Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 13, 165–179 (1969)

Über mittlere Rückkehrzeit unter einer maßtreuen Strömung

GILBERT HELMBERG

Summary. Let T be a one-parameter semigroup of measure preserving transformations of a probability space. The theorem of Kac on mean recurrence time of the points x in a measurable subset E under a discrete semigroup is carried over to the case of a flow T with continuous time parameter $t \geqq 0$. Recurrence time is defined as the infimum of these parameter values $t>0$ for which the orbit of x has returned to E after having temporarily left the set E. The results are first formulated for a probability space without any topological structure; they are then applied to the case of a continuous flow in a compact metric space.

Ausgehend von einer invertierbaren ergodischen maßtreuen Transformation T eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(X, \mathscr{R}, \mu)$ hat Kac [4] einen Satz über die mittlere Rückkehrzeit der Punkte einer meßbaren Teilmenge E von X unter wiederholter Ausübung der Transformation T bewiesen. Dieser Satz wurde von mehreren Autoren [2, 3, 8–13] in verschiedener Weise verallgemeinert. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine analoge Aussage über mittlere Rückkehrzeit unter einer kontinuierlichen maßtreuen Strömung $\{T_t\}_{t \geqq 0}$ abzuleiten.

Es liegt nahe, auch in diesem Falle die Rückkehrzeit als Infimum jener Zeiten zu definieren, für die der gegebene Punkt von E auf seiner Bahn wieder in E zurückkehrt. Allerdings hat diese Definition zur Folge, daß die Rückkehrzeit für alle Punkte im „Inneren" von E verschwindet, während die restliche „Randmenge" von E durchaus das Maß 0 haben kann. Als mittlere Rückkehrzeit der Punkte von E ergibt sich in diesem Falle Null. Um eine sinnvolle Aussage zu erhalten, die im diskreten Falle dem Satz von Kac entspricht, müssen der Begriff „Rückkehrzeit" und der Mittelungsvorgang deshalb in geeigneter Weise modifiziert werden. (Ein entsprechender Gedankengang findet sich bereits in [4], 4, wo die von Smoluchowski vorgeschlagene Definition der mittleren Rückkehrzeit diskutiert wird.)

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit wird die rein maßtheoretische Situation behandelt. Die Resultate werden im zweiten Abschnitt auf eine stetige maßtreue Strömung und eine abgeschlossene Teilmenge E in einem kompakten metrischen Raum X angewendet. Herrn H. Föllmer danke ich für seine wertvollen Hinweise auf Verbindungen zur Theorie der stationären Markovprozesse, die ich leider nicht mehr berücksichtigen konnte.

1.

Soferne keine weiteren Voraussetzungen angeführt werden, verstehen wir künftig unter der Strömung $\{T_t\}_{t \geqq 0}$ eine ein-parametrige Halbgruppe von meßbaren maßtreuen Transformationen des Wahrscheinlichkeitsraumes $(X, \mathscr{R}, \mu)$.

(Diese Definition ist allgemeiner als Definition 3 in [1], da die Transformationen T_t nicht invertierbar zu sein brauchen; vgl. [5, 6].) Für eine (nicht notwendigerweise meßbare) Untermenge $E \subset X$ und $t \geqq 0$ definieren wir $E^c = X \setminus E$ und $T_{-t} E = \{x\colon T_t x \in E\}$.

Definition 1. Für $E \subset X$ und $t > 0$ sei die Menge E_t definiert durch

$$E_t = \bigcup_{0 \leqq r < s \leqq t} (T_{-r} E \cap T_{-s} E^c).$$

Die Menge E_t formt einen „Austritts-Streifen von der Breite t für E": einerseits besteht sie aus allen Punkten von X, deren Bahn (unter der Strömung $\{T_s\}_{s \geqq 0}$) innerhalb des Zeitintervalles $[0, t]$ aus der Menge E austritt; andrerseits verbleibt die Bahn eines Punktes, sobald sie in die Menge E_t eintritt, mindestens ein Zeitintervall von der Länge t in E_t. Für $0 < s \leqq t$ gilt offenbar $E_s \subset E_t$.

Hilfssatz 1. *Es sei $0 < s \leqq t$. Dann gilt $T_{-r} E_s \subset E_t$ für $0 \leqq r \leqq t - s$.*

Beweis. Es sei $x \in T_{-r} E_s$. Dann gilt $y = T_r x \in E_s$ und daher $T_{r'} y \in E$, $T_{s'} y \in E^c$ für gewisse r', s', die $0 \leqq r' < s' \leqq s$ erfüllen. Es folgt $T_{r+r'} x \in E$, $T_{r+s'} E \in E^c$ und $0 \leqq r + r' < r + s' \leqq r + s \leqq t$, also $x \in E_t$.

Hilfssatz 2. *Es sei $0 < s < t$ und $x \in E_t \setminus E_s$ gegeben. Dann existiert ein r derart, daß $0 < r \leqq t - s$ und $T_r x \in E_s$.*

Beweis. Es sei $T_{r'} x \in E$, $T_{s'} x \in E^c$ und $0 \leqq r' < s' \leqq t$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $0 < s' - r' \leqq s$ voraussetzen. Wegen $x \notin E_s$ muß $s' > s$ gelten. Wir setzen $r = s' - s$ und erhalten $0 < r \leqq t - s$ und $0 < r \leqq r'$. Aus $T_{r'-r} T_r x = T_{r'} x \in E$, $T_s T_r x = T_{s'} x \in E^c$ und $0 \leqq r' - r = s - (s' - r') < s$ folgern wir $T_r x \in E_s$.

Definition 2. Für $E \subset X$ sei die Rückkehrzeit r_E als Funktion auf X definiert durch

$$r_E(x) = \inf\{s > 0\colon x \in \bigcup_{0 \leqq r < s} (T_{-r} E^c \cap T_{-s} E)\}$$
$$\text{für alle } x \in \bigcup_{0 < s < \infty} \bigcup_{0 \leqq r < s} (T_{-r} E^c \cap T_{-s} E),$$
$$r_E(x) = \infty \qquad \text{für alle } x \notin \bigcup_{0 < s < \infty} \bigcup_{0 \leqq r < s} (T_{-r} E^c \cap T_{-s} E).$$

Für jeden Punkt $x \in X$, dessen Bahn über E^c in E führt, ist $r_E(x)$ das Infimum der für eine solche „Rückkehr" benötigten Zeit. Die Menge $\{x\colon r_E(x) < t\} = \bigcup_{0 \leqq r < s < t} (T_{-r} E^c \cap T_{-s} E)$ formt einen „Eintritts-Streifen von der Breite t für E".

Hilfssatz 3. *Es sei $t > 0$ und $E_t \in \mathcal{R}$. Dann gilt $r_E(x) < \infty$ für μ-fast alle $x \in E_t$.*

Beweis. Nach dem Poincaréschen Rückkehrsatz kehren μ-fast alle Punkte von E_t auf ihrer Bahn unter wiederholter Ausübung der Transformation T_t (sogar unendlich oft) in E_t zurück. Für μ-fast alle $x \in E_t$ existiert daher eine natürliche Zahl k (abhängig von x) derart, daß $T_t^k x = T_{kt} x \in E_t$. Für jedes solche $x \in E_t$ existieren dann weitere Zahlen r, s, die $0 \leqq r < t$, $0 < s \leqq t$ und $T_s x \in E^c$, $T_{kt+r} x \in E$ erfüllen. Hieraus folgt $r_E(x) \leqq k t + r < \infty$.

Definition 3. Für $E \subset X$, $t>0$ und $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{-kt} E$ sei $r_{E,t}(x)$ definiert durch

$$r_{E,t}(x) = \min\{k\colon T_{kt}\, x \in E,\ k \text{ eine natürliche Zahl}\}.$$

Nach dem Poincaréschen Rückkehrsatz ist $r_{E,t}(x)$ sicher für μ-fast alle $x \in E$ definiert, falls E meßbar ist. Wir werden derartige diskrete Rückkehrzeiten verwenden, um die kontinuierliche Rückkehrzeit $r_E(x)$ zu approximieren. Der folgende Hilfssatz besagt unter anderem, daß $r_{E_t,t}(x)$ sicher dann definiert ist, wenn die Bahn von x (unter der Strömung $\{T_s\}_{s \geq 0}$) nach dem Zeitpunkt t aus E herausführt.

Hilfssatz 4. *Es sei $t>0$, j eine nicht negative ganze Zahl und $T_{jt}\, x \notin E_t$, $T_{(j+1)t}\, x \notin E$. Dann gilt $T_s\, x \notin E$ für $j t \leqq s \leqq (j+1)\, t$.*

Beweis. Aus $T_s\, x \in E$ und $j t \leqq s < (j+1)\, t$ würde folgen $T_{s-jt}\, T_{jt}\, x = T_s\, x \in E$, $T_t\, T_{jt}\, x = T_{(j+1)t}\, x \in E^c$ und $0 \leqq s - j t < t$, also $T_{jt}\, x \in E_t$ entgegen der Voraussetzung.

Satz 1. *Es sei $t>0$, $x \in E_t$ und $t \leqq r_E(x) < \infty$. Dann ist $r_{E \cup E_t, t}(x)$ definiert und*

$$\left| \frac{r_E(x)}{t} - r_{E \cup E_t, t}(x) \right| \leqq 1.$$

Beweis. Nach Definition von $r_E(x)$ existiert eine Zahl s derart, daß $r_E(x) \leqq s < r_E(x) + t$ und $T_s\, x \in E$. Für $j t \leqq s < (j+1)\, t$ erhalten wir nach Hilfssatz 4 entweder $T_{jt}\, x \in E_t$ oder $T_{(j+1)t}\, x \in E$, also $r_{E \cup E_t, t}(x) \leqq j+1$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) $r_{E \cup E_t, t}(x) = 1$. Dann gilt $T_t\, x \in E \cup E_t$ und es existiert ein r derart, daß $0 \leqq r < t$ und $T_{t+r}\, x \in E$. Andrerseits folgt aus $x \in E_t$ die Existenz eines s derart, daß $0 < s \leqq t$ und $T_s\, x \in E^c$. Wir erhalten $r_E(x) \leqq t + r < 2t$ und daher $\frac{r_E(x)}{t} < 2$.

b) $r_{E \cup E_t, t}(x) = k > 1$. Insbesondere gilt dann $T_{jt}\, x \notin E \cup E_t$ für $1 \leqq j \leqq k-1$ und nach Hilfssatz 4 $T_s\, x \notin E$ für $t \leqq s \leqq (k-1)\, t$. Wir unterscheiden hier wieder zwei Fälle.

b 1) $T_{kt}\, x \in E$. Die Voraussetzung $r_E(x) \geqq t$ hat dann $(k-1)\, t \leqq r_E(x) \leqq k t$ zur Folge und damit

$$\left| \frac{r_E(x)}{t} - k \right| \leqq 1.$$

b 2) $T_{kt}\, x \in E_t \setminus E$. Nach Hilfssatz 4 gilt dann $T_s\, x \notin E$ sogar für $t \leqq s \leqq k t$. Andrerseits existiert ein r derart, daß $0 \leqq r < t$ und $T_{kt+r}\, x \in E$. Die Voraussetzung $r_E(x) \geqq t$ hat nun $k t \leqq r_E(x) < (k+1)\, t$ zur Folge und damit wieder

$$\left| \frac{r_E(x)}{t} - k \right| \leqq 1.$$

Im Rest des Abschnittes 1 beschränken wir uns auf die Betrachtung einer Menge $E \in \mathscr{R}$, für die auch die Mengen

$$E_t = \bigcup_{0 \leqq r < s \leqq t} (T_{-r}\, E \cap T_{-s}\, E^c),$$

$$\{x\colon r_E(x) < t\} = \bigcup_{0 \leqq r < s < t} (T_{-r}\, E^c \cap T_{-s}\, E)$$

für alle $t>0$ *meßbar sind* (d.h. zu $\mathscr{R}$ gehören; genau genommen genügt es, dies für alle $t \leqq \delta$ bei festem aber willkürlich kleinem positiven δ zu verlangen). Insbesondere sind dann die Funktionen r_E und $r_{E \cup E_t, t}$ meßbar[1].

Satz 2. *Es sei* $t>0$. *Dann gilt*

$$\frac{1}{t} \int_{E_t} r_E(x)\, d\mu(x) = \int_{E_t \cap \{x:\, r_E(x) \geqq t\}} r_{E \cup E_t, t}(x)\, d\mu(x) + \theta \mu(E_t),$$

wobei $|\theta| \leqq 1$.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 und Satz 1 sind die Integranden auf den Mengen, über welche integriert wird, μ-fast überall definiert und endlich.

Die Behauptung folgt aus Satz 1 und der Zerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_{E_t} r_E(x)\, d\mu(x) &= \int_{E_t \cap \{x:\, r_E(x) < t\}} \frac{r_E(x)}{t}\, d\mu(x) + \int_{E_t \cap \{x:\, r_E(x) \geqq t\}} \frac{r_E(x)}{t}\, d\mu(x) \\
&= \theta_1\, \mu(E_t \cap \{x:\, r_E(x) < t\}) + \int_{E_t \cap \{x:\, r_E(x) \geqq t\}} r_{E \cup E_t, t}(x)\, d\mu(x) \\
&\quad + \theta_2\, \mu(E_t \cap \{x:\, r_E(x) \geqq t\}) \\
&= \int_{E_t \cap \{x + r_E(x) \geqq t\}} r_{E \cup E_t, t}(x)\, d\mu(x) + \theta\, \mu(E_t).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $0 \leqq \theta_1 \leqq 1$, $|\theta_2| \leqq 1$ und daher $|\theta| \leqq 1$.

Definition 4. Für $E \subset X$ und $t>0$ sei die Menge $E(t)$ definiert durch

$$E(t) = E_t \cap \{x:\, r_E(x) < t\}.$$

Offenbar gilt $E(s) \subset E(t)$ für $0<s<t$.

Hilfssatz 5. *Es seien* l, n *natürliche Zahlen und* $t>0$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) $T_{lt}\, x \in E_t$.

b) *Es existiert eine ganze Zahl* m *derart, daß* $0 \leqq m \leqq n-1$ *und* $T_{lt + m\frac{t}{n}}\, x \in E_{\frac{t}{n}}$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) Es sei $T_{lt+r}\, x \in E$, $T_{lt+s}\, x \in E^c$ und $0 \leqq r < s \leqq t$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$m\frac{t}{n} \leqq r < s \leqq (m+1)\frac{t}{n}$$

für eine geeignete ganze Zahl m, $0 \leqq m \leqq n-1$. Es folgt $T_{lt + m\frac{t}{n}}\, x \in E_{\frac{t}{n}}$.

b) $\Rightarrow$ a) Aus $T_{lt + m\frac{t}{n}} \in E_{\frac{t}{n}}$ und $0 \leqq m \leqq n-1$ folgt $T_{lt}\, x \in T_{-m\frac{t}{n}}\, E_{\frac{t}{n}} \subset E_t$ nach Hilfssatz 1.

1. Herr H. Föllmer hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß dies sicher dann für alle $E \in \mathscr{R}$ der Fall ist, wenn die Abbildung $(t, x) \to T_t\, x$ von $[0, +\infty[\times X$ in X meßbar ist; vgl. [7] IV, 52–53.

Hilfssatz 6. *Es seien l, n natürliche und k, m ganze Zahlen, $0 \leqq k \leqq n-1$, $0 \leqq m \leqq n-1$, $t>0$ und $r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(T_{k\frac{t}{n}}x)=nl+m$. Dann gilt $r_{E_t,t}(x)=l$ oder $r_{E_t,t}(x)=l+1$. Insbesondere gilt $r_{E_t,t}(x)=l$ für $k=0$.*

Beweis. Die Voraussetzung impliziert $T_{lt+(m+k)\frac{t}{n}}x \in E_{\frac{t}{n}}$, $0 \leqq m+k<2n$. Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle.

a) $m+k<n$. (Dies ist insbesondere für $k=0$ der Fall.) Hilfssatz 1 hat $T_{lt}x \in T_{-(m+k)\frac{t}{n}}E_{\frac{t}{n}} \subset E_t$ zur Folge und damit $r_{E_t,t}(x) \leqq l$.

b) $n \leqq m+k<2n$. Hilfssatz 1 hat nun $T_{(l+1)t}x \in T_{-(m+k-n)\frac{t}{n}}E_{\frac{t}{n}} \subset E_t$ zur Folge und damit $r_{E_t,t}(x) \leqq l+1$.

Wir setzen nun $r_{E_t,t}(x)=l'$. Aus $T_{l't}x \in E_t$ erhalten wir nach Hilfssatz 5 $T_{l't+m'\frac{t}{n}}x \in E_{\frac{t}{n}}$ für eine gewisse ganze Zahl m', $0 \leqq m' \leqq n-1$. Es folgt

$$\begin{aligned} ln+m=r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(T_{k\frac{t}{n}}x) &\leqq l'n+m'-k, \\ -n<m+k-m' &\leqq n(l'-l), \\ l &\leqq l'=r_{E_t,t}(x). \end{aligned}$$

Hilfssatz 7. *Es seien l, n natürliche und k, k', m, m' ganze Zahlen, $0 \leqq k \leqq n-1$, $0 \leqq k' \leqq n-1$, $0 \leqq m \leqq n-1$, $0 \leqq m' \leqq n-1$ und $t>0$. Für $(k,m) \neq (k',m')$ gilt*

$$T_{-k\frac{t}{n}}\left[E\left(\frac{t}{n}\right) \cap \{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=nl+m\}\right] \cap T_{-k'\frac{t}{n}}\left[E\left(\frac{t}{n}\right) \cap \{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=nl+m'\}\right]=\emptyset.$$

Beweis. Wir nehmen an, die betrachtete Durchschnittsmenge wäre nicht leer, sondern enthielte ein Element y. Wir unterscheiden ohne Einschränkung der Allgemeinheit zwei Fälle.

a) $0 \leqq k<k' \leqq n-1$. Wir erhalten einerseits $r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(T_{k\frac{t}{n}}y)=nl+m \geqq n$, andrerseits $T_{(k'-k)\frac{t}{n}}T_{k\frac{t}{n}}y=T_{k'\frac{t}{n}}y \in E\left(\frac{t}{n}\right)$ und daher $r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(T_{k\frac{t}{n}}y) \leqq k'-k<n$, also einen Widerspruch.

b) $k=k'$, $m \neq m'$. Wir erhalten $nl+m=r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(T_{k\frac{t}{n}}y)=r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(T_{k'\frac{t}{n}}y)=nl+m'$, also wieder einen Widerspruch.

Satz 3. *Es sei $t>0$ und $\lim_{n\to\infty} n\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\right)=0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E(\frac{t}{n})} r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)\,d\mu(x)=0.$$

Beweis. Allgemein gilt

$$\int_{E(s)} r_{E_s,s}(x)\,d\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\mu\left(E(s) \cap \{x\colon r_{E_s,s}(x)=k\}\right)$$

für alle $s>0$. Insbesondere erhalten wir für $s=\frac{t}{n}$

$$\int_{E(\frac{t}{n})} r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)\,d\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=k\}\right)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(n\,l+m)\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty} n\,l\sum_{m=0}^{n-1}\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right)$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} m\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right).$$

Wir betrachten jeden der beiden zuletzt erhaltenen Ausdrücke für sich.

a) Wir setzen

$$a_{l,n}=\sum_{m=0}^{n-1} n\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right),$$

$$a_n=\sum_{l=1}^{\infty} l\,a_{l,n}$$

und haben zu beweisen $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Wir bemerken zunächst

$$\bigcup_{k=0}^{n-1}\bigcup_{m=0}^{n-1} T_{-k\frac{t}{n}}\left[E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right]$$

$$\subset[E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l\}]\cup[E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l+1\}].$$

In der Tat, für $y\in T_{-k\frac{t}{n}}E\left(\frac{t}{n}\right)\subset T_{-k\frac{t}{n}}E_{\frac{t}{n}}$ erhalten wir $y\in E_t$ nach Hilfssatz 1 und $r_E(T_{k\frac{t}{n}}y)<\frac{t}{n}$. Dies hat $r_E(y)<\frac{t}{n}+k\frac{t}{n}\leqq t$ zur Folge und daher $y\in E(t)$. Wir erhalten

$$T_{-k\frac{t}{n}}E\left(\frac{t}{n}\right)\subset E(t).$$

Andrerseits liefert Hilfssatz 6 die Inklusion

$$T_{-k\frac{t}{n}}\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\subset\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l\}\cup\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l+1\}.$$

Unter Verwendung von Hilfssatz 7 und der Maßtreue von $T_{\frac{t}{n}}$ erhalten wir

$$a_{l,n}=\sum_{m=0}^{n-1} n\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mu\left(T_{-k\frac{t}{n}}\left[E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right]\right)$$

$$=\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}\bigcup_{m=0}^{n-1} T_{-k\frac{t}{n}}\left[E\left(\frac{t}{n}\right)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\right]\right)$$

$$\leqq\mu(E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l\})+\mu(E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l+1\})=b_l,$$

gleichmäßig in n. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty} l\, b_l &= \sum_{l=1}^{\infty} l\,\mu\big(E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l\}\big)+\sum_{l=1}^{\infty} l\,\mu\big(E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l+1\}\big)\\ &\leqq 2\sum_{l=1}^{\infty} l\,\mu\big(E(t)\cap\{x\colon r_{E_t,t}(x)=l\}\big)\\ &=2\int_{E(t)} r_{E_t,t}(x)\,d\mu(x)\\ &\leqq 2\int_{E_t} r_{E_t,t}(x)\,d\mu(x)\\ &=2\mu\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{-kt}\,E_t\Big)\leqq 2\end{aligned}$$

(beim Übergang zur letzten Zeile wurde der verallgemeinerte Satz von Kac verwendet [3, 12, 13]). Schließlich gilt für jedes feste l

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_{l,n} &= \lim_{n\to\infty} n\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\cap\bigcup_{m=0}^{n-1}\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\Big)\\ &\leqq \lim_{n\to\infty} n\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)=0.\end{aligned}$$

Unter Verwendung des (für Reihen formulierten) Satzes von Lebesgue über dominierte Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty} l\,a_{l,n}=\sum_{l=1}^{\infty} l\big(\lim_{n\to\infty} a_{l,n}\big)=0.$$

b) Aus

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} m\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\Big) &\leqq n\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\cap\bigcup_{l=0}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{n-1}\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\Big)\\ &\leqq n\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)\end{aligned}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} m\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\cap\{x\colon r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)=n\,l+m\}\Big)=0.$$

Unser nächstes Ziel ist eine Verschärfung der Aussage von Satz 3, bei der t/n durch eine kontinuierlich nach 0 strebende Variable s ersetzt wird.

Hilfssatz 8. *Für* $0<s<t$ *und* $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{-kt}\,E_t$ *gilt* $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{-ks}\,E_s$ *und*

$$r_{E_s,s}(x)\leqq\frac{t}{s}\,r_{E_t,t}(x)+\frac{t}{s}.$$

Beweis. Es sei $r_{E_t,t}(x)=k$ und daher $T_{kt}\,x\in E_t$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $T_{kt}\,x\in E_s$. Es sei $T_{kt+r'}\,x\in E$, $T_{kt+s'}\,x\in E^c$ und $0\leqq r'<s'\leqq s$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $m\,s\leqq k\,t+r'<k\,t+s'\leqq(m+1)\,s$ (m ganz) annehmen. Es folgt $m\geqq 1$, $T_{ms}\,x\in E_s$ und $r_{E_s,s}(x)\leqq m<k\dfrac{t}{s}+1<k\dfrac{t}{s}+\dfrac{t}{s}$.

b) $T_{kt}\,x\in E_t\setminus E_s$. Nach Hilfssatz 2 existiert ein r, für welches $0<r\leqq t-s$ und $T_{kt+r}\,x\in E_s$ zutrifft. Wie in a) schließen wir $T_{kt+r+r'}\,x\in E$, $T_{kt+r+s'}\,x\in E^c$ und, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, $m\,s\leqq k\,t+r+r'<k\,t+r+s'\leqq(m+1)\,s$. Wieder folgt $m\geqq 1$, $T_{ms}\,x\in E_s$ und $r_{E_s,s}(x)\leqq m<k\dfrac{t}{s}+\dfrac{r+s}{s}\leqq k\dfrac{t}{s}+\dfrac{t}{s}$.

Satz 4. *Es sei $t>0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\mu\left(E\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)=0$. Dann gilt*

a) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{s}\,\mu(E(s))=0$,

b) $\lim\limits_{s\to 0}\int\limits_{E(s)} r_{E_s,s}(x)\,d\mu(x)=0$,

c) $\lim\limits_{s\to 0}\int\limits_{E(s)} r_{E\cup E_s,s}(x)\,d\mu(x)=0$.

Beweis. Für jedes gegebene s sei n (als Funktion von s) derart bestimmt, daß $\dfrac{t}{n+1}\leqq s<\dfrac{t}{n}$. Dann hat $s\to 0$ zur Folge $n\to\infty$. Die Behauptungen a), b), c) lassen sich nun wie angegeben ableiten:

a) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{s}\,\mu(E(s))\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{t}\,\mu\left(E\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)=0$.

b) Aus $\dfrac{t}{n\,s}\leqq\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$ und Hilfssatz 8 folgt für μ-fast alle $x\in E\left(\dfrac{t}{n}\right)$

$$r_{E_s,s}(x)\leqq\frac{t}{n\,s}\left(r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)+1\right)\leqq\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)+1\right)$$

und daher nach Satz 3

$$\lim_{s\to 0}\int\limits_{E(s)} r_{E_s,s}(x)\,d\mu(x)\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\int\limits_{E\left(\frac{t}{n}\right)} r_{E_{t/n},\frac{t}{n}}(x)\,d\mu(x)$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\right)=0.$$

c) Für μ-fast alle $x\in E(s)$ gilt $r_{E\cup E_s,s}(x)\leqq r_{E_s,s}(x)$. Die Behauptung folgt dann aus b).

Die bereits im Beweis von Satz 3 angeführte Verallgemeinerung des Rückkehrsatzes von Kac werden wir im Beweis von Satz 5 noch einmal anwenden, und zwar in folgender Form:

$$\int\limits_{E\cup E_s} r_{E\cup E_s,s}(x)\,d\mu(x)=\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{-ks}(E\cup E_s)\right).$$

Wir identifizieren zunächst die letztgenannte Menge im Zusammenhang mit der Strömung $\{T_t\}_{t\geqq 0}$.

Hilfssatz 9. *Es sei $s>0$. Dann gilt*

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{-ks}(E\cup E_s)=\bigcup_{t\geqq 0} T_{-t}E.$$

Beweis. Offenbar gilt $\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{-ks}E\subset\bigcup_{t\geqq 0} T_{-t}E$. Es sei nun $x\in T_{-ks}E_s$ gegeben, also $T_{ks}x\in E_s$ und $T_{ks+r}x\in E$ für ein bestimmtes $r\geqq 0$. Es folgt $x\in\bigcup_{t\geqq 0} T_{-t}E$ und daher

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{-ks}(E\cup E_s)\subset\bigcup_{t\geqq 0} T_{-t}E.$$

Umgekehrt setzen wir nun $x\in T_{-t}E$ und $t>0$ voraus. Falls $T_u x\in E$ für alle $u\geqq t$, dann gilt insbesondere $T_{ks}x\in E$ sobald $ks\geqq t$ erfüllt ist, also auch $x\in T_{-ks}E$. Andernfalls existiert ein $v>t$ derart, daß $T_v x\in E^c$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $T_u x\in E$, $T_v x\in E^c$ und $ks\leqq u<v\leqq(k+1)s$ annehmen (k ganz). Es folgt $T_{ks}x\in E_s$, $k\geqq 0$ und $x\in T_{-ks}E_s$. Damit ist auch

$$\bigcup_{t\geqq 0} T_{-t}E\subset\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{-ks}(E\cup E_s)$$

bewiesen.

Satz 5. *Es sei $t>0$ und $\lim_{n\to\infty}\mu(E_{\frac{t}{n}})=\lim_{n\to\infty} n\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\right)=0$. Dann gilt*

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_{E_s} r_E(x)\,d\mu(x)=\mu\Big(\bigcup_{r\geqq 0} T_{-r}E\Big)-\mu(E).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_{E_s} r_E(x)\,d\mu(x)&=\lim_{s\to 0}\int_{E_s\cap\{x:\,r_E(x)\geqq s\}} r_{E\cup E_s,s}(x)\,d\mu(x) && \text{(nach Satz 2)}\\
&=\lim_{s\to 0}\int_{E_s} r_{E\cup E_s,s}(x)\,d\mu(x) && \text{(nach Satz 4c))}\\
&=\lim_{s\to 0}\Big[\int_{E\cup E_s} r_{E\cup E_s,s}(x)\,d\mu(x)-\int_{E\setminus E_s} r_{E\cup E_s,s}(x)\,d\mu(x)\Big]\\
&=\mu\Big(\bigcup_{r\geqq 0} T_{-r}E\Big)-\lim_{s\to 0}\int_{E\setminus E_s} 1\,d\mu(x) && \text{(nach Hilfssatz 9 und 4)}\\
&=\mu\Big(\bigcup_{r\geqq 0} T_{-r}E\Big)-\mu(E).
\end{aligned}$$

Die Menge $\bigcup_{k\geqq 0} T_{-r}E$ ist modulo μ invariant unter der Strömung $\{T_r\}_{r\geqq 0}$. Im Falle einer ergodischen Strömung und einer Menge E von positivem Maß gilt daher $\mu\big(\bigcup_{r\geqq 0} T_{-r}E\big)=1$.

Die Analogie zwischen Satz 5 und dem verallgemeinerten Satz von Kac tritt etwas deutlicher hervor, wenn man im Falle einer durch eine maßtreue Transformation T erzeugten „diskreten Strömung" $\{T^k\}_{k=1}^{\infty}=\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ sinngemäß $E_1=E\cap T^{-1}E^c$ und $r_E(x)=r_{E,1}(x)-1$ für $x\in E_1$ setzt. Die angeführte Version des Satzes von Kac läßt sich dann folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned}\int_{E_1} r_E(x)\,d\mu(x) &= \int_{E\cap T^{-1}E^c} \big(r_{E,1}(x)-1\big)\,d\mu(x)\\ &= \int_E r_{E,1}(x)\,d\mu(x)-\mu(E\cap T^{-1}E)-\mu(E\cap T^{-1}E^c)\\ &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}E\Big)-\mu(E).\end{aligned}$$

An Stelle der Limesgleichung in Satz 5 ergibt sich also Gleichheit beider Seiten für $s=1$.

2.

Im folgenden zweiten Abschnitt sei X ein kompakter metrischer Raum, $\mathscr{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen in X und $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ eine einparametrige Halbgruppe von maßtreuen Transformationen des Raumes X auf sich selbst, für die die Abbildung φ: $(t,x)\to\varphi(t,x)=T_t x$ von $R^+\times X$ auf X stetig ist ($R^+=$ Menge der nicht negativen reellen Zahlen; vgl. [1] Definition 13, Satz 5). Insbesondere ist dann jede Transformation T_t $(t\geqq 0)$ stetig und somit meßbar, und jede Bahnkurve $\{T_t x\colon t\geqq 0\}$ stetig in X. Als weitere Folge ist die Menge $T_t F$ kompakt, soferne F kompakt ist, und σ-kompakt, soferne F offen ist.

Hilfssatz 10. *Es sei F eine σ-kompakte Teilmenge von X und I eines der Intervalle $[0,t]$, $]0,t]$, $[0,t[$, $]0,t[$. Dann sind die Mengen $\bigcup_{s\in I} T_s F$ und $\bigcup_{s\in I} T_{-s}F$ σ-kompakt und daher meßbar.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $I=[0,t]$ und setzen $F=\bigcup_{k=1}^{\infty} F^{(k)}$, wobei $F^{(k)}$ für $1\leqq k<\infty$ eine kompakte Teilmenge von X sei. Dann ist $I\times F^{(k)}$ kompakt in $R^+\times X$ und die Menge

$$\bigcup_{s\in I} T_s F=\varphi(I\times F)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varphi(I\times F^{(k)})$$

ist σ-kompakt in X. Weiter ist $T_{-t}F=\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{-t}F^{(k)}$ σ-kompakt in X und nach dem eben bewiesenen daher auch die Menge $\bigcup_{s\in I} T_{-s}F=\bigcup_{s\in I} T_s(T_{-t}F)$.

Ein halboffenes oder offenes Intervall I ist die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Teilintervalle. Daher sind die betrachteten Vereinigungsmengen auch in diesem Falle σ-kompakt.

Wir betrachten im weiteren stets eine abgeschlossene Menge E. In diesem Falle lassen sich für die in Abschnitt 1 beschriebenen Mengen E_t und $\{x\colon r_E(x)<t\}$ besondere Darstellungen und Meßbarkeitsbedingungen angeben. Mit Q bezeichnen wir die Menge der rationalen Zahlen.

Definition 5. Für eine abgeschlossene Menge $E \subset X$ seien die Mengen ex E und in E definiert durch

$$\operatorname{ex} E = E \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{0<q<\frac{1}{m} \\ q \in Q}} T_{-q} E^c,$$

$$\operatorname{in} E = E \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{0<q<\frac{1}{m} \\ q \in Q}} T_q E^c.$$

Wie aus dem Beweis des nächsten Hilfssatzes hervorgeht, sind ex E und in E die Mengen aller jener Punkte von E, in denen Strömungslinien (= Bahnkurven) aus E heraus- bzw. in E eintreten. Offenbar ist ex E eine G_δ-Menge und in E eine $F_{\sigma\delta}$-Menge. Beide Mengen gehören daher der σ-Algebra $\mathscr{R}$ an. Mit ∂E bezeichnen wir den Rand von E.

Hilfssatz 11. *Es sei E abgeschlossen. Dann gilt* (ex $E \cup$ in $E) \subset \partial E$.

Beweis. a) Es sei $x \in \operatorname{ex} E$ gegeben. Dann existiert eine Folge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$ derart, daß $0 < q_n < \frac{1}{n}$ und $T_{q_n} x \in E^c$ für alle $n \geqq 1$ gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} T_{q_n} x = x$ folgt $x \in \partial E$.

b) Es sei $x \in$ in E gegeben. Dann existieren Folgen $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$ und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^c$ derart, daß $0 < q_n < \frac{1}{n}$ und $T_{q_n} x_n = x$ für alle $n \geqq 1$ gilt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Strömung $\{T_t\}_{t \geqq 0}$ schließen wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T_{q_n} x_n = x.$$

Hieraus folgt wieder $x \in \partial E$.

Satz 6. *Es sei E abgeschlossen und $t > 0$. Dann gilt* $E_t = \bigcup_{0 \leqq r < t} T_{-r}(\operatorname{ex} E)$.

Beweis. a) Es sei $x \in E_t$ gegeben und $T_{r'} x \in E$, $T_{s'} x \in E^c$, $0 \leqq r' < s' \leqq t$. Wie definieren $r = \sup\{r'' : r'' < s', T_{r''} x \in E\}$. Dann gilt $0 \leqq r < s' \leqq t$ und wegen der Stetigkeit der Bahnkurve $\{T_s x\}_{r \leqq s < \infty}$

$$T_r x \in E \cap \bigcup_{\substack{0<q<\frac{1}{m} \\ q \in Q}} T_{-q} E^c \qquad \text{für alle } m \geqq 1,$$

also $x \in T_{-r}(\operatorname{ex} E)$.

b) Es sei

$$T_r x \in E \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{0<q<\frac{1}{m} \\ q \in Q}} T_{-q} E^c \quad \text{und} \quad 0 \leqq r < t.$$

Dann existiert ein $q \in Q$ derart, daß $0 < q \leqq t - r$ und $T_r x \in T_{-q} E^c$ gilt. Wir schließen daraus $T_r x \in E$, $T_{r+q} x \in E^c$, $0 \leqq r < r + q \leqq t$ und daher $x \in E_t$.

Satz 7. *Es sei E abgeschlossen, $t > 0$ und* $T_{-s}(\operatorname{in} E) \subset \bigcup_{0 \leqq r < s} T_{-r} E^c$ *für alle $s > 0$. Dann gilt*

$$\{x : r_E(x) < t\} = \bigcup_{0<s<t} T_{-s}(\operatorname{in} E).$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der noch zu beweisenden Identität

$$\bigcup_{0\leqq r<s<t}(T_{-r}E^c\cap T_{-s}E)=\bigcup_{0<s<t}\left[T_{-s}(\text{in } E)\cap\bigcup_{0\leqq r<s}T_{-r}E^c\right].$$

Es sei $T_{r'}x\in E^c$, $T_{s'}x\in E$ und $0\leqq r'<s'<t$. Wir definieren $s=\inf\{s'':s''>r', T_{s''}x\in E\}$. Dann gilt $r'<s\leqq s'<t$ und wegen der Stetigkeit der Bahnkurve $\{T_r x\}_{0\leqq r\leqq s}$

$$T_s x\in E\cap\bigcap_{\substack{0<q<\frac{1}{m}\\ q\in Q}}T_q E^c \qquad \text{für alle } m\geqq 1.$$

Es folgt $x\in T_{-s}(\text{in } E)\cap T_{-r'}E^c\subset T_{-s}(\text{in } E)\cap\bigcup_{0\leqq r<s}T_{-r}E^c$. Die Inklusion in der anderen Richtung ist trivial.

Die Forderung $T_{-s}(\text{in } E)\subset\bigcup_{0\leqq r<s}T_{-r}E^c$ für alle $s>0$ ist bereits erfüllt, wenn die Inklusion für alle $s=s_n$ aus einer gegen Null konvergierenden Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ gilt. Sie besagt, daß die Bahnkurve eines Punktes nicht in die Menge (in E) führen kann, ohne vorher E^c durchlaufen zu haben. Dies ist automatisch für jede abgeschlossene Menge E erfüllt, falls die Transformationen T_t eineindeutig und deshalb Homöomorphismen sind.

Soferne E abgeschlossen, die angegebene Forderung erfüllt ist und beide Mengen ex E und in E σ-kompakt sind (z.B. aus abzählbar vielen stetigen Bogenstücken bestehen), sind nach Hilfssatz 10, Satz 6 und 7 auch die Mengen E_t und $\{x\colon r_E(x)<t\}$ σ-kompakt. Die Menge E_t und die Funktion r_E sind dann sicher Borel-meßbar.

Im Rest dieses Abschnittes wird untersucht, unter welchen hinreichend allgemeinen Voraussetzungen die in Satz 5 angeführten Bedingungen erfüllt sind.

Satz 8. *Es sei E abgeschlossen. Dann gilt* ex $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$. *Ist insbesondere* ex E *σ-kompakt, dann sind die beiden Aussagen $\mu(\text{ex } E)=0$ und $\lim_{t\to 0}\mu(E_t)=0$ äquivalent.*

Beweis. Die letzte Behauptung ergibt sich aus der Beziehung

$$\mu(\text{ex } E)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_{\frac{1}{n}})=\lim_{t\to 0}\mu(E_t).$$

Die Inklusion ex $E\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$ folgt aus Satz 6. Umgekehrt sei

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{0\leqq r<\frac{1}{n}}T_{-r}(\text{ex } E)$$

gegeben. Dann existiert eine Folge $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ derart, daß $0\leqq r_n<\dfrac{1}{n}$ und $T_{r_n}x\in\text{ex } E\subset E$ für alle $n\geqq 1$ gilt. Dann existiert auch eine Folge $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Q$ derart, daß $r_n<q_n<\dfrac{1}{n}$ und $T_{q_n}x\in E^c$ für alle $n\geqq 1$ gilt. Außerdem folgt aus der Stetigkeit der Strömung $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ die Beziehung $x=\lim_{n\to\infty}T_{r_n}x\in E$. Wir schließen daraus

$$x\in E\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\substack{0<q<\frac{1}{n}\\ q\in Q}}T_{-q}E^c=\text{ex } E.$$

Hilfssatz 12. *Es sei E abgeschlossen, $t>0$, $T_{-s}(\text{in } E) \subset \bigcup_{0 \leqq r<s} T_{-r} E^c$ für alle $s>0$ und* $\text{ex } E \cap \bigcup_{0<r<t} T_{-r}(\text{in } E \setminus \text{ex } E)=\emptyset$. *Ferner sei für $n \geqq 1$ die Menge F^n definiert durch*

$$F^n=\bigcup_{k=0}^{n-1} T_{-k\frac{t}{n}}\Big[\bigcup_{0 \leqq r<\frac{t}{n}} T_{-r}(\text{in } E) \cap \bigcup_{0 \leqq s<\frac{t}{n}} T_{-s}(\text{ex } E)\Big].$$

Dann gilt

$$\bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E \cap \text{ex } E)=\bigcap_{n=1}^{\infty} F^n=\liminf_{n \rightarrow \infty} F^n=\limsup_{n \rightarrow \infty} F^n .$$

Beweis. Die Inklusionen

$$\bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E \cap \text{ex } E) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} F^n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} F^n$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F^n \subset \bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E) \cap \bigcup_{0 \leqq s<t} T_{-s}(\text{ex } E)$$

sind klar. Es sei nun $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} F^n \setminus \bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E \cap \text{ex } E)$ gegeben und daher auch

$$x \in\Big[\bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E) \cap \bigcup_{0 \leqq s<t} T_{-s}(\text{ex } E)\Big] \setminus \bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E \cap \text{ex } E).$$

Dann existieren r, s derart, daß $T_r x \in(\text{in } E \setminus \text{ex } E)$, $T_s x \in \text{ex } E$ und $0 \leqq r<t, 0 \leqq s<t$, $r \neq s$ gilt. Aus der Voraussetzung $\text{ex } E \cap \bigcup_{0<u<t} T_{-u}(\text{in } E \setminus \text{ex } E)=\emptyset$ folgt noch $r<s$.

Wir zeigen nun

$$T_{r'} x \notin \text{in } E \qquad \text{für } 0 \leqq r'<t,\ r' \neq r,$$

$$T_{s'} x \notin \text{ex } E \qquad \text{für } 0 \leqq s'<t,\ s' \neq s.$$

In der Tat, aus $T_{s'} x \in \text{ex } E$, $T_{s''} x \in \text{ex } E$ und $0 \leqq s'<s''<t$ würde die Existenz eines r' folgen derart, daß $s'<r'<s''$ und $T_{r'} x \in(\text{in } E \setminus \text{ex } E)$. Dann würde die Beziehung $T_{s'} x \in \text{ex } E \cap T_{-(r'-s')}(\text{in } E \setminus \text{ex } E)$ auf einen Widerspruch führen. Ebenso würde aus $T_{r'} x \in(\text{in } E \setminus \text{ex } E)$, $T_{r''} x \in(\text{in } E \setminus \text{ex } E)$ und $0 \leqq r'<r''<t$ die Existenz eines s' folgen derart, daß $r'<s'<r''$ und $T_{s'} x \in \text{ex } E$ gilt. Hier würde die Beziehung $T_{s'} x \in \text{ex } E \cap T_{-(r''-s')}(\text{in } E \setminus \text{ex } E)$ auf einen Widerspruch führen.

Bei gegebenem $n \geqq 1$ kann also x in höchstens einer der Mengen

$$T_{-k\frac{t}{n}}\Big[\bigcup_{0 \leqq u<\frac{t}{n}} T_{-u}(\text{in } E) \cap \bigcup_{0 \leqq v<\frac{t}{n}} T_{-v}(\text{ex } E)\Big] \qquad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

enthalten sein. Dies wird aber unmöglich, sobald n so groß gewählt wird, daß $\frac{t}{n}<s-r$. Damit ist gezeigt, daß jedes Element von $\limsup_{n \rightarrow \infty} F^n$ auch in

$$\bigcup_{0 \leqq r<t} T_{-r}(\text{in } E \cap \text{ex } E)$$

enthalten sein muß.

Die Voraussetzung $\operatorname{ex} E \cap \bigcup_{0<r<t} T_{-r}(\operatorname{in} E \setminus \operatorname{ex} E) = \emptyset$ besagt, daß die aus E austretenden Strömungslinien mindestens eine Zeitspanne von der Länge t außerhalb E verbleiben, bevor sie für eine positive Zeitspanne in E zurückkehren. Für σ-kompakte Mengen $\operatorname{in} E$ und $\operatorname{ex} E$ ist die Menge $\bigcup_{0\leqq r<t} T_{-r}(\operatorname{in} E \cap \operatorname{ex} E)$ wieder Borel-meßbar (sogar σ-kompakt).

Satz 9. *Für eine abgeschlossene Menge E und eine Zahl $t>0$ seien folgende Bedingungen erfüllt:*

a) *Die Mengen* $\operatorname{in} E$ *und* $\operatorname{ex} E$ *seien σ-kompakte Nullmengen;*

b) $T_{-s}(\operatorname{in} E) \subset \bigcup_{0\leqq r<s} T_{-r} E^c$ *für alle* $s>0$;

c) $\operatorname{ex} E \cap \bigcup_{0<r<t} T_{-r}(\operatorname{in} E \setminus \operatorname{ex} E) = \emptyset$;

d) $\mu\left(\bigcup_{0\leqq r<t} T_{-r}(\operatorname{in} E \cap \operatorname{ex} E)\right) = 0$.

Dann sind die Funktion r_E und die Mengen E_s $(s>0)$ meßbar, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_{\frac{t}{n}}) = \lim_{n\to\infty} n\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\right) = 0$$

und

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{E_s} r_E(x)\, d\mu(x) = \mu\left(\bigcup_{r\geqq 0} T_{-r} E\right) - \mu(E).$$

Beweis. Nach Satz 5 und 8 genügt es, die Beziehung $\lim_{n\to\infty} n\,\mu\left(E\left(\frac{t}{n}\right)\right) = 0$ zu beweisen. Wir zeigen zunächst, daß bei gegebenen $n \geqq 1$ und für $0 \leqq k < k' \leqq n-1$

$$\mu\left(T_{-k\frac{t}{n}} \bigcup_{0\leqq r<\frac{t}{n}} T_{-r}(\operatorname{in} E) \cap T_{-k'\frac{t}{n}} \bigcup_{0\leqq r'<\frac{t}{n}} T_{-r'}(\operatorname{in} E)\right) = 0$$

und die entsprechende Beziehung gilt, in der die Menge $\operatorname{in} E$ durch $\operatorname{ex} E$ ersetzt ist.

In der Tat, es sei

$$y \in T_{-k\frac{t}{n}} \bigcup_{0\leqq r<\frac{t}{n}} T_{-r}(\operatorname{in} E) \cap T_{-k'\frac{t}{n}} \bigcup_{0\leqq r'<\frac{t}{n}} T_{-r'}(\operatorname{in} E)$$

gegeben. Dann gilt $T_{k\frac{t}{n}+r}\, y \in \operatorname{in} E$, $T_{k'\frac{t}{n}+r'}\, y \in \operatorname{in} E$, $0 \leqq r < \frac{t}{n}$, $0 \leqq r' < \frac{t}{n}$ und daher $k\frac{t}{n} + r < k'\frac{t}{n} + r'$. Im Beweis von Hilfssatz 12 wurde gezeigt, daß dann $T_{k'\frac{t}{n}+r'}\, y \in \operatorname{in} E \cap \operatorname{ex} E$ gelten muß. Es folgt

$$T_{-k\frac{t}{n}} \bigcup_{0\leqq r<\frac{t}{n}} T_{-r}(\operatorname{in} E) \cap T_{-k'\frac{t}{n}} \bigcup_{0\leqq r'<\frac{t}{n}} T_{-r'}(\operatorname{in} E) \subset \bigcup_{0\leqq u<t} T_{-u}(\operatorname{in} E \cap \operatorname{ex} E)$$

und damit die erste der beiden oben angeführten Behauptungen. Die entsprechende Behauptung für $\operatorname{ex} E$ wird ähnlich bewiesen.

Unter Benützung des soeben bewiesenen und unter Verwendung von Hilfssatz 12 schließen wir

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\Big(\bigcup_{0\leqq r<t} T_{-r}(\operatorname{in} E \cap \operatorname{ex} E)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1} T_{-k\frac{t}{n}}\Big[\bigcup_{0\leqq r<\frac{t}{n}} T_{-r}(\operatorname{in} E) \cap \bigcup_{0\leqq s<\frac{t}{n}} T_{-s}(\operatorname{ex} E)\Big]\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\,\mu\Big(\bigcup_{0<r<\frac{t}{n}} T_{-r}(\operatorname{in} E) \cap \bigcup_{0\leqq s<\frac{t}{n}} T_{-s}(\operatorname{ex} E)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Die in Satz 9 angeführten Bedingungen und Aussagen lassen sich leicht an Hand des folgenden Beispieles veranschaulichen, in dem sie alle zutreffen: es sei T_t die Drehung der Ebene um einen festen Punkt 0 in positiver Richtung um den Winkel t und E eine abgeschlossene Kreisscheibe, die 0 nicht enthält.

Daß die Bedingung $\lim_{n\to\infty} n\,\mu\Big(E\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)=0$ in Satz 5 nicht einfach übergangen werden kann, zeigt bei der gleichen Strömung $\{T_t\}_{t\geqq 0}$ die Menge $F=D\cup\bigcup_{n=1}^{\infty} T_{-\frac{1}{n}} D$, wobei D der auf einem Strahl durch 0 liegende Durchmesser der Kreisscheibe E ist.

Literatur

1. Ambrose, W., and S. Kakutani: Structure and continuity of measurable flows. Duke math. J. **9**, 25–42 (1942).
2. Helmberg, G., and F. H. Simons: A dualization of Kac's recurrence theorem. Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A **69** = Indagationes math. **28**, 608–615 (1966).
3. Jacobs, K.: Lecture notes on ergodic theory. Mathematisk Institut, Aarhus Universitet 1962/63.
4. Kac, M.: Recurrence in discrete stochastic processes. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1002–1010 (1947).
5. Krengel, U.: Darstellungssätze für Strömungen und Halbströmungen I. Math. Ann. **176**, 181–190 (1968).
6. — Darstellungssätze für Strömungen und Halbströmungen II. Erscheint in Math. Ann.
7. Meyer, P.-A.: Probabilités et potentiel. Paris: Hermann 1966.
8. Moy, S.-T. C.: Successive recurrence times in a stationary process. Ann. math. Statistics **30**, 1254–1257 (1959).
9. Preisendorfer, R. W., and B. W. Roos: Recurrence-partitions of finite measure spaces with applications to ergodic theory. Trans. Amer. math. Soc. **99**, 91–101 (1961).
10. Roos, B. W.: Successive recurrence functions and the partition of finite measure spaces. J. Soc. industr. appl. Math. **12**, 897–898 (1964).
11. — Note on generalized dynamical systems SIAM Review **6**, 269–274 (1964).
12. Tsurumi, S.: On the recurrence theorems in ergodic theory. Proc. Japan. Acad. **34**, 208–211 (1958).
13. Wright, F. B.: Mean least recurrence time. J. London Math. Soc. **36**, 382–384 (1961).

Professor G. Helmberg
Technological University Eindhoven
Department of Mathematics
P. O. Box 513
Eindhoven, Netherlands

(Eingegangen am 5. Oktober 1968)