Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 23, 18–21 (1972)

Eine Diskrepanzabschätzung für stetige Funktionen

Wilhelm Fleischer

Im Jahre 1970 erschien zur Theorie der C-Gleichverteilung eine Arbeit von Hlawka [2], in der als Hilfssatz 6 eine Ungleichung bewiesen wurde, welche sich auch für Diskrepanzabschätzungen auswerten läßt. Bezüglich der hier benützten Definitionen aus der Theorie der Gleichverteilung sei der Bericht von Cigler-Helmberg [1] angeführt, für Sätze über das Wiener-Integral das Buch von Itô-McKean [3].

Gegeben sei der Raum W der reellwertigen und stetigen Funktionen $x(t)$, definiert über dem Intervall $I^+=[0,+\infty)$. Weiters sei W mit dem Wienerschen Maß μ_w ausgestattet. Es gilt dann die oben erwähnte Ungleichung

$$\int_W \left|\int_0^T e^{2\pi i m x(t)}\,dt\right|^{2n} d\mu_w(x) \leqq \frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{T}{2\pi^2 m^2}\right)^n. \tag{1}$$

Dabei ist m eine beliebige ganze Zahl ungleich Null und n eine natürliche Zahl. Mit Hilfe von (1) soll die Diskrepanz

$$D(x,T)=\sup_I \left|\frac{1}{T}\int_0^T c_I(\{x(t)\})\,dt-\lambda(I)\right| \tag{2}$$

abgeschätzt werden, wobei I ein Teilintervall $[\alpha,\beta)$ von $[0,1]$, c_I die charakteristische Funktion von I, $\{x(t)\}=x(t)-[x(t)]$ und λ das Lebesguesche Maß auf $[0,1]$ bedeutet.

Ist nun $\omega(T)$ eine reellwertige Funktion auf I^+ mit

$$\lim_{T\to\infty}\omega(T)=+\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{\omega(T)}\sqrt{\frac{T}{\log T}}$$

gleichmäßig stetig für hinreichend großes T, dann gilt der folgende

Satz. *Für μ_w-fast alle x aus W ist*

$$T D(x,T)=o\left(\sqrt{T\log T}\,\omega(T)\right).$$

Hilfssatz 1. *Es seien $\varphi(T)$ und $\psi(T)$ zwei reellwertige Funktionen auf I^+, so daß $|\varphi(T)|\leqq T$, $\psi(T)$ beschränkt und $\varphi(T)$ sowie $T\psi(T)$ gleichmäßig stetig für hinreichend großes T ist. Dann ist auch die Funktion $\varphi(T)\psi(T)$ gleichmäßig stetig für hinreichend großes T.*

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}&|\varphi(T)\psi(T)-\varphi(T')\psi(T')|\\ &\quad\leqq\left|\frac{\varphi(T)}{T}\right|\left(|T\psi(T)-T'\psi(T')|+|\psi(T')|\,|T-T'|\right)+|\psi(T')|\,|\varphi(T)-\varphi(T')|\end{aligned}$$

ist schon alles gezeigt. Jetzt bilde man den Raum P der reellwertigen und stetigen Funktionen f über dem R^1 mit Periode Eins sowie von beschränkter Schwankung und normiere P durch $\|f\| = \sup_{0 \leqq \xi \leqq 1} |f(\xi)|$. Für festes x aus W ist dann durch

$$L(x, T, f) = \int_0^T f(x(t))\, dt - T \int_0^1 f(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

ein beschränktes lineares Funktional über P definiert.

Hilfssatz 2. *Es ist für jedes x aus W*

$$T D(x, T) \leqq \|L(x, T)\| \leqq \left(\sum_{m \neq 0} \left| \int_0^T e^{2\pi i m x(t)}\, dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Beweis. Es sei f aus P, $\|f\| \leqq 1$ und x aus W. Die Fourierreihe von f konvergiert gleichmäßig gegen f; somit

$$L(x, T, f) = \sum_{m \neq 0} a_m \int_0^T e^{2\pi i m x(t)}\, dt, \qquad \text{da } a_0 = \int_0^1 f(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Dabei seien a_m die Fourierkoeffizienten von f.

Wegen der Schwarzschen und der Besselschen Ungleichung (aus $\|f\| \leqq 1$ folgt $\int_0^1 f^2(\xi)\, d\xi \leqq 1$) kann (5) durch den letzten Ausdruck in (4) nach oben abgeschätzt werden. Da dieser Ausdruck von f unabhängig ist, folgt schon die rechte Seite von (4). Anderseits kann die charakteristische Funktion eines Intervalles $I \subset [0, 1]$ (periodisch fortgesetzt) durch Funktionen f aus P mit $\|f\| \leqq 1$ punktweise approximiert werden. Das ergibt aber unmittelbar auch die linke Seite von (4).

Hilfssatz 3. *Für festes x aus W ist die Funktion $T \to \|L(x, T)\|$ gleichmäßig stetig für $T > 0$.*

Beweis. Aus (3) erhält man für $\|f\| \leqq 1$

$$|L(x, T, f) - L(x, T', f)| \leqq 2|T - T'|$$

und somit

$$\big| \|L(x, T)\| - \|L(x, T')\| \big| \leqq \|L(x, T) - L(x, T')\| \leqq 2\,|T - T'|.$$

Im folgenden Hilfssatz soll nun die Ungleichung (1) ausgenützt werden.

Hilfssatz 4. *Ist $\delta > 0$ beliebig und $m \neq 0$ ganz, so gilt*

$$\mu_w \left(\left\{ x \in W \,\middle|\, \left| \int_0^T e^{2\pi i m x(t)}\, dt \right| > 2\delta \right\} \right) \leqq 2\, e^{-\delta^2 2\pi^2 m^2 / T}. \tag{6}$$

Beweis. Setzt man $y_m(x) = \int_0^T e^{2\pi i m x(t)}\, dt$, so folgt für beliebiges $\varepsilon > 0$ aus (1)

$$\begin{aligned}\int_W \cosh \varepsilon\, |y_m(x)|\, d\mu_w(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n)!} \int_W |y_m(x)|^{2n}\, d\mu_w(x) \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{T}{2\pi^2 m^2} \right)^n = e^{\varepsilon^2 T / 2\pi^2 m^2}\end{aligned}$$

und daher

$$\int_W e^{\varepsilon|y_m(x)|}\, d\mu_w(x) \leqq 2\, e^{\varepsilon^2 T/2\pi^2 m^2}. \tag{7}$$

Mit reellem ρ sei jetzt die Menge

$$A = \{x \in W \,|\, e^{\varepsilon|y_m(x)|} > e^{\rho} \int_W e^{\varepsilon|y_m(x)|}\, d\mu_w(x)\}$$

gebildet. Aus

$$\int_W e^{\varepsilon|y_m|}\, d\mu_w \geqq e^{\rho} \int_W e^{\varepsilon|y_m|}\, d\mu_w \cdot \mu_w(A) \quad \text{folgt} \quad \mu_w(A) \leqq e^{-\rho}.$$

Wegen (7) ist die Menge

$$\left\{x \in W \,\Big|\, |y_m(x)| > \frac{1}{\varepsilon}(\rho + \log 2 + \varepsilon^2 T/2\pi^2 m^2)\right\} \tag{8}$$

in A enthalten und folglich auch deren Maß kleiner oder gleich $e^{-\rho}$. Wird jetzt in (8) $\varepsilon = \delta\, 2\pi^2 m^2/T$ und $\rho = \delta^2\, 2\pi^2 m^2/T - \log 2$ gesetzt, dann hat man schon die Ungleichung (6).

Hilfssatz 5. *Wird $\gamma = 2\pi^2 \delta^2$ gesetzt, dann ist*

$$\mu_w(\{x \in W \,|\, (\sum_{m \neq 0} |y_m(x)|^2)^{\frac{1}{2}} > (8\,\zeta(\tfrac{3}{2})\, T)^{\frac{1}{2}}\, \delta\}) \leqq 4\, e^{-\gamma}\left(1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\gamma^2}\right). \tag{9}$$

Beweis. Ersetzt man in (6) die Größe δ durch $\delta\sqrt{T}/|m|^{\frac{3}{4}}$, so wird die linke Seite von (9) nach oben abgeschätzt durch

$$\sum_{m \neq 0} \mu_w(\{x \in W \,|\, |y_m(x)|^2 > 4\delta^2\, T/|m|\sqrt{|m|}\}) \leqq 4 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\gamma\sqrt{m}}$$

$$\leqq 4\left(e^{-\gamma} + \int_1^{\infty} e^{-\gamma\sqrt{\xi}}\, d\xi\right) = 4\, e^{-\gamma}\left(1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\gamma^2}\right),$$

was aber (9) bedeutet.

Beweis des Satzes. Wegen der Hilfssätze 2 und 5 ist mit $C = \sqrt{8\,\zeta(\frac{3}{2})}$

$$\mu_w(\{x \in W \,|\, \|L(x, T)\| > C\,\delta\sqrt{T}\}) \leqq 4\, e^{-\delta^2}\left(1 + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^4}\right).$$

Es sei nun $\eta > 0$ beliebig und $\delta = \eta\sqrt{\log T}\, \omega(T)$. Somit ist

$$\mu_w\left(\left\{x \in W \,\Bigg|\, \frac{\|L(x, T)\|}{\sqrt{T \log T}\, \omega(T)} > \eta\, C\right\}\right) \leqq 4\left(\frac{1}{T}\right)^{\eta^2 \omega^2(T)} \left(1 + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^4}\right).$$

Wegen $\lim\limits_{T \to \infty} \omega(T) = +\infty$ ist für $T \geqq T(\eta)$ die Funktion $\omega^2(T)$ größer oder gleich $\dfrac{1+\eta}{\eta^2}$ und $\left(1 + \dfrac{1}{\delta^2} + \dfrac{1}{\delta^4}\right) \leqq 2$.

Mit $\Phi(x, T) = \dfrac{\|L(x, T)\|}{\sqrt{T \log T}\, \omega(T)}$ gilt daher für alle $T \geqq T(\eta)$

$$\mu_w(\{x \in W \,|\, \Phi(x, T) > \eta\, C) \leqq 8\, \frac{1}{T^{1+\eta}}.$$

Somit ist

$$\int_W \lambda(\{T \geqq T(\eta) | \Phi(x, T) > \eta\, C\})\, d\mu_w(x)$$

$$= \int_{T(\eta)}^{\infty} \mu_w(\{x \in W | \Phi(x, T) > \eta\, C\})\, dT \leqq 8 \int_{T(\eta)}^{\infty} \frac{1}{T^{1+\eta}}\, dT < +\infty$$

und daher für μ_w-fast alle x aus W

$$\lambda(\{T | \Phi(x, T) > \eta\}) < +\infty. \tag{10}$$

Läßt man η eine Nullfolge durchlaufen, so folgt für μ_w-fast alle x die Beziehung (10) für jedes $\eta > 0$. Beachtet man jetzt die Voraussetzungen über $\omega(T)$ sowie die Hilfssätze 3 und 1, dann folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $\Phi(x, T)$ für hinreichend großes T die Beziehung $\lim_{T \to \infty} \Phi(x, T) = 0$ für μ_w-fast alle x aus W.

Nun liefert aber Hilfssatz 2 schon die Behauptung und alles ist gezeigt.

Literatur

1. Cigler, J., Helmberg, G.: Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. J.-ber. Deutsch. Math. Verein. **64**, 1 – 50 (1961).
2. Hlawka, E.: Ein metrischer Satz in der Theorie der C-Gleichverteilung. Monatsh. Math. **74**, 108 – 118 (1970).
3. Ito, K., McKean, H. P.: Diffusion processes and their sample paths. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

Dr. W. Fleischer
Mathematisches Institut der Universität
A-5020 Salzburg, Porschestraße 8/IV
Österreich

(Eingegangen am 7. September 1970)