Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 4, 159—174 (1965)

Fast positive Operatoren

Von

Wilhelm von Waldenfels

Sei A ein linearer Operator, dessen Definitions- und Wertebereich aus reellwertigen Funktionen über einer Grundmenge X besteht. Wir nennen A fast positiv, wenn aus $f \geqq 0$ und $f(x) = 0$ folgt, daß $Af(x) \geqq 0$ ist. Ein Differentialoperator auf der Geraden R der Form

$$c(x) + m(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}$$

mit $\sigma(x) \geqq 0$ ist fast positiv. Umgekehrt konnte Feller [3] (s. a. Dynkin [2]) unter sehr schwachen Voraussetzungen zeigen, daß jeder fast positiver Operator auf R vom lokalen Typ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist. Lokaler Typ bedeutet, daß $Af(x)$ nur vom Verhalten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x abhängt.

Unser Thema ist teils weiter, teils enger als das von Feller. Wir interessieren uns nur für Operatoren, deren Definitionsbereich aus zweimal stetig differenzierbaren Funktionen besteht, lassen aber nichtlokale Operatoren zu und betrachten als Grundmengen offene Teilmengen des R^n, $n \geqq 1$.

Der Darstellungssatz Satz 1 zeigt, daß ein fast positiver Operator die Summe eines elliptischen Differentialoperators zweiter Ordnung und eines Integralterms ist, in dem ebenfalls zweite Ableitungen vorkommen. Satz 2 zeigt, wie stark die Eigenschaft der Fastpositivität ist. Aus schwachen Voraussetzungen folgt, daß ein fast positiver Operator stetig oder eine Familie fast positiver Operatoren gleichgradig stetig ist. Der Satz zeigt weiter, daß ein fast positiver Operator, dessen Definitionsbereich aus q-mal stetig differenzierbaren Funktionen ($q \geqq 2$) besteht, eindeutig auf zweimal stetig differenzierbare Funktionen ausgedehnt werden kann. Die Ordnung zwei hängt demnach der Fastpositivität wesentlich an und ist nicht erst durch die Wahl des Definitionsbereiches erzwungen.

Die erzeugenden infinitesimalen Operatoren von Markow-Halbgruppen sind fast positiv. Das Studium dieser Halbgruppen führte mich deshalb dazu, mich mit fast positiven Operatoren zu beschäftigen. Diese Arbeit ist der analytische Kern meiner Untersuchungen [7] und [8]. Die Darstellungen des Satzes 1 für fast positive Operatoren sind mehr oder weniger auch aus andern Veröffentlichungen über Markow-Halbgruppen bekannt (Yosida [9], Hunt [4], Neveu [5]).

Den Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf einer Menge X bezeichnen wir mit $F(X)$. Eine Funktion auf X heißt *positiv* oder $\geqq 0$, wenn alle ihre Funktionswerte $\geqq 0$ sind.

Sei μ ein Funktional, das für reellwertige Funktionen auf X erklärt ist. Wir nennen μ *positiv*, wenn $\langle \mu, f \rangle \geqq 0$ ist für alle positiven f aus dem Definitionsbereich von μ. Ein Funktional μ heißt *fast positiv* im Punkt $x \in X$, wenn $\langle \mu, f \rangle \geqq 0$ ist für alle f des Definitionsbereiches, die positiv sind und im Punkt x verschwinden.

Sei Y eine zweite Menge, $G \subset F(X)$ ein linearer Teilraum und $T: G \to F(Y)$ ein linearer Operator. T heißt *positiv*, wenn er positive Funktionen in positive Funktionen überführt. Sei nun $Y \subset X$, $G \subset F(X)$, $T: G \to F(Y)$, so nennen wir T *fast positiv*, wenn $(Tf)(y) \geqq 0$ ist für alle positiven $f \in G$, die in y verschwinden.

Bezeichnen wir mit $T(y)$ das Funktional $f \in G \to (Tf)(y)$ so ist T genau dann positiv, wenn alle $T(y)$ positiv sind und genau dann fast positiv, wenn $T(y)$ für jedes $y \in Y$ fast positiv im Punkt y ist.

Sei A eine Teilmenge von X und $f \in F(X)$, so setzen wir

$$\|f\|(A) = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

und

$$\|f\| = \|f\|(X).$$

Sei X ein topologischer Raum, so bezeichnen wir mit $C(X)$ den Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X. Wir versehen $C(X)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen.

Die Topologie von $C(X)$ wird beschrieben durch die Halbnormen $\|f\|(K)$, wo K alle kompakten Teilmengen von X durchläuft. Falls X ein lokal kompakter Hausdorffraum ist, ist $C(X)$ ein vollständiger, lokal konvexer Vektorraum.

Sei $f \in C(X)$, so bezeichnen wir mit dem Träger von f, in Symbolen $\operatorname{Tr} f$, den Abschluß der Punktmenge, auf der f nicht verschwindet. $C_*(X)$ sei der Teilraum von $C(X)$, der aus den Funktionen mit kompaktem Träger besteht.

Sei $\Omega \subset R^n$ offen, so bezeichen wir mit $C^q(\Omega)$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ die Menge des stetigen und q-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω und mit $C_*^q(\Omega)$ den Teilraum der Funktionen mit kompaktem Träger. Die Topologie von $C^q(\Omega)$ wird gegeben durch die Halbnormen

$$\|f\|_q(K) = \|f\|(K) + \sum_i \|\partial_i f\|(K) + \\ + \frac{1}{2!}\sum_{i,k} \|\partial_i \partial_k f\|(K) + \cdots + \frac{1}{q!}\sum_{i_1,\ldots,i_q} \|\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_q} f\|(K),$$

wo K alle kompakten Teilmengen von Ω durchläuft. Dabei ist $\partial_i f(x) = \partial f/\partial x_i(x)$ gesetzt. $C^q(\Omega)$ ist ein vollständiger, lokal konvexer Vektorraum.

Sei $f \in C_*(\Omega)$ und U eine Umgebung von $\operatorname{Tr} f$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $g \in C_*^q(\Omega)$ mit $\operatorname{Tr} f \subset U$ und $\|f - g\| \leqq \varepsilon$ (s. [6] S. 22).

Es gilt

$$\|fg\|_q(K) \leqq \|f\|_q(K)\,\|g\|_q(K).$$

Sei X ein kompakter Hausdorffraum, der eine offene Teilmenge Ω des R^n enthält. Sei Ω offen in X und stimme die von X in Ω induzierte Topologie mit der üblichen überein. Sei $U \subset \Omega$ offen. Wir bezeichnen mit $E(U)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf X, die in U zweimal stetig differenzierbar sind. Ist U leer, so ist $E(U) = C(X)$. Die Topologie von $E(U)$ ist gegeben durch die Halbnormen $\|f\| = \|f\|(X)$ und $\|f\|_2(K)$, wo K alle kompakten Teilmengen von U durchläuft. Wir setzen zur Abkürzung

$$\|f\|_K = \max(\|f\|, \|f\|_2(K)).$$

Mit dieser Topologie ist $E(U)$ ein lokal konvexer vollständiger Hausdorffraum. Der Raum $E(\Omega)$ ist nicht leer. Denn offensichtlich ist $1 \in E(\Omega)$. Sei außerdem

$f \in C^2_*(\Omega)$ und setzen wir f auf $X - \Omega$ durch Null fort, so erhalten wir eine Funktion aus $E(\Omega)$. Wir werden diese Bemerkung in den kommenden Beweisen fortlaufend verwenden.

Ist V eine offene Teilmenge von U, so ist $E(U) \subset E(V)$ und die Injektion $f \in E(U) \to f \in E(V)$ stetig.

Sei $U \subset \Omega$ offen, so bezeichnen wir mit $E^q(U)$ den Raum aller auf X stetigen Funktionen, die in U stetig und q-mal stetig differenzierbar sind. Es ist $E^2(U) = E(U)$ und $E^q(U) \subset E(U)$ für $q \geqq 2$.

Hilfssatz 1. *Seien U und V offene Teilmengen von Ω, sei $V \subset U$ und $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt. Sei $q \geqq 2$. Dann ist $E^q(U)$ dicht in $E(V)$.*

Beweis: Sei $f \in E(V)$, $\varepsilon > 0$ und $K \subset V$ kompakt. Wir zeigen, daß es ein $g \in E^q(U)$ gibt mit $\|f - g\| \leqq \varepsilon$ und $\|f - g\|_2(K) \leqq \varepsilon$.

Es gibt eine offene Teilmenge W von Ω, so daß

$$K \subset W \subset \bar{W} \subset V \subset U \subset \bar{U} \subset \Omega$$

ist. Man kann eine Funktion $h_1 \in E(\Omega)$ mit kompakten Träger in V finden, die auf $\bar{W}$ gleich 1 ist, ebenso eine Funktion $h_2 \in C(X)$ mit kompaktem Träger in Ω, die auf $\bar{U}$ gleich 1 ist. Wir zerlegen

$$f = fh_1 + f(1 - h_1)h_2 + f(1 - h_2) .$$

Weil fh_1 in Ω zweimal stetig differenzierbar ist und einen kompakten Träger in V besitzt, gibt es eine Funktion $g_1 \in E^q(\Omega)$ mit kompaktem Träger in V, so daß $\|fh_1 - g_1\| \leqq \varepsilon/2$ ist (s. [*6*] S. 22 und 24). Da $\operatorname{Tr} f(1 - h_1)h_2 \subset \Omega - K$ liegt, gibt es ein $g_2 \in E^q(\Omega)$, dessen Träger in $\Omega - K$ liegt, mit $\|f(1 - h_1)h_2 - g_2\| \leqq \varepsilon/2$. Die Funktion

$$g = g_1 + g_2 + f(1 - h_2)$$

erfüllt die zu Beginn des Beweises erhobenen Forderungen.

Folgerung 1. *Seien U und V offene Teilmengen von Ω, sei $V \subset U$ und $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt. Sei $f \in E(V)$ und $K \subset V$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in E(U)$ mit $\|f - g\| \leqq \varepsilon$, das auf K mit f übereinstimmt.*

Beweis: Man setze im Beweis des letzten Hilfssatzes $g_1 = fh_1$.

Folgerung 2. *Sei U eine offene Teilmenge von Ω und $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt. Dann ist $E(U)$ dicht in $C(X)$.*

Beweis: Man setze im letzten Hilfssatz $V = \emptyset$ und im Beweis $K = W = \bar{W} = \emptyset$ und $h_1 = 0$.

Sei $x \in \Omega$, sei U eine offene Umgebung von x und $\Psi_x \in E(U)$. Wir nennen Ψ_x eine *Majorantenfunktion* im Punkte x, wenn Ψ_x die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \Psi_x(x) &= 0 , \\ \partial_i \Psi_x(x) &= 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n , \\ \Psi_x(y) &> 0 \quad \text{für} \quad y \in X, y \neq x , \end{aligned}$$

die Matrix $(\partial_i \partial_k \Psi_x(x))_{i,k=1,\ldots,n}$ ist positiv definit.

Die Bezeichnung Majorantenfunktion wird durch den folgenden Hilfssatz erklärt.

Hilfssatz 2. *Sei $K \subset \Omega$ kompakt, $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von K, $(\Psi_x)_{x \in K}$ eine Familie von Funktionen aus $E(U)$. Die Funktion Ψ_x sei eine Majorantenfunktion im Punkt x und die Abbildung*

$$x \in K \to \Psi_x \in E(U)$$

sei stetig.

Dann gibt es zu jeder kompakten Umgebung L von K, $L \subset U$, ein $\lambda \geqq 0$, so daß

$$|f| \leqq \lambda \Psi_x \|f\|_L$$

ist für alle $x \in K$ und $f \in E(U)$, die den Bedingungen $f(x) = 0$, $\partial_i f(x) = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, genügen.

Beweis: Sei L^0 das Innere von L und δ der Abstand von $\Omega - L^0$ und K. Ist also $x \in K$ und $y \in \Omega$ mit $|y - x| < \delta$, so gehört y zu L^0. Ist ferner $y \in \Omega$ mit $|y - x| \leqq \delta$, so gehört y wenigstens noch zu L.

Sei $f \in E^2(U)$, $x \in K$, $y \in \Omega$ und $|y - x| \leqq \delta$, so liefert der Taylorsche Satz

$$f(y) = f(x) + \sum \partial_i f(x)(y_i - x_i) + \\ + \int_0^1 (1-u) \sum \sum (y_i - x_i)(y_k - x_k)\, \partial_i \partial_k f(x + u(y - x))\, du\,.$$

Sei $f(x) = 0$, $\partial_i f(x) = 0$, so erhält man

$$|f(y)| \leqq \sum \sum |(y_i - x_i)(y_k - x_k)|\, \|\partial_i \partial_k f\|(L) \int_0^1 (1-u)\, du\,.$$

Man wendet auf die Summe die Schwarzsche Ungleichung an und erhält nach kurzer Rechnung

$$|f(y)| \leqq |y - x|^2 \|f\|_2(L) \tag{1}$$

für $x \in K, y \in \Omega, |y - x| \leqq \delta$.

Offensichtlich gilt

$$|f(y)| \leqq \|f\| \tag{2}$$

für alle $y \in X$.

Die Taylorsche Formel liefert weiterhin für $x \in K$, $y \in \Omega$, $|y - x| \leqq \delta$, daß

$$\Psi_x(y) = 1/2 \sum \sum (y_i - x_i)(y_k - x_k)\, \partial_i \partial_k \Psi_x(x) + \\ + \int_0^1 (1-u) \sum \sum (y_i - x_i)(y_k - x_k)\,.\,(\partial_i \partial_k \Psi_x(x + u(y - x)) - \partial_i \partial_k \Psi_x(x))\, du$$

ist.

Weil die Funktion

$$x \in K \to \partial_i \partial_k \Psi_x(x)$$

stetig ist, ist auch

$$u \in R^n, x \in K \to \sum \sum u_i u_k \partial_i \partial_k \Psi_x(x)$$

stetig. Da der letzte Ausdruck für $u \neq 0$ streng positiv ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\sum \sum u_i u_k\, \partial_i \partial_k \Psi_x(x) \geqq 4\,\varepsilon$$

ist für $x \in K$ und $u \in R^n$, $|u| = 1$. Endlich erhält man

$$\sum \sum (y_i - x_i)(y_k - x_k)\, \partial_i \partial_k \Psi_x(x) \geqq 4\,\varepsilon\, |y - x|^2$$

für $x \in K$, $y \in R^n$.

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung findet man

$$\Big|\sum \sum (y_i - x_i)(y_k - x_k)(\partial_i \partial_k \Psi_x(x + u(y - x)) - \partial_i \partial_k \Psi_x(x))\Big|$$
$$\leqq |y - x|^2 \Big(\sum \sum (\partial_i \partial_k \Psi_x(x + u(y - x)) - \partial_i \partial_k \Psi_x(x))^2\Big)^{1/2}.$$

Weil die Funktion

$$x \in K,\ y \in L \to \partial_i \partial_k \Psi_x(y)$$

gleichmäßig stetig ist, gibt es ein δ', $0 < \delta' \leqq \delta$, so daß der letzte Ausdruck $\leqq \varepsilon/2\, |y - x|^2$ ist für $x \in K$, $y \in \Omega$, $|y - x| \leqq \delta'$ und $0 \leqq u \leqq 1$.

Es gibt somit ein $\varepsilon > 0$ und ein δ', $0 < \delta' \leqq \delta$, so daß

$$\Psi_x(y) \geqq \varepsilon |y - x|^2 \tag{3}$$

ist für $x \in K$, $y \in \Omega$, $|y - x| \leqq \delta'$.

Wir wählen eine stetige Funktion φ auf dem R^n mit den Eigenschaften $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $\varphi(y) = 1$ für $|y| \leqq \delta'/2$, $\varphi(y) = 0$ für $|y| > \delta'$. Sei $x \in K$, so setzen wir

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} \varphi(y - x) & \text{für } \ y \in L \\ 0 & \text{für } \ y \in \Omega - L. \end{cases}$$

Die Abbildung

$$x \in K,\ y \in X \to \varphi_x(y)$$

ist stetig. Die Abbildung

$$x \in K,\ y \in X \to \max(\Psi_x(y),\ \varphi_x(y))$$

ist stetig und überall > 0. Somit gibt es ein $\varepsilon' > 0$, so daß

$$\max(\Psi_x(y),\ \varphi_x(y)) \geqq \varepsilon'$$

ist für alle $x \in K$ und $y \in X$. Folglich gilt

$$\Psi_x(y) \geqq \varepsilon' > 0 \tag{4}$$

für $x \in K$, $y \in X - K_x^{\delta'}$, wo wir

$$K_x^{\delta'} = \{y \in \Omega : |y - x| \leqq \delta'\}$$

gesetzt haben.

Aus den Gleichungen (1) bis (4) folgt sofort die Behauptung.

Sei $x \in \Omega$, sei U eine offene Umgebung von U und sei $(\zeta_v^i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Familie von Funktionen aus $E(U)$. Wir nennen $(\zeta_x^i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Familie von *Koordinatenfunktionen* im Punkt x, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

$$\zeta_x^i(x) = 0\,,$$
$$\partial_k \zeta_x^i(x) = \delta_{ik}\,,$$
$$\partial_j \partial_k \zeta_x^i(x) = 0$$

für $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Sei $\Psi_x \in E(U)$ eine Majorantenfunktion im Punkt x, so definieren wir für $f \in E(U)$ den Operator $\Delta_x f$ durch

$$\Delta_x f(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x) - \sum \partial_i f(x)\, \zeta_x^i(y) - \frac{1}{2} \sum \sum \partial_i \partial_k f(x) \cdot \zeta_x^i(y)\, \zeta_x^k(y)}{\Psi_x(y)} & \text{für} \quad y \neq x\,, \\ 0 \quad \text{für} \quad y = x\,. \end{cases}$$

Ist die Dimension $n = 1$, also Ω ein offenes Teilstück der Geraden, so gibt es nur eine Koordinatenfunktion ζ_x und ζ_x^2 ist durch Ψ_x teilbar. Wir führen den Operator $\mathfrak{D}_x$ ein:

$$\mathfrak{D}_x f(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x) - f'(x)\, \zeta_x(y)}{\Psi_x(y)} \text{für} \quad y \neq x \\ f''(x) \,|\, \Psi''(x) \quad \text{für} \quad y = x \end{cases}$$

Hilfssatz 3. *Sei $K \subset \Omega$ kompakt, $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von K, $(\Psi_x)_{x \in K}$ und $(\zeta_x^i)_{x \in K,\, i = 1, \ldots, n}$ Familien von Funktionen aus $E(U)$. Dabei sei Ψ_x eine Majorantenfunktion in Punkt x und sei $(\zeta_x^i)_{i = 1, \ldots, n}$ eine Familie von Koordinatenfunktionen in Punkt x. Ferner seien die Abbildungen*

$$x \in K \to \Psi_x \in E(U)$$

$$x \in K \to \zeta_x^i \ \in E(U)$$

für $i = 1, \ldots, n$ stetig.

Dann liegt $\Delta_x f \in C(X)$ für $x \in K$ und die Abbildung $x \in K \to \Delta_x f \in C(X)$ ist stetig für jedes feste $f \in E(U)$. Die Δ_x bilden für $x \in K$ eine gleichgradig stetige Familie von Operatoren von $E(U)$ in $C(X)$. Genauer gilt: Sei $L \subset U$ eine kompakte Umgebung von K, so gibt es eine Konstante C, so daß $\| \Delta_x f \| \leqq C \| f \|_L$ ist für alle $f \in E(U)$.

Sei Ω eine offene Teilmenge der Geraden R, so lassen sich alle für Δ_x gemachten Aussagen auf $\mathfrak{D}_x$ übertragen.

Beweis: Sei $f \in E(U)$. Wir zeigen, daß die Abbildung

$$(x, y) \in K \times X \to \Delta_x f(y)$$

stetig ist. Daraus folgt unmittelbar, daß $\Delta_x f \in C(X)$ ist und die Abbildung $x \in K \to \Delta_x f \in C(X)$ stetig ist. Für die Punkte $(x, y) \in K \times X$ mit $x \neq y$ ist die Stetigkeit klar. Es bleibt zu beweisen, daß $\Delta_x f(y)$ gegen Null geht, wenn (x, y) gegen einen Punkt (z, z) strebt.

Sei $L \subset U$ eine kompakte Umgebung von K und δ der Abstand von K und $\Omega - L^0$. Wir erinnern an Gleichung (3) aus dem Beweis des letzten Hilfssatzes. Demnach gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein δ', $0 < \delta' \leqq \delta$, so daß

$$\Psi_x(y) \geqq \varepsilon \,|\, y - x \,|^2$$

ist für $x \in K$, $y \in \Omega$, $|\, y - x \,| \leqq \delta'$.

Sei nun $z \in K$ fest, seien $x \in K$ und $y \in \Omega$ mit $|\, x - z \,| \leqq \delta'/2$, $|\, y - z \,| \leqq \delta'/2$ und $x \neq y$. Mit Hilfe der Taylorschen Formel erhält man

$$\Delta_x f(y) = \sum_{l,m} \frac{(y_l - x_l)\,(y_m - x_m)}{\Psi_x(y)} \cdot$$

$$\int_0^1 (1 - u)\, [\partial_l \partial_m f(x + u(y - x)) - \sum_i \partial_i f(x)\, \partial_l \partial_m \zeta_x^i(x + u(y - x)) -$$

$$- \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \partial_i \partial_k f(x)\, \partial_l \partial_m (\zeta_x^i \zeta_x^k)\, (x + u(y - x))]\, du\,.$$

Der erste Faktor unter der Summe bleibt für $|x - y| \leqq \delta'$ beschränkt, der Integrand konvergiert für $(y, x) \to (z, z)$ gleichmäßig in $0 \leqq u \leqq 1$ gegen Null. Somit konvergiert $\Delta_x f(y)$ gegen Null für $(x, y) \to (z, z)$.

Die Abschätzung $\|\Delta_x f\| \leqq C \|f\|_L$ folgt sofort aus dem letzten Hilfssatz. Die Aussagen für $\mathfrak{D}_x$ werden wie die für Δ_x bewiesen.

Hilfssatz 4. *Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es Familien $(\Psi_x)_{x \in K}$ und $(\zeta_x^i)_{x \in K, i=1,\ldots,n}$ von Funktionen aus $E(\Omega)$, die im Punkte x Majoranten- bzw. Koordinatenfunktionen sind und für die die Abbildungen*

$$x \to \Psi_x \in E(\Omega)$$
$$x \to \zeta_x^i \in E(\Omega)$$

stetig sind.

Beweis: Es gibt eine Funktion $\varrho \in E(\Omega)$, $0 \leqq \varrho \leqq 1$ mit kompakten Träger in Ω, die auf einer Umgebung von K gleich 1 ist. Wir setzen

$$\Psi_x(y) = |y - x|^2 \varrho(y) + 1 - \varrho(y)$$
$$\zeta_x^i(y) = (y_i - x_i)\varrho(y).$$

Satz 1. *Sei $K \subset \Omega$ kompakt, U eine offene Umgebung von K und $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt. Seien $(\Psi_x)_{x \in K}$ und $(\zeta_x^i)_{x \in K, i=1,\ldots,n}$ Familien aus $E(U)$. Für jedes feste $x \in K$ sei Ψ_x eine Majorantenfunktion und $(\zeta_x^i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Familie von Koordinatenfunktionen in Punkt x. Ferner seien die Abbildungen*

$$x \in K \to \Psi_x \in E(U)$$
$$x \in K \to \zeta_x^i \in E(U)$$

für $i = 1, \ldots, n$ stetig. Sei A ein linearer Operator, der $E(U)$ in $F(K)$ abbildet. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(i) *A ist ein stetiger, fast positiver Operator von $E(U)$ in $C(K)$.*

(ii) *Für alle $x \in K$ und $f \in E(U)$ gilt*

$$Af(x) = c(x)f(x) + \sum m_i(x)\partial_i f(x) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum \sum \sigma_{ik}(x)\partial_i\partial_k f(x) + (Q\Delta_x f)(x).$$

Dabei sind $c(x)$, $m_i(x)$, $\sigma_{ik}(x)$ für $i, k = 1, \ldots, n$ reelle Zahlen, die stetig von x abhängen. Die Matrix $(\sigma_{ik}(x))_{i,k=1,\ldots,n}$ ist positiv semidefinit. Q ist ein positiver, stetiger Operator von $C(X)$ in $C(K)$. Für jedes $x \in K$ ist also

$$Q(x): f \in C(X) \to \langle Q(x), f \rangle = Qf(x)$$

ein positives Radonsches Maß auf X. Die Matrix

$$\left[\sigma_{ik}(x) - \int\limits_{X - \{x\}} \frac{\zeta_x^i(y)\,\zeta_x^k(y)}{\Psi_x(y)}\, Q(x, dy)\right]_{i,k=1,\ldots,n}$$

ist positiv semidefinit.

(iii) *A ist ein stetiger Operator von $E(U)$ in $C(K)$ und für jedes $f \in E(U)$ und $x \in K$ gilt*

$$Af(x) = c(x)f(x) + \sum m_i(x)\partial_i f(x) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum \sum s_{ik}(x)\partial_i\partial_k f(x) + \langle P(x), f - f(x) - \sum \partial_i f(x)\zeta_x^i \rangle.$$

Die Matrix $(s_{ik}(x))_{i,k=1,\dots,n}$ *ist positiv semidefinit.* $P(x)$ *ist ein positives Maß auf* $X - \{x\}$, *für das jede Funktion* f *aus* $E(U)$ *mit*

$$f(x) = 0,\ \partial_i f(x) = 0,\ (i = 1, \dots, n),$$

integrierbar ist.

Ist Ω *eine offene Teilmenge der Geraden* R, *so sind* (i), (ii) *und* (iii) *äquivalent mit*

(iv) *Für alle* $f \in E(U)$ *und* $x \in K$ *gilt*

$$Af(x) = c(x) f(x) + m(x) f'(x) + (Q \mathfrak{D}_x f)(x),$$

wo $c(x)$ *und* $m(x)$ *stetig von* x *abhängende Zahlen und* Q *ein stetiger, positiver Operator von* $C(X)$ *in* $C(K)$ *ist.*

Ferner folgen aus (i), (ii), (iii) *und* (iv) *die folgenden Zusätze:*

Zusatz zu (ii): *Die Größen* $c(x)$, $m_i(x)$ *und* $\sigma_{ik}(x)$ *sind von* A *eindeutig festgelegt. Und zwar gilt*

$$c(x) = \langle A(x), 1\rangle$$
$$m_i(x) = \langle A(x), \zeta_x^i\rangle$$
$$\sigma_{ik}(x) = \langle A(x), \zeta_x^i \zeta_x^k\rangle .$$

Das Maß $Q(x)$ *ist durch* A *bis auf einen Summanden der Form* $a(x)\delta_x$ *bestimmt, wo* $a(x)$ *eine stetig von* x *abhängende Zahl und* $\delta_x: f \in C(X) \to \langle \delta_x, f\rangle = f(x)$ *das Diracmaß ist, und zwar gilt*

$$\langle Q(x), f\rangle = \langle A(x), \Psi_x f\rangle$$

für alle $f \in E(U)$ *mit* $f(x) = 0$. *Das Maß* $Q(x)$ *kann jedoch so gewählt werden, daß*

$$\langle A(x), \Psi_x f\rangle = \langle Q(x), f\rangle$$

für alle $f \in E(U)$ *ist. Durch diese zusätzliche Forderung ist dann* $Q(x)$ *eindeutig bestimmt.*

Zusatz zu (iii): *Die Größen* $c(x)$, $m_i(x)$, $s_{ik}(x)$ *und* $P(x)$ *sind von* A *eindeutig bestimmt. Es gilt*

$$c(x) = \langle A(x), 1\rangle,$$
$$m_i(x) = \langle A(x), \zeta_x^i\rangle,$$
$$\langle P(x), f\rangle = \langle A(x), f\rangle$$

für $f \in E(U) \cap C_*(X - \{x\})$. *Sei* Φ *die Menge aller* $\varphi \in E(U)$, $0 \leqq \varphi \leqq 1$, *die auf einer Umgebung von* x *gleich* 1 *sind und einen kompakten Träger besitzen. Bezüglich der Relation* $\leqq$ *bildet* Φ *ein fallendes Netz und es gilt*

$$s_{ik}(x) = \lim_{\varphi \in \Phi} \langle A(x), (y_i - x_i)(y_k - x_k)\varphi\rangle .$$

Das Maß $P(x)$ *und die Matrix* $s_{ik}(x)$ *hängen demnach nicht von der Wahl der Familien* $(\Psi_x)_{x\in X}$ *und* $(\zeta_x^i)_{x\in K}$, $i = 1, \dots, n$ *ab.*

Zusatz zu (iv): *Die Größen* $c(x)$, $m(x)$ *und* Q *sind eindeutig durch* A *bestimmt. Es gilt*

$$c(x) = \langle A(x), 1\rangle,$$
$$m(x) = \langle A(x), \zeta_x\rangle,$$
$$\langle Q(x), f\rangle = \langle A(x), \Psi_x f\rangle$$

für alle $f \in E(U)$.

Beweis: Wir zeigen den Satz in der folgenden Reihenfolge: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), (ii) $\Rightarrow$ Zusatz (ii), (iii) $\Rightarrow$ Zusatz (iii), (ii) mit Zusatz $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Rightarrow$ Zusatz (iv).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir zerlegen $f \in E(U)$ in

$$f = f(x)\,1 + \sum \partial_i f(x)\,\zeta_x^i + \tfrac{1}{2} \sum \sum \partial_i \partial_k f(x)\,\zeta_x^i \zeta_x^k + \Psi_x \Delta_x f$$

und wenden A an:

$$A f(x) = \langle A(x), f\rangle = f(x)\,\langle A(x), 1\rangle + \\ + \sum \partial_i f(x)\,\langle A(x), \zeta_x^i\rangle + \tfrac{1}{2} \sum \sum \partial_i \partial_k f(x)\,\langle A(x), \zeta_x^i \zeta_x^k\rangle + \langle A(x), \Psi_x \Delta_x f\rangle .$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} c(x) &= \langle A(x), 1\rangle , \\ m_i(x) &= \langle A(x), \zeta_x^i\rangle , \\ \sigma_{ik}(x) &= \langle A(x), \zeta_x^i \zeta_x^k\rangle . \end{aligned} \tag{1}$$

Daß diese Zahlen stetig von x abhängen, ist leicht einzusehen.

Seien a_i, $i = 1, \ldots, n$ reelle Zahlen, so ist $(\sum a_i \zeta_x^i)^2$ eine Funktion aus $E(U)$, die $\geqq 0$ ist und in x verschwindet. Folglich gilt

$$0 \leqq \langle A(x), (\sum a_i \zeta_x^i)^2\rangle = \sum \sum a_i a_k \sigma_{ik}(x) .$$

Das besagt aber, daß die Matrix $\sigma_{ik}(x)$ positiv semidefinit ist.

Durch die Formeln.

$$\begin{aligned} &f \in E(U) \to \langle Q(x), f\rangle = \langle A(x), \Psi_x f\rangle \\ &Q f(x) = \langle Q(x), f\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

definieren wir einen positiven, stetigen Operator Q von $E(U)$ in $C(K)$. Sei $f \in E(U)$, $\|f\| \leqq 1$, so ist $\|Qf\|(K) \leqq \max\limits_{x \in K} \langle A(x), \Psi_x\rangle < \infty$.

Also ist Q stetig bezüglich der von $C(X)$ in $E(U)$ induzierten Topologie. Da $E(U)$ dicht in $C(X)$ ist, kann Q eindeutig zu einem stetigen, positiven Operator von $C(X)$ in $C(K)$ fortgesetzt werden, den wir wieder mit Q bezeichnen.

Wir müssen zeigen, daß

$$\langle Q(x), \Delta_x f\rangle = \langle A(x), \Psi_x \Delta_x f\rangle \tag{3}$$

ist für alle $f \in E(U)$. Sei $f \in E(U)$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $g \in E(U)$ mit

$$\|f - g\| \leqq \varepsilon .$$

Es ist

$$|\langle Q(x), \Delta_x f\rangle - \langle A(x), \Psi_x \Delta_x f\rangle| = |\langle Q(x), \Delta_x f\rangle - \langle Q(x), g\rangle| + \\ + |\langle A(x), \Psi_x g\rangle - \langle A(x), \Psi_x \Delta_x f\rangle| \leqq \varepsilon (\|Q(x)\| + \langle A(x), \Psi_x\rangle) .$$

Dabei haben wir die Fastpositivität von $A(x)$ ausgenutzt. Gleichung (3) folgt unmittelbar.

Wir zerlegen

$$Q(x) = Q(x)_0 + b(x)\,\delta_x \tag{4}$$

wo

$$\langle Q(x)_0, f\rangle = \int_{X-\{x\}} f(y)\, Q(x, dy) \tag{5}$$

ist. Weil $\Delta_x f(x) = 0$ ist, gilt

$$\langle Q(x), \Delta_x f\rangle = \langle Q(x)_0, \Delta_x f\rangle .$$

Sei Φ das im Zusatz zu (iii) definierte Netz und sei $\varphi \in \Phi$, so gilt

$$\begin{aligned} &\langle A(x), (y_i - x_i)(y_k - x_k)\varphi\rangle \\ &= \sigma_{ik}(x) + \langle Q(x)_0, \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)\varphi - \zeta_x^i \zeta_x^k}{\Psi_x}\rangle \\ &= \sigma_{ik}(x) - \langle Q(x)_0, (1-\varphi)\, \zeta_x^i \zeta_x^k / \Psi_x\rangle \\ &\qquad + \langle Q(x)_0, \varphi \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k) - \zeta_x^i \zeta_x^k}{\Psi_x}\rangle \\ &\to \sigma_{ik}(x) - \langle Q(x)_0, \zeta_x^i \zeta_x^k / \Psi_x\rangle . \end{aligned} \tag{6}$$

Man schließt daraus, ähnlich wie oben für $\sigma_{ik}(x)$ daß die Matrix

$$\sigma_{ik}(x) - \int_{X-\{x\}} \frac{\zeta_x^i(y)\, \zeta_x^k(y)}{\Psi_x(y)}\, Q(x, dy)$$

positiv semidefinit ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Daß A ein stetiger Operator ist, folgt aus Hilfssatz 3.

Sei $f \in C(X)$, so bezeichnen wir die Restriktion von f auf $X - \{x\}$ wieder mit f. Sei umgekehrt $f \in C_*(X - \{x\})$, so setzen wir f auf x durch $f(x) = 0$ fort und erhalten eine stetige Funktion auf X, die wir wieder mit f bezeichnen.

Wir definieren das positive Maß $P(x)$ auf $X - \{x\}$ indem wir für $f \in C_*(X - \{x\})$ setzen:

$$\langle P(x), f\rangle = \langle Q(x), f/\Psi_x\rangle .$$

Aus $f \in C_*(X - \{x\})$, $|f| \leqq \Psi_x$ folgt

$$|\langle P(x), f\rangle| \leqq |\langle P(x), f\rangle| \leqq \langle Q(x), 1\rangle .$$

Somit ist Ψ_x integrierbar bezüglich $P(x)$. Sei

$$f \in E(U), f(x) = 0, \quad \partial_i f(x) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

so ist $|f| \leqq C\Psi_x$ (Hilfssatz 2) und damit ebenfalls $P(x)$-integrierbar. Sei Φ das im Zusatz zu (iii) definierte Netz, so gilt

$$\langle P(x), f\rangle = \lim_{\varphi \in \Phi} \langle P(x), (1-\varphi) f\rangle .$$

Man schließt daraus

$$\langle P(x), f\rangle = \langle Q(x)_0, f/\Psi_x\rangle .$$

Setzen wir noch

$$s_{ik}(x) = \sigma_{ik}(x) - \langle Q(x)_0, \zeta_x^i \zeta_x^k / \Psi_x\rangle ,$$

so erhalten wir nach kurzer Rechnung die Behauptung.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Wir müssen noch zeigen, daß A fast positiv ist. Das folgt aus der Bemerkung, daß $f \in E(U), f(x) = 0, f \geqq 0$ das Verschwinden der Ableitungen $\partial_i f(x)$ nach sich zieht.

Zusatz zu (ii). Die ersten drei Gleichungen können unmittelbar verifiziert werden, ebenso

$$\langle Q(x), f\rangle = \langle A(x), \Psi_x f\rangle$$

für $f \in E(U), f(x) = 0$. Sei nun $g \in C(X), g(x) = 0$ dann gibt es nach der Folgerung 2 aus Hilfssatz 1 ein $f_1 \in E(U)$ mit $\|f_1 - g\| \leqq \varepsilon$. Setzen wir $f = f_1 - f_1(x)$, so ist $f(x) = 0$ und $\|f - g\| \leqq 2\varepsilon$. Daraus folgt, daß $\langle Q(x), f\rangle$ durch $A(x)$ eindeutig bestimmt ist für alle $f \in C(X)$ mit $f(x) = 0$. Sei nun f eine beliebige Funktion aus $C(X)$, so zerlegen wir

$$f = (f - f(x)\,1) + f(x)\,1$$

und erhalten

$$\langle Q(x), f\rangle = \langle Q(x), f - f(x)\,1\rangle + f(x)\,\langle Q(x), 1\rangle .$$

Sei Q' ein anderer positiver stetiger Operator $C(X) \to C(K)$ mit

$$\langle Q'(x), f\rangle = \langle A(x), \Psi_x f\rangle$$

für $f \in E(U), f(x) = 0$, so gilt für $f \in C(X)$

$$\langle Q(x) - Q'(x), f\rangle = f(x)\,\langle Q(x) - Q'(x), 1\rangle = a(x)\,\langle \delta_x, f\rangle$$

mit $a(x) = \langle Q(x) - Q'(x), 1\rangle$.

Weil wir gezeigt haben, daß (i) und (ii) äquivalent sind, können wir auch $Q(x)$ gemäß dem Beweis von (i) so wählen (Gleichung (2)), daß

$$\langle A(x), \Psi_x f\rangle = \langle Q(x), f\rangle$$

ist für *alle* $f \in E(U)$. Daß dadurch $Q(x)$ eindeutig bestimmt ist, folgt daraus, daß $E(U)$ dicht in $C(X)$ ist.

Zusatz zu (iii). Die ersten beiden Gleichungen sind klar, ebenso daß

$$\langle A(x), f\rangle = \langle P(x), f\rangle$$

ist für $f \in C_*(X - \{x\}) \cap E(U)$. Sei nun $g \in C_*(X - \{x\})$, so ist

$$V = U \cap (X - \operatorname{Tr} g)$$

eine offene Umgebung von x und $g \in E(V)$. Sei $K' \subset V$ eine kompakte Umgebung von x und $\varepsilon > 0$, so folgt aus der Folgerung 1 des Hilfssatzes 1, daß es ein $f \in E(U)$ mit $\|f - g\| \leqq \varepsilon$ gibt, das auf K' mit g_0 übereinstimmt, d. h. verschwindet. Somit $\operatorname{Tr} f \subset X - K^0$. Daraus schließt man, daß $P(x)$ durch die Werte $\langle A(x), f\rangle$ mit $f \in E(U) \cap C_*(X - \{x\})$ eindeutig festgelegt ist. Daß $s_{ik}(x)$ sich in der angegebenen Form durch $A(x)$ ausdrückt, rechnet man unmittelbar aus.

(ii) mit Zusatz $\Rightarrow$ (iv). Wir denken uns $Q(x)$ so gewählt, daß

$$\langle A(x), \Psi_x f\rangle = \langle Q(x), f\rangle$$

ist für alle $f \in E(U)$. Daraus schließt man ähnlich wie oben beim Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii), daß

$$\langle A(x), \Psi_x \mathfrak{D}_x f\rangle = \langle Q(x), \mathfrak{D}_x f\rangle$$

ist für alle $f \in E(U)$. Aus

$$\Delta_x f = \mathfrak{D}_x f - \tfrac{1}{2} f''(x)\,\zeta_x^2/\Psi_x$$

folgt nach kurzer Rechnung die Behauptung.

(iv) $\Rightarrow$ (i) trivial

(iv) $\Rightarrow$ Zusatz (iv). Ähnlich wie (ii) $\Rightarrow$ Zusatz (ii).

Beispiel. Wir betrachten unter den Voraussetzungen von Satz 1 den folgenden fast positiven Operator:

$$A f(x) = \alpha(x) f(x) + \sum \beta_i(x)\,\partial_i f(x) + \tfrac{1}{2} \sum \sum \gamma_{ik}(x)\,\partial_i \partial_k f(x) + T f(x)$$

wo $\alpha(x), \beta_i(x), \gamma_{ik}(x)$ stetige reellwertige Funktionen von x, die Matrix $\gamma_{ik}(x)$ positiv semidefinit und T ein positiver Operator von $C(X)$ in $C(K)$ ist.

Wir berechnen die in den Darstellungen (ii) und (iii) vorkommenden Größen.

$$c(x) = \alpha(x) + \langle T(x), 1\rangle\,,$$

$$m_i(x) = \beta_i(x) + \langle T(x), \zeta_x^i\rangle\,,$$

$$\sigma_{ik}(x) = \gamma_{ik}(x) + \langle T(x), \zeta_x^i \zeta_x^k\rangle\,,$$

$$\langle Q(x), f\rangle = \tfrac{1}{2} f(x) \sum \gamma_{ik}(x)\,\partial_i \partial_k \Psi_x(x) + \langle T(x), f \Psi_x\rangle$$

für $f \in E(U)$, falls $Q(x)$ so gewählt wird, daß $\langle Q(x), f\rangle = \langle A(x), \Psi_x f\rangle$ ist für alle $f \in E(U)$,

$$s_{ik}(x) = \gamma_{ik}(x)\,,$$

$$\langle P(x), f\rangle = \langle T(x), f\rangle$$

für $f \in C_*(X - \{x\})$.

Satz 2. *Sei $K \subset U$ kompakt, $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von K und $H \subset E(U)$ ein linearer dichter Teilraum. Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von fast positiven Operatoren von H in $C(K)$ und sei für jedes feste $f \in H$ die Zahlenmenge*

$$\{\|A_\lambda f\|(K) : \lambda \in \Lambda\}$$

beschränkt. Dann ist für jede kompakte Umgebung $L \subset U$ von K die Zahlenmenge

$$\{\|A_\lambda f\|(K) : \lambda \in \Lambda, f \in H, \|f\|_L \leqq 1\}$$

beschränkt. Die A_λ sind also gleichgradig stetig bezüglich der von $E(U)$ in H induzierten Topologie.

Beweis: Es genügt offensichtlich die folgende Behauptung (∗) zu zeigen:

(∗) *Sei $x \in K$ ein fester Punkt, sei $L \subset U$ eine kompakte Umgebung von K. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $C \geqq 0$, so daß*

$$|A_\lambda f(y)| \leqq C \|f\|_L$$

ist für alle $f \in H$, $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta$, $\lambda \in \Lambda$.

Wir beweisen zunächst die

Hilfsbehauptung 1. *Es gibt zwei Zahlen $\delta_1 \geqq 0$ und $B \geqq 0$ und zu jedem $y \in K$ mit $|y - x| \leqq \delta_1$ eine Familie $(\eta_y^i)_{i=0,1,\ldots,n}$ aus H, so daß*

$$\eta_y^i(y) = \delta_{i0}\,,$$

$$\partial_k \eta_y^i(y) = \delta_{ik}\,,$$

$$\|\eta_y^i\|_L \leqq B\,,$$

$$\|A_\lambda \eta_y^i\|\,(K) \leqq B$$

ist für $y \in K; |y - x| \leqq \delta_1; i = 0, 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, n$ und $\lambda \in \Lambda$.

Seien $f_0, f_1, \ldots, f_n$ Funktionen aus $E(U)$, so setzen wir

$$S(f_0, f_1, \ldots, f_n; x) = \begin{pmatrix} f_0(x) & \partial_1 f_0(x) & \ldots & \partial_n f_0(x) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_n(x) & \partial_1 f_n(x) & \ldots & \partial_n f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Sei $(\zeta^i)_{i=1,\ldots,n}$ ein Satz von Koordinatenfunktionen aus $E(U)$ im Punkt x. Wir setzen $\zeta^0 = 1$.

Dann ist

$$S(\zeta^0, \ldots, \zeta^n; x) = E$$

die Einheitsmatrix. Sei T eine Matrix, so definieren wir $\|T\| = \max\limits_i \sum\limits_k |T_{ik}|$. Es gibt ein $\delta_1 > 0$, so daß

$$\|S(\zeta^0, \ldots, \zeta^n; y) - E\| \leqq \tfrac{1}{4}$$

ist für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta_1$.

Weil H dicht in $E(U)$ ist, gibt es Funktionen ζ^{i*}, $i = 0, 1, \ldots, n$ aus H mit

$$\|S(\zeta^{0*}, \ldots, \zeta^{n*}; y) - S(\zeta^0, \ldots, \zeta^n; y)\| \leqq \tfrac{1}{4}$$

für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta_1$.

Es ist also

$$\|S(\zeta^{0*}, \ldots, \zeta^{n*}; y) - E\| \leqq \tfrac{1}{2}$$

für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta_1$.

Wir setzen

$$T(y) = S(\zeta^{0*}, \ldots, \zeta^{n*}; y)^{-1}.$$

Es ist

$$\|T(y) - E\| \leqq {}^1\!/_2 / (1 - {}^1\!/_2) = 1$$

und

$$\|T(y)\| \leqq 2\,.$$

Wir setzen für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta_1$

$$\eta_y^i = \sum T_{ik}(y)\, \zeta^{k*}$$

und finden

$$S(\eta_y^0, \ldots, \eta_y^n; y) = T(y)\, S(\zeta^{0*} \ldots \zeta^{n*}; y) = E\,,$$
$$\| \eta_y^i \|_L \leqq \sum | T_{ik}(y) \| \zeta^{k*} \|_L \leqq 2 \max_i \| \zeta^{i*} \|_L\,,$$
$$\| A_\lambda \eta_y^i \| (K) \leqq 2 \max_i \| A_\lambda \zeta^{i*} \| (K)\,.$$

Hilfsbehauptung 2. *Sei $(\Psi_x)_{x \in K}$ eine Familie von Funktionen aus $E(U)$, wo Ψ_x Majorantenfunktion im Punkt x und $x \in K \to \Psi_x \in E(U)$ stetig ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$, $0 < \delta \leqq \delta_1$ und eine Konstante C_1 und zu jedem $y \in K$ mit $|y - x| \leqq \delta$ eine Funktion $\varphi_y \in H$ mit*

$$\varphi_y(y) = 0\,,$$
$$\Psi_y \leqq 2\varphi_y\,,$$
$$\langle A_\lambda(y), \varphi_y \rangle \leqq C_1 \quad \text{für} \quad \lambda \in \Lambda\,.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\delta(\varepsilon) \leqq \delta_1\,,$$
$$\| \Psi_x - \Psi_y \|_L \leqq \varepsilon\,,$$
$$| \Psi_x(y) | \leqq \varepsilon\,,$$
$$| \partial_i \Psi_x(y) | \leqq \varepsilon$$

ist für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta(\varepsilon)$.

Wir wählen $\Psi^* \in H$, so daß

$$\| \Psi_x - \Psi^* \|_L \leqq \varepsilon$$

ist und setzen für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta(\varepsilon)$

$$\varphi_y = \Psi^* - \Psi^*(y)\, \eta_y^0 - \sum \partial_i \Psi^*(y)\, \eta_y^i\,.$$

Es ist $\varphi_y(y) = 0$ und $\partial_i \varphi_y(y) = 0$.

Man rechnet aus

$$\| \Psi_y - \varphi_y \|_L \leqq 2\varepsilon (1 + (n+1) B)$$

und folgert daraus nach Hilfssatz 2

$$| \Psi_y - \varphi_y | \leqq 2\varepsilon \lambda (1 + (n+1) B) \cdot \Psi_y$$

Wir wählen nun ε so klein, daß der Faktor von Ψ_y auf der rechten Seite $\leqq \frac{1}{2}$ wird und setzen $\delta(\varepsilon)$ gleich δ für dieses ε. Man erhält

$$\tfrac{1}{2} \Psi_y \leqq \varphi_y$$

für $y \in K$, $|y - x| \leqq \delta$. Der Rest der Hilfsbehauptung folgt durch einfache Abschätzung.

Wir vollenden nun den Beweis von (*).

Sei $f \in H$, so zerlegen wir

$$f = f(y)\, \eta_y^0 + \sum \partial_i f(y)\, \eta_y^i + F_y\,.$$

Aus der Ungleichung

$$\| F_y \|_L \leqq \| f \|_L (1 + (n+1) B)$$

gewinnt man mittels des Hilfssatzes 2, daß

$$\begin{aligned} | F_y | &\leqq \lambda (1 + (n+1) B) \| f \|_L \Psi_y \\ &\leqq 2 \lambda (1 + (n+1) B) \| f \|_L \varphi_y \end{aligned}$$

ist.

Somit

$$| \langle A_\lambda (y), F_y \rangle | \leqq C_1 \, 2 \lambda (1 + (n+1) B) \| f \|_L .$$

Der Rest der Behauptung (*) folgt aus Hilfsbehauptung 1.

Folgerung 1. *Sei $U \subset \Omega$ offen, H ein linearer dichter Teilraum von $E(U)$ und $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie fast positiver Operatoren von H in $C(U)$. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Zahlenmenge*

$$\{ \| A_\lambda f \| (K) : \lambda \in \Lambda \}$$

ist für jedes feste $f \in H$ und für jedes Kompaktum $K \subset U$ beschränkt.

(ii) *Sei $K \subset U$ kompakt, $L \subset U$ eine kompakte Umgebung von K, so ist die Zahlenmenge*

$$\{ \| A_\lambda f \| (K) : \lambda \in \Lambda, f \in H, \| f \|_L \leqq 1 \}$$

beschränkt.

(iii) *Die A_λ sind gleichgradig stetig bezüglich der von $E(U)$ in H induzierten Topologie.*

(iv) *Die A_λ lassen sich eindeutig zu stetigen, fast positiven Operatoren A_λ^* von $E(U)$ in $C(U)$ ausdehnen und die Familie $(A_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda}$ ist gleichgradig stetig.*

Folgerung 2. *Sei $U \subset \Omega$ offen, H ein linearer dichter Teilraum von $E(U)$ und $A : H \to C(U)$ ein fast positiver Operator. Dann gibt es genau einen fast positiven Operator $A^* : E(U) \to C(U)$, der A fortsetzt und A^* ist darüber hinaus stetig.*

Folgerung 3. *Seien U, $V \subset \Omega$ offen, $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt und $V \subset U$. Sei A ein fast positiver Operator $E(U) \to C(U)$, dann gibt es genau einen fast positiven Operator $A_V : E(V) \to C(V)$, so daß $A_V f = A f \mid V$ für alle $f \in E(U)$ ist, wo $\mid V$ die Restriktion auf V bedeutet.*

Zum Beweis betrachte man Hilfssatz 1.

Folgerung 4. *Sei $U \subset \Omega$ offen und $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt. Sei A ein fast positiver Operator von $E^q(U)$, $q \geqq 2$, in $C(U)$. Dann gibt es genau einen fast positiven Operator A^* von $E(U)$ in $C(U)$, der A fortsetzt, und A^* ist darüber hinaus stetig, besitzt also die in Satz 1 genannten Darstellungen.*

In A gehen also auch in diesem Fall nur Ableitungen höchstens zweiter Ordnung ein, wie wir es in der Einleitung bemerkten.

Folgerung 5. *Sei $x \in \Omega$, seien U, $V \subset \Omega$ offen und $\bar{U} \subset \Omega$ kompakt. Sei $x \in V \subset U$ und α ein in x fast positives Funktional über $E(U)$. Dann gibt es genau ein in x fast positives Funktional α^* über $E(V)$, das α fortsetzt, und α^* ist stetig.*

Folgerung 6. *Sei* $U \subset \Omega$ *offen und* H *ein linearer dichter Teilraum von* $E(U)$. *Sei* A_i *eine Folge fast positiver Operatoren von* $E(U)$ *in* $C(U)$ *und bilde* $A_i f$ *für jedes* $f \in H$ *eine Cauchyfolge in* $C(U)$. *Dann konvergiert* $A_i f$ *für jedes feste* $f \in E(U)$ *gegen* $Af \in C(U)$ *und* A *ist ein stetiger, fast positiver Operator von* $E(U)$ *in* $C(U)$.

Beweis: Die Folge $A_i f$ ist für jedes $f \in H$ beschränkt. Somit sind die A_i gleichgradig stetig. Durch $f \in H \to \lim A_i f$ wird ein fast positiver Operator $A_0: H \to C(U)$ definiert, der sich eindeutig zu einem stetigen, fast positiven Operator $A: E(U) \to C(U)$ ausdehnen läßt. Die A_i konvergieren gegen A für jedes $f \in H$. Da sie überdies gleichgradig stetig sind, konvergieren sie auch gegen A für jedes feste $f \in E(U)$ ja so sogar gleichmäßig für jede kompakte Teilmenge von $E(U)$. (Siehe [1] S. 23)

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Espaces vectorielles topologiques. Chap. III—V. Paris 1955.
[2] DYNKIN, E. B.: One-dimensional continuous strong Markov processes. Theor. Probab. Appl. **4**, 1—52 (1959).
[3] FELLER, W.: On second order differential operators. Ann. of Math., II. Ser. **61**, 90—105 (1955).
[4] HUNT, G. A.: Semigroups of measures on Lie groups. Trans. Amer. math. Soc. **81**, 264—293 (1956).
[5] NEVEU, J.: Théorie des semi-groupes de Markov. Univ. California Publ. Statistics **2**, 319—394 (1958).
[6] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Tome I, Paris 1957.
[7] v. WALDENFELS, W.: Eine Klasse stationärer Markowprozesse. Berichte der Kernforschungsanlage Jülich, Nov. 1961.
[8] — Positive Halbgruppen auf einem n-dimensionalen Torus. Arch. der Math. **15**, 191—203 (1964).
[9] YOSIDA, K.: An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markow-Process. J. math. Soc. Japan **1**, 244—253 (1949).

Institut für Plasmaphysik
der Kernforschungsanlage Jülich
des Landes Nordrhein-Westfalen
Assoziation Euratom-KFA
517 Jülich

(Eingegangen am 3. August 1964)