Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
48, 327–338 (1979)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete
© by Springer-Verlag 1979

Berührwahrscheinlichkeiten für konvexe Körper

Wolfgang Weil

Institut für Mathematische Stochastik der Universität Freiburg,
Hermann-Herder-Straße 10, D-7800 Freiburg i.Br., Federal Republic of Germany

1. Einleitung

In der klassischen Integralgeometrie ist man in der Lage, Wahrscheinlichkeiten der folgenden Art zu berechnen. Gegeben seien im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n drei konvexe Körper K, L, M (konvexe, kompakte Teilmengen des E^n) mit $K \subset L$. Wird nun der Körper M zufällig bewegt, so daß er L schneidet, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß er auch K schneidet? Die Frage läßt sich beantworten mit der kinematischen Hauptformel, die das (geeignet normierte) Haarsche Maß τ auf der Bewegungsgruppe G_n von der Menge

$$\{g \in G_n \mid K \cap g\,L \neq \emptyset\}$$

durch geometrische Größen, die Quermaßintegrale V_j von K und L ausdrückt:

$$\tau(\{g \in G_n \mid K \cap g\,L \neq \emptyset\}) = \sum_{j=0}^{n} c_{nj} \cdot V_j(K) \cdot V_{n-j}(L). \tag{1}$$

Die oben beschriebene (bedingte) Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann als Quotient solcher Summen (diese und andere Formeln, Anwendungen und Verallgemeinerungen sowie ein umfangreiches Literaturverzeichnis finden sich in dem Buch von Santaló [7]).

In letzter Zeit haben sich verschiedene Autoren mit einem verwandten Problem beschäftigt, bei dem es statt um Schnittwahrscheinlichkeiten um Berührwahrscheinlichkeiten geht. Wir betrachten zwei konvexe Körper K und L und färben jeweils eine Menge im Rand der Körper. Sodann wird einer der Körper (oder beide) zufällig bewegt, aber so, daß sich beide Körper berühren. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß die Berührung in den gefärbten Randmengen stattfindet?

In dieser Form wurde das Problem zuerst von Firey gestellt. McMullen [5] hat für konvexe Polytope mit gefärbten Seitenflächen die Berührwahrscheinlichkeit untersucht und in speziellen Fällen auch berechnet. Er erhält z.B. bei zwei Einheitswürfeln im E^3 für die Berührung Kante gegen Kante die Wahrscheinlichkeit 0,54 und für die Berührung Ecke gegen Seite die Wahrscheinlichkeit 0,46.

0044-3719/79/0048/0327/$02.40

Gleichzeitig hat Firey [2] für zwei beliebige konvexe Körper K, L Berührwahrscheinlichkeiten angegeben, indem er die Oberflächenmaße, die als lokale Gegenstücke der Quermaßintegrale angesehen werden können, benutzte. Da die Oberflächenmaße auf der Einheitssphäre Ω definiert sind, handelt es sich hierbei i.allg. aber nicht um Berührwahrscheinlichkeiten in vorgeschriebenen Randmengen, sondern in vorgeschriebenen Richtungen (genauer: Richtungen der trennenden Hyperebenen). Nur in speziellen Fällen (etwa bei Polytopen oder bei glatten Körpern) ergeben sich so Berührwahrscheinlichkeiten für Körper mit gefärbten Randmengen und dann auch nur für solche Randmengen, die inverse sphärische Bilder von Borelmengen in Ω sind. Schneider [10] hat diesen Mangel beseitigt, indem er statt der Oberflächenmaße die Krümmungsmaße verwendete, die auf dem Rand ∂K von K bzw. ∂L von L definiert sind. Dadurch konnte er beliebige Borelsche Randmengen von K und L zulassen und erhielt für das Maß aller $g \in G_n$, so daß sich K und gL in gefärbten Randpunkten berühren, eine (1) entsprechende Formel, in der die Quermaßintegrale durch die Krümmungsmaße ersetzt sind.

Alle genannten Ergebnisse sind in einer Hinsicht unvollständig. Während im klassischen Fall der Schnittwahrscheinlichkeiten die Interpretation des Wortes „zufällig" kein Problem ist, man erhält ja mit dem Haarschen Maß τ ein natürliches Wahrscheinlichkeitsmaß für die beschriebene Fragestellung, ist das bei den Berührwahrscheinlichkeiten anders. Die Frage, ob es auf der Menge $G_n(K, L)$ aller Bewegungen $g \in G_n$, so daß sich K und gL berühren, ein natürliches Berührmaß gibt, das nach Normierung als Wahrscheinlichkeitsmaß zugrunde gelegt werden kann, wird durch die Ergebnisse von McMullen, Firey und Schneider nicht beantwortet. McMullen benutzt zwar ein Maß für seine Untersuchungen, aber nur für Polytope P, Q und ohne daß das Maß auf $G_n(P, Q)$ angegeben wird. Firey und Schneider gehen so vor, daß sie statt einander berührende Körper K und L solche betrachten, die einen Abstand kleiner als ε haben, $\varepsilon > 0$, und dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vollziehen. So erhalten sie für gewisse Teilmengen A von $G_n(K, L)$ mit dem durch ε dividierten Maß τ einen Grenzwert, der sich durch die Oberflächenmaße bzw. Krümmungsmaße ausdrücken läßt und als das natürliche Maß bzw. nach Normierung als die natürliche Wahrscheinlichkeit der Menge A angesehen wird. Dabei wird aber nicht gezeigt, daß diese Werte ein (Wahrscheinlichkeits-)Maß auf $G_n(K, L)$ erzeugen, bzw. von einem solchen Maß herrühren, auch die Frage der Meßbarkeit der Mengen A bleibt offen.

Es soll deshalb im folgenden ein endliches Borelmaß $\nu(K, L; \cdot)$ auf $G_n(K, L)$ angegeben werden, das als natürliches Berührmaß von K und L angesehen werden kann (bzw. nach Normierung als natürliche Berührwahrscheinlichkeit). Es wird gezeigt, daß die oben erwähnten Mengen A in der bzgl. $\nu(K, L; \cdot)$ vervollständigten σ-Algebra der Borelmengen auf $G_n(K, L)$ liegen und daß $\nu(K, L; A)$ mit dem von Firey bzw. Schneider erhaltenen Wert übereinstimmt. Weiter ergibt sich, daß für Polytope P, Q das Maß $\nu(P, Q; \cdot)$ gerade das von McMullen benutzte Maß ist. Damit ist einerseits der wahrscheinlichkeitstheoretische Rahmen für Berührprobleme gegeben, andererseits ist es möglich, Berührwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Ergebnisse in [2] und [10] konkret zu berechnen (wie etwa in [5] geschehen).

Das Maß $\nu(K, L; \cdot)$, das wir angeben, hängt, wenn wir es als Maß auf G_n ansehen, stetig (in der schwachen Topologie) von K und L ab, wenn auf der

Menge der konvexen Körper die Hausdorff-Metrik betrachtet wird. Die Verbindung mit dem Maß τ ist gegeben, indem

$$\tau(A)=\int_0^\infty \nu(K+rB, L; A)\,dr \tag{2}$$

für alle Borelmengen $A\subset G_n$ mit $K\cap gL=\emptyset$ für alle $g\in A$ gilt. Dabei ist $K+rB$ der äußere Parallelkörper von K („+" Vektoraddition, B Einheitskugel). Betrachten wir die Funktion

$$f\colon\ g\mapsto d(K, gL)$$

(d gewöhnlicher Abstand der Mengen in E^n) und bezeichnen wir mit $\tau(K, L; \cdot)$ das auf die Menge

$$G_n^*(K, L)=\{g\in G_n \mid K\cap gL=\emptyset\}$$

eingeschränkte Maß τ, so ist die Familie $\nu(K+rB, L; \cdot)$, $r\in(0, \infty)$, (bis auf die Normierung) gerade das (in r schwach stetige und reguläre) bedingte Maß $\tau(K, L; \cdot\,|\,f)$ (s. z.B. [6]). Diese Eigenschaft läßt die Wahl des Berührmaßes als natürlich erscheinen.

Zur Konstruktion von $\nu(K, L; \cdot)$ gehen wir vor wie im Fall der Berührung eines konvexen Körpers durch q-dimensionale Ebenen, den wir in [11] behandelt haben. Wir beweisen dazu eine lokale Steinerformel in G_n (3. Abschnitt), die uns $\nu(K, L; \cdot)$ sowie eine Integraldarstellung dieses Maßes durch Krümmungsmaße liefert. Dann zeigen wir im 4. Abschnitt die Zerlegungseigenschaft (2) und im 5. Abschnitt die Verbindung mit den Ergebnissen von Firey und Schneider. Hieraus ergibt sich wegen (2) im 6. Abschnitt noch eine Integralformel für Funktionen auf G_n, die Formeln von Hadwiger [3, 4] und Schneider [8] verallgemeinert und eine Weiterentwicklung der klassischen kinematischen Hauptformel (1) darstellt.

2. Bezeichnungen

E^n sei der n-dimensionale euklidische Raum mit der Einheitssphäre Ω und der Einheitskugel B. λ sei das Lebesguemaß in E^n. Für $\lambda(B)$ schreiben wir κ_n. Für $M\subset E^n$ sei ∂M der Rand von M. $d(M, N)$ sei der gewöhnliche Abstand der Mengen $M, N\subset E^n$. Für konvexe Körper K_i, K bezeichne $K_i\to K$ die Konvergenz in der Hausdorff-Metrik.

Oberflächenmaße und Krümmungsmaße konvexer Körper können nach einem Verfahren von Schneider [9] einheitlich folgendermaßen eingeführt werden. Für einen konvexen Körper K in E^n und eine Borelmenge $\omega\subset\Omega$ sei $B_\varepsilon(K; \omega)$, $\varepsilon>0$, die Menge aller $x\in E^n\setminus K$, die Abstand $d(x, K)$ kleiner als ε haben und für die die Richtung (von K weg), in der $d(x, K)$ angenommen wird, in ω liegt. Für eine Borelmenge $\beta\subset\partial M$ sei $C_\varepsilon(K; \beta)$ die Menge aller $x\in E^n\setminus K$, die Abstand kleiner als ε haben und für die $d(x, K)=\min_{y\in\beta} d(x, y)$ gilt. Dann gelten die lokalen

Steinerformeln

$$\lambda(B_\varepsilon(K;\omega)) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{n-j} \kappa_{n-j} \mu_j(K;\omega), \tag{3}$$

$$\lambda(C_\varepsilon(K;\beta)) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{n-j} \kappa_{n-j} \psi_j(K;\beta), \tag{4}$$

durch die die Oberflächenmaße $\mu_0(K;\cdot), \ldots, \mu_{n-1}(K;\cdot)$ und die Krümmungsmaße $\psi_0(K;\cdot), \ldots, \psi_{n-1}(K;\cdot)$ definiert sind.

G_n und $SO(n)$ seien die Bewegungs- und die Drehgruppe des E^n mit der üblichen Topologie und dem Haarschen Maß τ bzw. ρ. Es sei $\rho(SO(n))=1$. Für τ benutzen wir die folgende Darstellung, aus der sich auch eine geeignete Normierung ergibt. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$\Phi\colon (\vartheta, x) \mapsto g_{\vartheta, x}$$

von $SO(n)\times E^n$ nach G_n, wobei $g_{\vartheta, x}$ durch $g_{\vartheta, x}\, y = \vartheta y + x$, $y \in E^n$, erklärt ist. Dann sei τ das Bildmaß von $\rho \otimes \lambda$ unter Φ. Für jede Borelmenge $A \subset G_n$ gilt demnach

$$\tau(A) = \int_{SO(n)} \int_{T(\vartheta)} \lambda(dx)\, \rho(d\vartheta), \tag{5}$$

wo $T(\vartheta) = \{x \in E^n \mid g_{\vartheta, x} \in A\}$ ist.

Schließlich sei $G_n^*(K, L)$ die Menge der $g \in G_n$, für die $K \cap gL = \emptyset$ gilt, und $G_n(K, L)$ sei die Menge der $g \in G_n$, so daß sich K und gL berühren (d.h. $K \cap gL \neq \emptyset$ und K und gL sind durch eine Hyperebene trennbar). $\tau(K, L;\cdot)$ sei das auf $G_n^*(K, L)$ eingeschränkte Maß τ.

3. Eine lokale Steinerformel in G_n

Für zwei konvexe Körper K, L mit $d(K, L) > 0$ bezeichne $u(K, L)$ den Vektor der Länge $d(K, L)$, der $K \cap (L + u(K, L)) \neq \emptyset$ erfüllt. Für $\varepsilon > 0$ und eine Borelmenge $\beta \subset G_n$ sei

$$A_\varepsilon(K, L; \beta) = \{g = g_{\vartheta, x} \in G_n \mid 0 < d(K, gL) < \varepsilon,\ g_{\vartheta, x+u(K, gL)} \in \beta\}.$$

Die Aussagen des folgenden Satzes werden völlig analog zu Lemma 3.1–3.3 in [11] bewiesen.

Satz 1. (a) *$A_\varepsilon(K, L; \beta)$ ist eine Borelmenge.*

(b) *$U_\varepsilon(K, L;\cdot) = \tau(A_\varepsilon(K, L;\cdot))$ ist ein endliches Borelmaß auf G_n, das auf $G_n(K, L)$ konzentriert ist.*

(c) *Aus $K_i \to K$, $L_i \to L$ folgt $U_\varepsilon(K_i, L_i;\cdot) \to U_\varepsilon(K, L;\cdot)$ schwach.*

Nun formen wir $U_\varepsilon(K, L; \beta)$ mit Hilfe von (5) um. Es ist

$$U_\varepsilon(K, L; \beta) = \int_{SO(n)} \int_{T(\vartheta)} \lambda(dx)\, \rho(d\vartheta), \tag{6}$$

wo

$$T(\vartheta)=\{x\in E^n \mid g_{\vartheta,x}\in A_\varepsilon(K,L,\beta)\}$$
$$=\{x\in E^n \mid 0<d(K,\vartheta L+x)<\varepsilon,\ g_{\vartheta,x+u(K,\vartheta L+x)}\in\beta\}$$

gilt. Wir zeigen, daß $T(\vartheta)$ eine Menge der Form $C_\varepsilon(K+(-\vartheta L);A_\beta(\vartheta))$ mit $A_\beta(\vartheta)\subset E^n$ ist (dabei ist $-\vartheta L=\{-x \mid x\in\vartheta L\}$). Dazu setzen wir

$$A_\beta(\vartheta)=\{x\in E^n \mid g_{\vartheta,x}\in\beta\cap G_n(K,L)\}.$$

Dann ist $A_\beta(\vartheta)$ eine Borelmenge und es gilt

$$A_\beta(\vartheta)=\{x\in E^n \mid g_{\vartheta,x}\in\beta,\ x\in\partial(K+(-\vartheta L))\},$$

also

$$\begin{aligned}
&C_\varepsilon(K+(-\vartheta L);A_\beta(\vartheta))\\
&\quad=\{x\in E^n \mid 0<d(x,K+(-\vartheta L))<\varepsilon,\ d(x,K+(-\vartheta L))=\min_{y\in A_\beta(\vartheta)} d(x,y)\}\\
&\quad=\{x\in E^n \mid 0<d(K,\vartheta L+x)<\varepsilon,\ d(K,\vartheta L+x)\\
&\qquad=\min\{d(x,y) \mid g_{\vartheta,y}\in\beta\cap G_n(K,L)\}\}\\
&\quad=\{x\in E^n \mid 0<d(K,g_{\vartheta,x}L)<\varepsilon,\ g_{\vartheta,x+u(K,\vartheta L+x)}\in\beta\}\\
&\quad=T(\vartheta).
\end{aligned}$$

Mit (4) folgt daher aus (6)

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon(K,L;\beta)&=\int_{SO(n)}\lambda(C_\varepsilon(K+(-\vartheta L);A_\beta(\vartheta))\,\rho(d\vartheta)\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon^{n-j}\kappa_{n-j}\int_{SO(n)}\psi_j(K+(-\vartheta L);A_\beta(\vartheta))\,\rho(d\vartheta).
\end{aligned}$$

Wir haben somit die folgende lokale Steinerformel in G_n bewiesen.

Satz 2. *Für alle konvexen Körper K, L, jedes $\varepsilon>0$ und jede Borelmenge β in G_n gilt*

$$U_\varepsilon(K,L;\beta)=\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon^{n-j}\kappa_{n-j}\int_{SO(n)}\psi_j(K+(-\vartheta L);A_\beta(\vartheta))\,\rho(d\vartheta)$$

mit

$$A_\beta(\vartheta)=\{x\in E^n \mid g_{\vartheta,x}\in\beta\cap G_n(K,L)\}.$$

Wir definieren nun das gesuchte Maß $\nu(K,L;\cdot)$ durch den Koeffizienten von ε in der obigen Summe, d.h. wir setzen

$$\nu(K,L;\beta)=2\int_{SO(n)}\psi_{n-1}(K+(-\vartheta L);A_\beta(\vartheta))\,\rho(d\vartheta). \tag{7}$$

Da man wegen Satz 2 das Maß $\nu(K,L;\cdot)$ durch $U_1(K,L;\cdot),\ldots,U_n(K,L;\cdot)$ ausdrücken kann (vgl. das entsprechende Vorgehen in [11]), folgt aus Satz 1 sofort der folgende Satz.

Satz 3. (a) *$\nu(K, L; \cdot)$ ist ein endliches Borelmaß auf G_n, das auf $G_n(K, L)$ konzentriert ist.*

(b) *Aus $K_i \to K$, $L_i \to L$ folgt $\nu(K_i, L_i; \cdot) \to \nu(K, L; \cdot)$ schwach.*

Aus der Integraldarstellung (7) sieht man, daß $\nu(P, Q; \cdot)$ für Polytope P, Q (bis auf einen Faktor) das Maß ist, das McMullen [5] seinen Berechnungen zugrunde legt.

4. Die Zerlegungseigenschaft

Die Eigenschaft (2) läßt sich jetzt leicht aus der Integraldarstellung (7) herleiten. Danach ist ja

$$\nu(K+rB, L; \beta) = 2 \int_{SO(n)} \psi_{n-1}(K+rB+(-\vartheta L); A_\beta^{(r)}(\vartheta))\, \rho(d\vartheta)$$

mit

$$A_\beta^{(r)}(\vartheta) = \{x \in E^n \mid g_{\vartheta, x} \in \beta \cap G_n(K+rB, L)\}.$$

Für $T(\vartheta) = \{x \in E^n \mid g_{\vartheta, x} \in \beta\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T(\vartheta) \cap \partial(K+(-\vartheta L)+rB) &= \{x \in E^n \mid g_{\vartheta, x} \in \beta,\, d(K, \vartheta L + x) = r\} \\ &= \{x \in E^n \mid g_{\vartheta, x} \in \beta,\, g_{\vartheta, x} \in G_n(K+rB, L)\} \\ &= A_\beta^{(r)}(\vartheta). \end{aligned}$$

Nach [11], Satz 4.3 (für $q=0$) gilt deshalb

$$2 \int_0^\infty \psi_{n-1}(K+(-\vartheta L)+rB; A_\beta^{(r)}(\vartheta))\, dr = \lambda(T(\vartheta)).$$

Also folgt mit dem Satz von Fubini und (5) für alle Borelmengen $\beta \subset G_n^*(K, L)$

$$\int_0^\infty \nu(K+rB, L; \beta)\, dr = \int_{SO(n)} \lambda(T(\vartheta))\, \rho(d\vartheta) = \tau(\beta).$$

5. Der Zusammenhang mit den Ergebnissen von Firey und Schneider

Wir wollen zunächst das Vorgehen von Firey [2] und Schneider [10] genauer beschreiben. Seien $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega$ Borelmengen und $B_{K,L}(\omega_1, \omega_2)$ die Menge aller Bewegungen $g = g_{\vartheta, x} \in G_n(K, L)$, für die es eine Hyperebene H gibt, die K und gL trennt und deren äußere Normale (bzgl. K) in $\omega_1 \cap (-\vartheta\omega_2)$ liegt. Für $\varepsilon > 0$ sei ferner

$$B_\varepsilon(\omega_1, \omega_2) = \bigcup_{0<r<\varepsilon} B_{K+rB, L}(\omega_1, \omega_2)$$

und

$$B_0(\omega_1, \omega_2) = B_{K,L}(\omega_1, \omega_2).$$

In [2] wird gezeigt, daß $B_\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ eine Borelmenge ist, daß der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \tau(B_\varepsilon(\omega_1, \omega_2))$ existiert und mit

$$c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\, \kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \mu_k(K; \omega_1)\, \mu_{n-1-k}(L; \omega_2) \tag{8}$$

übereinstimmt (in [2] wurde eine andere Normierung der Oberflächenmaße gewählt). Der Wert (8) wird als das kinematische Maß der Menge $B_0(\omega_1, \omega_2)$ bezeichnet. Natürlich wird durch (8) ein Maß auf $\Omega \times \Omega$ definiert, aber ob man so auch ein Maß auf $G_n(K, L)$ erhält, bleibt offen. Hierbei entsteht schon das Problem, ob $B_0(\omega_1, \omega_2)$ eine Borelmenge ist, denn $B_0(\omega_1, \omega_2)$ ist ja nur intuitiv der „Grenzwert" der Borelmengen $B_\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$.

Bezeichnen wir mit $\sigma_K(\gamma)$ das sphärische Bild einer Menge $\gamma \subset \partial K$ und mit $\sigma_K^{-1}(\omega)$ das sphärische Urbild in ∂K einer Menge $\omega \subset \Omega$, so können wir für Mengen $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega$, die $\sigma_K(\sigma_K^{-1}(\omega_1)) = \omega_1$ und $\sigma_L(\sigma_L^{-1}(\omega_2)) = \omega_2$ erfüllen, die Menge $B_0(\omega_1, \omega_2)$ folgendermaßen umschreiben:

$$B_0(\omega_1, \omega_2) = \{g \in G_n(K, L) \mid K \cap g\, L \cap \sigma_K^{-1}(\omega_1) \cap g\, \sigma_L^{-1}(\omega_2) \neq \emptyset\}.$$

(8) kann in diesem Fall also als Maß aller Bewegungen g angesehen werden, für die sich K und $g\,L$ in den ausgezeichneten Mengen $\sigma_K^{-1}(\omega_1)$ und $g\,\sigma_L^{-1}(\omega_2)$ berühren. Die Klasse der Randmengen von K und L, die man so auszeichnen darf, ist aber i.allg. nicht groß genug. Deshalb war es von Interesse, ein ähnliches Resultat für beliebige Borelmengen $\gamma_1 \subset \partial K$, $\gamma_2 \subset \partial L$ zu erhalten. Dies ist durch Verwendung der Krümmungsmaße in [10] gelungen. Sei dazu

$$C_0(\gamma_1, \gamma_2) = \{g \in G_n(K, L) \mid K \cap g\, L \cap \gamma_1 \cap g\, \gamma_2 \neq \emptyset\}$$

und für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2) = \{g \in G_n \mid 0 < d(K, g\, L) < \varepsilon,\\ K \cap g\, L + u(K, g\, L) \cap \gamma_1 \cap g\, \gamma_2 + u(K, g\, L) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Dann wird in [10] gezeigt, daß $C_\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2)$ in der bzgl. τ vervollständigten Borel-σ-Algebra liegt, daß (τ werde jetzt als vollständig vorausgesetzt) $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \tau(C_\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2))$ existiert und mit

$$c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\, \kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \psi_k(K; \gamma_1)\, \psi_{n-1-k}(L; \gamma_2) \tag{9}$$

übereinstimmt (auch in [10] wurde eine andere Normierung gewählt). Die Konstante c_n und die Koeffizienten in (9) stimmen mit den entsprechenden Größen in (8) wegen $\psi_j(K; \partial K) = \mu_j(K; \Omega)$, $j = 0, \ldots, n-1$, überein.

Wir setzen nun auch $v(K, L; \cdot)$ als vollständig voraus und nennen die Mengen in der Vervollständigung meßbar. Dann gilt der folgende Satz:

Satz 4. *Seien K, L konvexe Körper und $\omega_1, \omega_2 \subset \Omega$, $\gamma_1 \subset \partial K$, $\gamma_2 \subset \partial L$ Borelmengen. Dann sind $B_0(\omega_1, \omega_2)$ und $C_0(\gamma_1, \gamma_2)$ $\nu(K, L; \cdot)$-meßbar und es gilt*

$$\nu(K, L; B_0(\omega_1, \omega_2)) = c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\,\kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \mu_k(K; \omega_1)\, \mu_{n-1-k}(L; \omega_2),$$

$$\nu(K, L; C_0(\gamma_1, \gamma_2)) = c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\,\kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \psi_k(K; \gamma_1)\, \psi_{n-1-k}(L; \gamma_2)$$

mit

$$c_n = \frac{n+1}{\kappa_n}.$$

Beweis. Um die Meßbarkeit von $B_0(\omega_1, \omega_2)$ und $C_0(\gamma_1, \gamma_2)$ zu erhalten, betrachten wir zunächst die Menge B_1 aller $g \in G_n(K, L)$, so daß K und gL durch mehr als eine Hyperebene trennbar sind, und die Menge C_1 aller $g \in G_n(K, L)$, so daß sich K und gL in mehr als einem Punkt berühren. Analog zu Lemma 5.1 und 5.4 in [11] zeigt man, daß B_1 und C_1 Borelmengen sind. Es gilt nach (7)

$$\nu(K, L; B_1) = 2 \int_{SO(n)} \psi_{n-1}(K + (-\vartheta L); B_1(\vartheta))\, \rho(d\vartheta),$$

wo $B_1(\vartheta)$ die Menge aller $x \in \partial(K + (-\vartheta L))$ ist, in denen mehr als eine äußere Normale existiert. Nach [11], Lemma 5.5 für $q = 0$, gilt $\psi_{n-1}(K + (-\vartheta L); B_1(\vartheta)) = 0$ für alle $\vartheta \in SO(n)$, also ist $\nu(K, L; B_1) = 0$. Ferner betrachten wir die Menge $A_\varepsilon(K, L; C_1)$, von der in [10], Lemma 1, gezeigt wird, daß sie das τ-Maß 0 hat. Nach Satz 2 gilt daher $\nu(K, L; C_1) = 0$.

Nun betrachten wir auf $G_n(K, L) \setminus B_1$ die Abbildung $V_{K,L}$: $g = g_{\vartheta, x} \mapsto (v(K, gL), -\vartheta^{-1} v(K, gL))$, wo $v(K, gL)$ die Richtung (von K weg) der Hyperebene ist, die K und gL trennt. $V_{K,L}$ ist stetig, folglich sind $V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2)$ und $V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \cup B_1$ Borelmengen. Wegen

$$V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \subset B_0(\omega_1, \omega_2) \subset V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \cup B_1 \tag{10}$$

ist daher $B_0(\omega_1, \omega_2)$ $\nu(K, L; \cdot)$-meßbar.

Analog betrachten wir auf $G_n(K, L) \setminus C_1$ die Abbildung $R_{K,L}$: $g \mapsto (y(K, gL), g^{-1} y(K, gL))$, wo $y(K, gL)$ den Punkt bezeichnet, in dem sich K und gL berühren. Aus der Stetigkeit von $R_{K,L}$ und

$$R_{K,L}^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) \subset C_0(\gamma_1, \gamma_2) \subset R_{K,L}^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) \cup C_1 \tag{11}$$

folgt dann die Meßbarkeit von $C_0(\gamma_1, \gamma_2)$.

Nun folgt aus (10), daß

$$A_\varepsilon(K, L; V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2)) \subset B_\varepsilon(\omega_1, \omega_2) \subset A_\varepsilon(K, L; V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \cup B_1)$$

gilt. Nach Satz 2 konvergiert demnach $\frac{1}{\varepsilon} \tau(B_\varepsilon(\omega_1, \omega_2))$ für $\varepsilon \to 0$ gegen $\nu(K, L; B_0(\omega_1, \omega_2))$, während in [2] die Konvergenz gegen die Summe in (8) gezeigt

wurde. Damit ist die erste Gleichung des Satzes bewiesen. Für die andere Gleichung beachten wir, daß

$$A_\varepsilon(K, L;\, C_0(\gamma_1, \gamma_2)) = C_\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2)$$

gilt, woraus mit (11)

$$A_\varepsilon(K, L;\, R_{K,L}^{-1}(\gamma_1, \gamma_2)) \subset C_\varepsilon(\gamma_1, \gamma_2) \subset A_\varepsilon(K, L;\, R_{K,L}^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) \cup C_1)$$

folgt. Dann verwenden wir das Schneidersche Ergebnis und schließen wie oben.

Um die Konstante c_n zu berechnen, setzen wir $K = L = B$ und $\gamma_1 = \gamma_2 = \Omega$. Dann ist $C_0(\Omega, \Omega) = G_n(B, B)$ und

$$\begin{aligned} v(B, B;\, G_n(B, B)) &= 2 \int_{SO(n)} \psi_{n-1}(2B;\, \partial(2B))\, \rho(d\vartheta) \\ &= 2\psi_{n-1}(2B;\, \partial(2B)) = 2^{n-1} n\, \kappa_n. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\psi_k(B;\, \Omega) = V_k(B) = \binom{n}{k} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}}$, also

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\, \kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \psi_k(B;\, \Omega)\, \psi_{n-1-k}(B;\, \Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{n}{n+1} \kappa_n^2 = 2^{n-1} \frac{n}{n+1} \kappa_n^2.$$

Es folgt $c_n = \frac{n+1}{\kappa_n}$.

Ist einer der beiden Körper glatt, so ist die im Beweis des letzten Satzes benutzte Menge B_1 leer, d.h. $V_{K,L}$ ist auf ganz $G_n(K, L)$ definiert, stetig und es gilt (nach (10)) $B_0(\omega_1, \omega_2) = V_{K,L}^{-1}(\omega_1, \omega_2)$. Satz 4 besagt in diesem Fall gerade, daß

$$c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\, \kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} (\mu_k(K;\, \cdot) \otimes \mu_{n-1-k}(L;\, \cdot))$$

das Bildmaß von $v(K, L;\, \cdot)$ unter $V_{K,L}$ ist. Wir erhalten also das folgende Korollar.

Korollar 5. *Ist K oder L glatt, so ist $V_{K,L}$ stetig auf $G_n(K, L)$ und es gilt*

$$V_{K,L} \circ v(K, L;\, \cdot) = c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\, \kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} (\mu_k(K;\, \cdot) \otimes \mu_{n-1-k}(L;\, \cdot)).$$

Ist einer der beiden Körper strikt konvex, so ist entsprechend die Menge C_1 leer, also $R_{K,L}$ auf ganz $G_n(K, L)$ definiert und stetig. Hier ergibt sich mit (11) das folgende Korollar.

Korollar 6. *Ist K oder L strikt konvex, so ist $R_{K,L}$ stetig auf $G_n(K, L)$ und es gilt*

$$R_{K,L} \circ v(K, L;\, \cdot) = c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\, \kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} (\psi_k(K;\, \cdot) \otimes \psi_{n-1-k}(L;\, \cdot)).$$

6. Eine kinematische Integralformel

Die kinematische Hauptformel (1) läßt sich in der Form

$$\int_{G_n} f(d(K, gL))\,\tau(dg) = \sum_{j=0}^{n} c_{nj}\, V_j(K)\, V_{n-j}(L) \tag{12}$$

schreiben, wo $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion ist. Hadwiger [3] hat (12) verallgemeinert, indem er nicht zu stark wachsende, aber sonst beliebige, positive meßbare Funktionen f zugelassen hat; in der Summe auf der rechten Seite von (12) treten dabei die Momente von f auf. In [4] hat er dann eine noch allgemeinere Fassung angegeben, indem er Funktionen f betrachtete, die sowohl vom Abstand $d(K, gL)$ als auch (für $d(K, gL) > 0$) von den Richtungen

$$s(K, gL) = -\frac{u(K, gL)}{\|u(K, gL)\|}$$

und (für $g = g_{\vartheta, x}$)

$$t(K, gL) = \vartheta^{-1} \frac{u(K, gL)}{\|u(K, gL)\|}$$

abhängen, und zwar so, daß

$$f(d(K, gL), s(K, gL), t(K, gL)) = f_1(d(K, gL)) \cdot f_2(s(K, gL)) \cdot f_3(t(K, gL))$$

mit $f_1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2, f_3\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gilt. Auf der rechten Seite von (12) erscheinen dann die Momente von f_1, die mit den Oberflächenmaßen von K gebildeten Integrale von f_2 und die mit den Oberflächenmaßen von L gebildeten Integrale von f_3. Schneider [8] hat für diese erweiterte Fassung von (12) einen kürzeren Beweis gegeben.

Die Zerlegungseigenschaft (2) unseres Berührmaßes $\nu(K, L; \cdot)$ liefert zusammen mit Korollar 5 nun sofort eine Formel für beliebige Funktionen $f\colon (0,\infty) \times \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, die gewisse Existenzbedingungen erfüllen. Danach gilt nämlich

$$\begin{aligned} &\int_{G_n^*(K, L)} f(d(K, gL), s(K, gL), t(K, gL))\,\tau(dg) \\ &= \int_0^\infty \int_{G_n(K+rB, L)} f(r, s(K, gL), t(K, gL))\,\nu(K + rB, L; dg)\,dr \\ &= c_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\kappa_{n-k}\,\kappa_{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \int_0^\infty \int_\Omega \int_\Omega f(r, x, y)\,\mu_k(K + rB; dx)\,\mu_{n-1-k}(L; dy)\,dr. \end{aligned}$$

Wegen

$$\mu_k(K+rB;\cdot)=\sum_{j=0}^{k}\binom{n-j}{n-k}\frac{\kappa_{n-j}}{\kappa_{n-k}}r^{k-j}\mu_j(K;\cdot)$$

([1], S. 23, mit anderer Normierung) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}&\int_{G_n^*(K,L)} f(d(K,gL),s(K,gL),t(K,gL))\,\tau(dg)\\&=c_n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{n-j}{n-k}}{\binom{n+1}{k+1}}\kappa_{k+1}\kappa_{n-j}\int_0^\infty\int_\Omega\int_\Omega r^{k-j}f(r,x,y)\,\mu_j(K;dx)\,\mu_{n-1-k}(L;dy)\,dr\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{k}{j}}{\binom{n}{j}}(k+1)\frac{\kappa_{k+1}\kappa_{n-j}}{\kappa_n}\int_0^\infty\int_\Omega\int_\Omega r^{k-j}f(r,x,y)\,\mu_j(K;dx)\,\mu_{n-1-k}(L;dy)\,dr.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz.

Satz 7. *Sei* $f\colon(0,\infty)\times\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ *meßbar mit*

$$\int_0^\infty\int_\Omega\int_\Omega r^{k-j}f(r,x,y)\,\mu_j(K;dx)\,\mu_{n-1-k}(L;dy)\,dr<\infty$$

für alle $k\in\{0,\dots,n-1\}$, $j\in\{0,\dots,k\}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}&\int_{G_n^*(K,L)} f(d(K,gL),s(K,gL),t(K,gL))\,\tau(dg)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{k}{j}}{\binom{n}{j}}(k+1)\frac{\kappa_{k+1}\kappa_{n-j}}{\kappa_n}\int_0^\infty\int_\Omega\int_\Omega r^{k-j}f(r,x,y)\,\mu_j(K;dx)\,\mu_{n-1-k}(L;dy)\,dr.\end{aligned}\tag{13}$$

Da der Integrationsbereich in (13) $G_n^*(K,L)$ ist, während in (12) praktisch über $G_n\backslash G_n^*(K,L)$ integriert wird, kann man (13) als Gegenstück zu (12) ansehen. Faßt man (12) und (13) zusammen, so erhält man eine Verallgemeinerung der klassischen Formel (1). Für $f(r,x,y)=f_1(r)f_2(x)f_3(y)$ ergibt sich aus (13) die Formel 4.4 von Hadwiger [4] bzw. (3) von Schneider [8], für $f(r,x,y)=f_1(r)$ erhalten wir (zusammen mit (12)) die Formel (2) von Hadwiger [3].

Da in den zitierten Arbeiten meist eine andere Normierung der Oberflächenmaße zugrunde gelegt wird, soll zum Schluß (13) entsprechend umformuliert werden. Wir setzen für einen konvexen Körper K und $j\in\{0,\dots,n-1\}$

$$S_j(K;\cdot)=\frac{n\,\kappa_{n-j}}{\binom{n}{j}}\mu_j(K;\cdot).$$

Dann erhält (13) die Gestalt

$$\int_{G_n^*(K,L)} f(d(K, gL), s(K, gL), t(K, gL))\, \tau(dg)$$

$$= \frac{1}{n\,\kappa_n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1}{k} \binom{k}{j} \int_0^\infty \int_\Omega \int_\Omega r^{k-j} f(r, x, y)\, S_j(K; dx)\, S_{n-1-k}(L; dy)\, dr.$$

Literatur

1. Fenchel, W., Jessen, B.: Mengenfunktionen und konvexe Körper. Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **16**, **3**, 1–31 (1938)
2. Firey, W.J.: Kinematic measures for sets of support figures. Mathematika **21**, 270–281 (1974)
3. Hadwiger, H.: Eine Erweiterung der kinematischen Hauptformel der Integralgeometrie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **44**, 84–90 (1975)
4. Hadwiger, H.: Eikörperrichtungsfunktionale und kinematische Integralformeln. Studienvorlesung Universität Bern (1975)
5. McMullen, P.: A dice probability problem. Mathematika **21**, 193–198 (1974)
6. Rao, M.M.: Conditional measures and operators. J. Multivariate Anal. **5**, 330–413 (1975)
7. Santaló, L.A.: Integral geometry and geometric probability. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1976
8. Schneider, R.: Eine kinematische Integralformel für konvexe Körper. Arch. Math. **28**, 217–220 (1977)
9. Schneider, R.: Curvature measures of convex bodies. Ann. Mat. Pura Appl. **116**, 101–134 (1978)
10. Schneider, R.: Kinematic measures for sets of colliding convex bodies. Mathematika **25**, 1–12 (1978)
11. Weil, W.: Zufällige Berührung konvexer Körper durch q-dimensionale Ebenen. (erscheint)

Eingegangen am 10. November 1978