Teilchen wird unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit q

ausgewürfelt, ob es erhalten bleibt oder beseitigt wird (Wahrscheinlichkeit $1-q$). Die Zahl der Teilchen, die jeweils von den a_k Teilchen übrig bleiben, sei a_k'. Auf diese Weise erhalten wir eine neue z.Pf. Φ'. Das Verteilungsgesetz von Φ' werde durch $D_q P$ bezeichnet. Es ist leicht einzusehen, daß die Operationen D_q bez. der Hintereinanderausführung eine Halbgruppe bilden:

$$D_q D_r = D_{qr}. \tag{4.1}$$

Wir wollen das L.F. von $D_q P$ mit Hilfe von L_P berechnen.

Hilfssatz 4.1. *Für alle $u \in \mathfrak{U}$ und alle q mit $0 < q < 1$ gilt*

$$L_{D_q P}(u) = L_P(-\log[1 - q + q\, e^{-u}]).$$

Beweis. Es sei N_φ die (endliche) Menge der Punkte $x \in R$, für die $\varphi(\{x\}) > 0$ und $u(x) > 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} L_{D_q P}(u) &= \int \prod_{x \in N_{\varphi'}} \exp[-\varphi'(\{x\})\, u(x)]\, D_q P(d\varphi') \\ &= \int \prod_{x \in N_\varphi} [1 - q + q\, e^{-u(x)}]^{\varphi(\{x\})}\, P(d\varphi) \\ &= L_P(-\log[1 - q + q\, e^{-u}]). \end{aligned}$$

Falls Φ ein d.s.P.P. war mit dem Verteilungsgesetz P und dem L.F. (3.1), dann ist das L.F. zu $D_q P$ durch

$$L_{D_q P}(u) = L_Q(q(1 - e^{-u})) \tag{4.2}$$

gegeben.

Ausgehend von Q definieren wir ein neues Verteilungsgesetz Q' auf M:

$$Q'(A) = \int k_A(q\lambda)\, Q(d\lambda) \qquad (A \in \mathfrak{M})$$

(k_A ... Indikatorfunktion zu A).

Dann kann man anstelle von (4.2) schreiben:

$$L_{D_q P}(u) = L_{Q'}(1 - e^{-u}). \tag{4.2'}$$

Damit ist gezeigt, daß auch $D_q P$ wieder ein d.s.P.P. ist. Der d.s.P.P. mit dem Verteilungsgesetz $P = \int P_\lambda Q(d\lambda)$ geht somit durch das Auswürfelverfahren über in den d.s.P.P. mit dem Verteilungsgesetz $D_q P = \int P_{q\lambda}\, Q(d\lambda) = \int P_\lambda Q'(d\lambda)$. Eine einfache Folgerung ist der

Satz 4.1. *Zu jedem d.s.P.P. mit einem Verteilungsgesetz P und jeder Zahl q mit $0 < q \leqq 1$ gibt es eine z.Pf. mit einem Verteilungsgesetz P^q derart, daß $D_q P^q = P$ gilt.*

Beweis. Falls $P = \int P_\lambda\, Q(d\lambda)$ ist, können wir $P^q = \int P_{1/q\lambda}\, Q(d\lambda)$ setzen.

Das Anliegen der vorliegenden Arbeit besteht nun darin zu zeigen, daß diese Eigenschaft für die d.s.P.P. charakteristisch ist. Im nächsten Abschnitt wird nämlich der folgende Satz bewiesen:

Satz 4.2. *Falls zu einer z.Pf. mit dem Verteilungsgesetz P und jeder Zahl q mit $0 < q \leqq 1$ eine z.Pf. P^q existiert derart, daß $D_q P^q = P$ gilt, dann ist P Verteilungsgesetz eines d.s.P.P.*

5. Beweis von Satz 4.2

Zunächst wird in den folgenden beiden Hilfssätzen nachgewiesen, daß der Limes $\lim\limits_{q \to 0} L_{P^q}(q u)$ immer existiert.

Hilfssatz 5.1. *Für alle* $u \in \mathcal{U}$ *mit* $\sup u(x) < 1$ *gilt*

$$\lim_{q \to 0} L_{P^q}(q u) = L_P(-\log[1 - u]).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 4.1 hat man ausgehend von $D_q P^q = P$ für kleine q:

$$L_{P^q}(q u) = L_P\left(-\log\left[1 - \frac{1}{q}(1 - e^{-qu}\right)\right]. \tag{5.1}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Aus der Formel (5.1) ergibt sich außerdem, daß das Funktional $L_{P^q}(v)$ für $v \in \mathcal{U}$ mit $\sup v(x) < q$ eindeutig durch L_P bestimmt ist. Da bei festem $v \in \mathcal{U}$ für alle komplexen Werte z aus der rechten Halbebene $L_{P^q}(z v)$ analytisch ist, folgt, daß das Funktional L_{P^q} überhaupt und damit P^q durch P eindeutig bestimmt ist. Zu jedem q gibt es also genau ein P^q mit $D_q P^q = P$. Eine Verallgemeinerung von Hilfssatz 5.1 ist

Hilfssatz 5.2. *Für alle* $v \in \mathcal{U}$ *mit* $\sup v(x) < 1$ *und alle positiven* $b \leqq 1$ *gilt*

$$\lim_{q \to 0} L_{P^q}\left(q \frac{1}{b} v\right) = L_{P^b}(-\log[1 - v]).$$

Beweis. Wir setzen $q b^{-1} = r$ und erhalten

$$\lim_{q \to 0} L_{P^q}(q b^{-1} v) = \lim_{r \to 0} L_{P^{br}}(r v). \tag{5.2}$$

Unter Benutzung der Halbgruppeneigenschaft (4.1) der D_q ergibt sich

$$D_b(D_r P^{br}) = D_{br} P^{br} = P.$$

Da andererseits $D_b P^b = P$ ist, folgt aus der eben bewiesenen eindeutigen Bestimmtheit von P^b, daß $D_r P^{br} = P^b$ gilt. Somit bekommen wir aus (5.2) und Hilfssatz 4.1:

$$\lim_{q \to 0} L_{P^q}(q b^{-1} v) = \lim_{r \to 0} L_{P^b}(-\log[1 - r^{-1}(1 - e^{-rv})]).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Wir setzen

$$\hat{L}(u) = \lim_{q \to 0} L_{P^q}(q u) \qquad (u \in \mathcal{U}) \tag{5.3}$$

und zeigen, daß $\hat{L}(u)$ das L.F. zu einem Verteilungsgesetz Q auf $\mathfrak{M}$ darstellt.

Aus der Definition von $\hat{L}$ und Hilfssatz 5.1 folgt zunächst:

$$L_P(v) = \hat{L}(1 - e^{-v}) \qquad (v \in \mathcal{U}). \tag{5.4}$$

Für alle $u \in \mathcal{U}$ gibt es ein positives $b \leqq 1$, so daß $\sup b u(x) < 1$ wird. Mit (5.3) und Hilfssatz 5.2 erhalten wir dann

$$\hat{L}(u) = L_{P^b}(-\log[1 - b u]) \qquad (\sup u < b^{-1}). \tag{5.5}$$

Es sei $\mathfrak{J}$ die Menge aller endlichen halboffenen Intervalle $I = [a, b)$ mit rationalen Endpunkten a, b. $\mathfrak{J}$ ist abzählbar. Mit $\mathscr{F}$ werde die Menge aller nichtnegativen Funktionen f auf $\mathfrak{J}$ bezeichnet, mit $\mathfrak{F}$ die kleinste σ-Algebra von Teilmengen aus $\mathscr{F}$, bez. der alle Funktionen $z_I(f) = f(I)$ $(I \in \mathfrak{J})$ meßbar sind.

Hilfssatz 5.3. *Für jede Folge* $I_1, I_2, \ldots, I_m \in \mathfrak{J}$ *ist*

$$l(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m) = \hat{L}(s_1 k_{I_1} + \cdots + s_m k_{I_m})$$

die Laplace-Transformierte eines Verteilungsgesetzes $P^{(m)}$ *auf* $(R^+)^m = [0, \infty)^m$.

Beweis. Nach (5.3) gilt

$$l(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m) = \lim_{q \to 0} l_q(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m) \tag{5.6}$$

mit

$$l_q(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m) = L_{P^q}(s_1 q k_{I_1} + \cdots + s_m q k_{I_m}).$$

Die l_q sind Laplace-Transformierte von Verteilungsgesetzen auf $(R^+)^m$, und l ist bei $s_1 = \cdots = s_m = 0$ stetig. Daraus folgt die Behauptung (s. Anhang).

Da für alle k

$$l_q(s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0; I_1, \ldots, I_m, I_{m+1}, \ldots, I_{m+k}) = l_q(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m)$$

ist, hat nach (5.6) auch l die entsprechende Eigenschaft; d.h. die Verteilungsgesetze $P^{(m)}$ sind untereinander verträglich. Nach dem Konsistenztheorem von KOLMOGOROV (siehe [6], 4.3A) existiert somit ein Verteilungsgesetz Q auf $\mathfrak{F}$ mit

$$\int w(f(I_1), \ldots, f(I_m))\, Q(df) = \int w(x_1, \ldots, x_m)\, P^{(m)}(dx_1, \ldots, dx_m) \tag{5.7}$$

(w beliebige meßbare, nichtnegative Funktion auf $(R^+)^m$)

oder

$$l(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m) = \int \exp[-s_1 f(I_1) - \cdots - s_m f(I_m)]\, Q(df).$$

Mit Q-Wahrscheinlichkeit 1 sind die Mengenfunktionen f auf $\mathfrak{J}$ endlichadditiv; d.h. für $I_1, I_2, I_3 \in \mathfrak{J}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = I_3$ gilt

$$Q\{f\colon f(I_3) = f(I_1) + f(I_2)\} = 1.$$

Damit gleichbedeutend ist nämlich die Behauptung

$$l(s_1, s_2, s_3; I_1, I_2, I_3) = l(s_1 + s_3, s_2 + s_3; I_1, I_2),$$

die ihrerseits aus der entsprechenden Beziehung für l_q und (5.6) folgt.

Es wird nun weiter gezeigt, daß die $f \in \mathscr{F}$ mit Q-Wahrscheinlichkeit 1 kompakte Mengenfunktionen im Sinne von MARCZEWSKI [7] und damit σ-additiv sind. Diesen Nachweis führen wir, indem wir zeigen, daß für jedes $I \in \mathfrak{J}$ mit $I = [a, b)$ und jede Folge $K_n = [a, c_n)$ von Intervallen aus $\mathfrak{J}$ mit $c_n \uparrow_n b$ gilt:

$$Q\left\{f\colon \lim_{n \to \infty} f(I - K_n) = 0\right\} = 1.$$

Für ein endlichadditives $f \in \mathscr{F}$ bilden die Zahlen $f(I - K_n)$ eine monoton nicht wachsende Folge. Das Infimum sei α_f. Aus $\varphi(I - K_n) \downarrow 0$ für $\varphi \in M$ folgt in Verbindung mit (5.4):

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} \int \exp[-\varphi(I-K_n)]\, P(d\varphi) \\ &= \lim_{n\to\infty} L_P(k_{I-K_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \hat{L}(1-\exp[-k_{I-K_n}]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \hat{L}((1-e^{-1})\, k_{I-K_n}). \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 5.3 und (5.7) ist das gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} \int \exp[-(1-e^{-1})\, f(I-K_n)]\, Q(df) \\ &= \int \exp[-(1-e^{-1})\,\alpha_f]\, Q(df). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\int \exp[-(1-e^{-1})\,\alpha_f]\, Q(df) = 1$$

kann aber nur bestehen, wenn

$$Q\{f\colon \alpha_f = 0\} = 1$$

ist.

Die $f \in \mathscr{F}$ sind also mit Q-Wahrscheinlichkeit 1 σ-additiv auf $\mathfrak{J}$, lassen sich daher zu Maßen auf $[R, \mathfrak{B}]$ ausdehnen und können somit als Elemente aus M aufgefaßt werden. Wir können daher von jetzt ab Q als Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}$ verstehen.

Aus der Konstruktion von Q ist zu ersehen, daß

$$L_Q(s_1 k_{I_1} + \cdots + s_m k_{I_m}) = \hat{L}(s_1 k_{I_1} + \cdots + s_m k_{I_m}) \qquad (I_1, \ldots, I_m \in \mathfrak{J}).$$

Infolge der Stetigkeitseigenschaften von $\hat{L}$, die man an der Formel (5.5) ablesen kann, ergibt sich daraus

$$L_Q(u) = \hat{L}(u)$$

für alle $u \in \mathscr{U}$. Nach (5.4) gilt somit

$$L_P(u) = L_Q(1-e^{-u})$$

(vgl. (3.1)), d.h. P ist das Verteilungsgesetz eines d.s.P.P.:

$$P = \int P_\lambda Q(d\lambda).$$

Wir wollen zum Abschluß das Ergebnis der Arbeit noch einmal zusammenfassen (Satz 4.1, 4.2):

Satz 5.1. *Eine zufällige Punktfolge mit dem Verteilungsgesetz P ist genau dann ein doppelt stochastischer Poissonscher Prozeß, wenn es zu jeder Zahl q mit $0 < q < 1$ eine zufällige Punktfolge mit einem Verteilungsgesetz P^q gibt derart, daß P^q bei Anwendung des Auswürfelverfahrens D_q in P übergeht*: $D_q P^q = P$.

Anmerkungen. a) In Abschnitt 5 ist implizit der Beweis für die folgende einfachere Tatsache enthalten:

Es sei $\mathscr{V}$ die Menge der erzeugenden Funktionen v für die Verteilung nichtnegativer, ganzzahliger zufälliger Größen:

$$v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad |z| < 1, \quad 0 \leqq p_k \leqq 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Die Funktion $w \in \mathscr{V}$ habe die Eigenschaft, daß für alle q mit $0 < q < 1$ ein $w^q \in \mathscr{V}$ existiert mit

$$w^q(1 - q + qz) = w(z).$$

Dann gibt es ein Radonsches Maß λ auf der positiven Halbachse $[0, \infty)$ derart, daß

$$w(z) = \int_0^{\infty} \exp[-x(1 - z)]\, \lambda(dx),$$

d.h. w gehört zu einer Mischung Poissonscher Verteilungen. Umgekehrt haben letztere immer die genannte Eigenschaft.

Die Funktion $w^q(1 - q + qz)$ kann man folgendermaßen deuten: Wenn $w^q(z)$ erzeugende Funktion der Verteilung einer zufälligen Anzahl ζ_q von Teilchen ist, dann ist $w^q(1 - q + qz)$ erzeugende Funktion der Verteilung einer zufälligen Anzahl ζ von Teilchen, die man aus den ζ_q Teilchen auswählt, indem bei jedem Teilchen unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit q ausgewürfelt wird, ob es genommen wird.

b) Eine Satz 5.1 entsprechende Aussage läßt sich allgemein für Punktprozesse auf lokalkompakten Hausdorffschen Räumen H mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom gewinnen. In welcher Weise dabei die in Abschnitt 5 benutzte Beweismethode zu verallgemeinern ist, kann aus der Arbeit [9] entnommen werden.

In dem Fall, daß H nur aus einem Element besteht, geht der in Rede stehende Satz in die Aussage unter a) über.

Anhang

Beim Beweis von Hilfssatz 5.3 benutzten wir den folgenden

Satz. *Es sei $\{v_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Verteilungsgesetzen auf $(R^+)^n$. Die zugehörigen Laplace-Transformierten $f_k(s_1, \ldots, s_n)$ mögen für $k \to \infty$ gegen eine Funktion $g(s_1, \ldots, s_n)$ streben, die bei $s_1 = \cdots = s_n = 0$ stetig ist. Dann ist auch $g(s_1, \ldots, s_n)$ Laplace-Transformierte eines Verteilungsgesetzes.*

Zum Beweis benötigen wir den unmittelbar einsichtigen

Hilfssatz. *Q_a sei das Gebiet aus $(R^+)^n$, das aus den Punkten $(x_1, \ldots, x_n)$ mit*

$$0 \leqq x_1 \leqq a, \quad 0 \leqq x_2 \leqq a, \ldots, \quad 0 \leqq x_n \leqq a$$

besteht und v ein Verteilungsgesetz auf $(R^+)^n$ mit der Laplace-Transformierten $f(s_1, \ldots, s_n)$. Dann folgt aus $v(Q_a) \leqq K$ für alle $s > 0$:

$$f(s, s, \ldots, s) \leqq K + e^{-sa}.$$

Es werde K mit $0 < K < 1$ beliebig vorgegeben. Da g im Koordinatenursprung stetig und $g(0, 0, \ldots, 0) = 1$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, mit

$$g(\delta, \delta, \ldots, \delta) > \frac{1 + K}{2}.$$

Dann existiert ein k_0, so daß für alle $k > k_0$

$$f_k(\delta, \delta, \ldots, \delta) > \frac{1+K}{2}$$

und wegen der Monotonie der f_k

$$f_k(s, s, \ldots, s) > \frac{1+K}{2} \qquad (0 \leqq s < \delta, k > k_0).$$

Da die $f_i(s, s, \ldots, s)$ $(i = 1, \ldots, k_0)$ für $s \to 0$ gegen 1 streben, läßt sich ein $s_0 < \delta$ angeben derart, daß

$$f_k(s_0, s_0, \ldots, s_0) > \frac{1+K}{2} \quad (s_0 > 0)$$

für *alle* $k = 1, 2, \ldots$. Wir wählen nun a so groß, daß $e^{-s_0 a} < \frac{1-K}{2}$ wird. Dann erhalten wir

$$f_k(s_0, s_0, \ldots, s_0) > \frac{1+K}{2} = K + \frac{1-K}{2} > K + e^{-s_0 a}.$$

Mit dem obigen Hilfssatz folgt daraus

$$\nu_k(Q_a) > K \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die Folge der ν_k ist somit relativ kompakt (im Sinne der schwachen Konvergenz von Maßen). Daraus folgt die Behauptung.

Literatur

1. Bartlett, M. S.: The spectral analysis of point processes. J. roy. statist. Soc., Ser. B, **25**, 264—296 (1963).
2. Cox, D. R.: Some statistical models connected with series of events. J. roy. statist. Soc., Ser. B, **17**, 129—164 (1955).
3. Halmos, P. R.: Measure theory. New York: Van Nostrand 1951.
4. Kerstan, J., u. K. Matthes: Stationäre zufällige Punktfolgen II. J.-ber. Deutsch. Math. Verein. **66**, 106—118 (1964).
5. Kingman, J. F. C.: On doubly stochastic Poisson processes. Proc. Cambridge philos. Soc. **60**, 923—930 (1964).
6. Loève, M.: Probability theory. New York: Van Nostrand 1955.
7. Marczewski, E.: On compact measures. Fundamenta Math. **40**, 113—124 (1953).
8. Matthes, K.: Stationäre zufällige Punktfolgen, I. J.-ber. Deutsch. Math. Verein. **66**, 66—79 (1963).
9. Mecke, J.: Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **9**, 36—58 (1967).
10. Nawrotzki, K.: Ein Grenzwertsatz für homogene zufällige Punktfolgen. Math. Nachr. **24**, 201—217 (1962).

Dr. J. Mecke
Sektion Mathematik
Friedrich-Schiller-Universität
× 69 Jena
Abbeanum, Helmholtzweg 1