Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 17, 327–332 (1971)

Über die C-Gleichverteilung von Maßen

KLAUS SCHMIDT

§ 1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Ist X eine lokalkompakte, additiv geschriebene, abelsche Gruppe, so bezeichnen wir mit $\hat{X}$ die Gruppe der Charaktere in der üblichen Topologie. Erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so gilt das auch für $\hat{X}$.

Für $y \in \hat{X}$ und $x \in X$ werden wir statt $y(x)$ immer (x, y) schreiben. Mit R bzw. Z bezeichnen wir die additive Gruppe der reellen bzw. ganzen Zahlen. T sei die Torusgruppe R/Z.

Die Menge der stetigen, komplexwertigen, beschränkten Funktionen auf X, versehen mit der Maximumsnorm, nennen wir $C(X)$, die Menge der positiven, normierten Radonmaße auf X in der schwachen Topologie $M(X)$. X ist homöomorph zur Menge aller degenerierten Maße p_x in $M(X)$. Ist $\mu \in M(X)$, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mu}$ das durch $\tilde{\mu}(f) = \int f(-x)\, d\mu(x)$ definierte Maß und mit $\hat{\mu}(\cdot)$ die Fouriertransformierte von μ. Für die Faltung zweier Maße μ und ν schreiben wir $\mu * \nu$.

Erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und ist $1/r(\cdot)$ eine Funktion in $C(\hat{X})$ mit $r(0)=1$, $1 \leq r(y) < \infty$, und $\lim_{y \to \infty} \frac{1}{r(y)} = 0$, so wird durch

Definition 1. $d_r(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\hat{X}} \frac{|\hat{\mu}_1(y) - \hat{\mu}_2(y)|}{r(y)}$, eine Metrik in $M(X)$ definiert, die die schwache Topologie induziert, und bezüglich der $M(X)$ vollständig ist (s. [5]).

§ 2. C-Gleichverteilung und Diskrepanz

X und G seien im folgenden immer lokalkompakte abelsche Gruppen, X erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und G sei σ-kompakt. (Viele der folgenden Sätze werden auch unter schwächeren Voraussetzungen richtig sein, ohne daß jedoch darauf hingewiesen werden wird.)

I sei eine nach oben gerichtete Indexmenge.

Es sei weiter ein „Summierungsverfahren" $C = \{\nu_\alpha, \alpha \in I\} \subset M(G)$ gegeben.

$\{\mu_g, g \in G\}$ sei eine meßbare Funktion von G in $M(X)$.

Definition 2. $\sigma_\alpha = \int \mu_g\, d\nu_\alpha(g)$.

Das Integral ist als Lebesgue-Integral in der schwachen Topologie aufzufassen.
Offensichtlich gilt: $\sigma_\alpha \in M(X)$.

In Verallgemeinerung der klassischen Definition (s. [2]) sagen wir:

Definition 3. Besitzt $\{\sigma_\alpha\}$ einen Häufungspunkt μ, so heißt μ C-Häufungsmaß von $\{\mu_g\}$. Gilt sogar $\lim_I \sigma_\alpha = \mu$, so heißt μ C-Verteilungsmaß von $\{\mu_g\}$.

Ist X kompakt und λ das C-Verteilungsmaß von $\{\mu_g\}$, so heißt $\{\mu_g\}$ C-gleichverteilt.

Als vorläufige Antwort auf die Frage nach der Existenz von C-Häufungsmaßen erhalten wir:

Satz 1. *Ist $\{\mu_g\}$ relativ kompakt, so auch $\{\sigma_\alpha\}$.*

Beweis. Aus der gleichmäßigen Straffheit der μ_g folgt die gleichmäßige Straffheit der σ_α und damit ihre relative Kompaktheit.

Definition 4. Unter der Diskrepanz $d_r(\alpha, \mu)$ von $\{\mu_g\}$ in bezug auf μ verstehen wir $d_r(\alpha, \mu) = d_r(\sigma_\alpha, \mu)$.

Satz 2. $\lim_I d_r(\alpha, \mu) = 0$ *gilt genau dann, wenn μ das C-Verteilungsmaß von $\{\mu_g\}$ ist* (s. [5]).

Folgende Sätze lassen sich zum Teil unmittelbar, und zum Teil wie in [5] zeigen:

Satz 3. *Hat $\{\mu_g\}$ das C-Verteilungsmaß μ und ist $\rho \in M(X)$, so hat $\{\rho * \mu_g\}$ das C-Verteilungsmaß $\rho * \mu$, und für die Diskrepanzen gilt:*

$$d_r^1(\alpha, \mu) \geqq d_r^2(\alpha, \rho * \mu).$$

Satz 4. *Hat $\{\mu_g\}$ das C-Verteilungsmaß μ und die Diskrepanz d_r^1, so hat die Folge der zugehörigen Poissonmaße $\exp_H(\mu_g)$ (H ist eine kompakte Untergruppe von X) das C-Verteilungsmaß $\exp_H(\mu)$, und für d_r^2, die Diskrepanz dieser Folge, gilt:*

$$c_1 \cdot d_r^1(\alpha, \mu) \leqq d_r^2(\alpha, \exp_H(\mu)) \leqq d_r^1(\alpha, \mu) \cdot c_2 \qquad \textit{für geeignetes } c_1, c_2 > 0.$$

Satz 5. *Ist für alle $g \in G$ $d_r(\mu_g^{(1)}, \mu_g^{(2)}) < \varepsilon$, und sind d_r^1 bzw. d_r^2 die entsprechenden Diskrepanzen, so ist für jedes $\mu \in M(X)$ auch*

$$|d_r^1(\alpha, \mu) - d_r^2(\alpha, \mu)| < \varepsilon.$$

Satz 6. *Ist $\lim_I v_\alpha(K) = 0$ für alle kompakten Mengen K in G, und sind $\{\mu_g^{(1)}\}$ und $\{\mu_g^{(2)}\}$ zwei Funktionen mit $\lim_{g \to \infty} (\mu_g^{(1)} - \mu_g^{(2)}) = 0$, so folgt für die zugehörigen Diskrepanzen:*

$$\lim_I (d_r^1(\alpha, \mu) - d_r^2(\alpha, \mu)) = 0.$$

Satz 7. *Ist σ ein beliebiges, komplexes Radonmaß auf $\hat{X}$ und $f = \hat{\sigma}$ seine Fouriertransformierte, so erhalten wir für jede Funktion $\{\mu_g\}$ mit der Diskrepanz $d_r(\alpha, \mu)$*

$$|\sigma_\alpha(f) - \mu(f)| \leqq d_r(\alpha, \mu) \cdot \int r(y)\, d\,|\sigma|\,(y).$$

Dieser Satz entspricht dem Satz von Koksma in der klassischen Gleichverteilung.

Korollar. *Erfüllt auch G das zweite Abzählbarkeitsaxiom, und ist $R(\cdot)$ eine Funktion auf $\hat{G}$, die die Bedingungen von Definition* 1 *erfüllt, so können wir, für gegebenes $\theta \in M(G)$, $d_R(\alpha, \theta) = d_R(v_\alpha, \theta)$ bilden.*

Es sei $(\hat{\mu}_g(y) - \hat{\mu}(y))$ für jedes $y \in \hat{X}$ Fouriertransformierte eines komplexen Radonmaßes σ_y auf $\hat{G}$.

Dann ist

$$|\hat{\sigma}_\alpha(y)-\hat{\mu}(y)|\leqq d_R(\alpha,\theta)\cdot\int R(\gamma)\,d\,|\sigma_y|(\gamma),$$

und daher:

$$d_r(\alpha,\mu)\leqq d_R(\alpha,\theta)\cdot\sup_{\hat{X}}\frac{1}{r(y)}\int R(\gamma)\,d\,|\sigma_y|(\gamma).$$

μ ist definiert durch: $\mu=\int\mu_g\,d\theta(g)$.

§ 3. Reguläre Summierungsverfahren

Definition 5. $C=\{v_\alpha\colon\alpha\in I\}$ heißt schwach regulär, wenn für alle $f\in C(G)$ und $g\in G$ $\lim_I|v_\alpha(f)-p_g*v_\alpha(f)|=0$ ist.

Satz 8. *Ist C schwach regulär, so gilt:*

1. *Für jede kompakte Menge K in G ist $\lim v_\alpha(K)=0$.*

2. *Für jede auf G definierte stetige, fastperiodische Funktion $h(\cdot)$ ist $\lim\int h(g)\,dv_\alpha(g)=M(h)$ ($M=$Mittelwert).*

Beweis. 1. Sei $f\in C(G)$ mit $0\leqq f\leqq 1$, $f=1$ auf K und $f=0$ außerhalb einer offenen Menge L, die K enthält, und deren Abschluß kompakt ist.

Sei nun $\limsup v_\alpha(K)=\delta>0$. Wir wählen n mit $\frac{1}{n}<\frac{\delta}{2}$ und $g_1\ldots g_n$ mit $\{g_i+L\}\cap\{g_j+L\}=\emptyset$ für $i\neq j$, weiters ein α_0 mit $v_{\alpha_0}\big(f(g+g_i)\big)>\frac{\delta}{2}$ für $i=1\ldots n$.

Dann ist aber offensichtlich $v_{\alpha_0}(G)>1$, was nicht möglich ist.

2. Betrachtet man $\hat{v}_\alpha(\gamma)$, $\gamma\in\hat{G}$, so gilt: $\lim\hat{v}_\alpha(\gamma)=0$ für $\gamma\neq 0$.

Auf der Bohrkompaktifizierung von G streben die Maße daher schwach gegen das Haarmaß.

Korollar. *Ist X kompakt, C schwach regulär und $\{\mu_g\}$ stetig und fastperiodisch, so existiert ein C-Verteilungsmaß.*

Definition 6. $\{v_\alpha,\alpha\in I\}$ heißt asymptotisch gleichverteilt, wenn für alle $g\in G$ $\lim\|v_\alpha-p_g*v_\alpha\|=0$ ist (s. [3]).

Wir nennen C dann auch stark regulär. ($\|\cdot\|$ bedeutet die übliche Norm auf den Radonmaßen.)

Satz 9. *Ist $C=\{v_\alpha,\alpha\in I\}$ stark regulär, so ist sowohl C, als auch $C'=\{v_\alpha*\tilde{v}_\alpha,\alpha\in I\}$ schwach regulär.*

Beweis. Es soll nur die schwache Regularität von C' gezeigt werden:

$$\begin{aligned}&\left|\iint f(g_1-g_2+g)\,dv_\alpha(g_1)\,dv_\alpha(g_2)-\iint f(g_1-g_2)\,dv_\alpha(g_1)\,dv_\alpha(g_2)\right|\\&\quad=\left|\int\left(\int f(g_1-g_2)\,dv_\alpha(g_1)-\int f(g_1-g_2)\,dv_\alpha*p_g(g_1)\right)dv_\alpha(g_2)\right|\qquad\big(f\in C(G)\big).\end{aligned}$$

Der in Klammern stehende Integrand ist eine stetige, beschränkte Funktion in g_2, und daraus folgt die Behauptung.

Beispiele. 1. Ist $A=(a_{nk})_{n=1,2,\ldots,k=1,2,\ldots}$ eine positive, stark reguläre Toeplitzmatrix, so ist sowohl A als auch $B=(b_{nk})$ mit $b_{nk}=\frac{a_{n|k|}}{2}$ stark regulär für $X=T$, $I=N$, $G=Z$.

2. Auf jeder lokalkompakten, σ-kompakten, kommutativen Gruppe G gibt es eine Folge von offenen Mengen H_n mit kompaktem Abschluß, für die $\left\{\nu_n: \nu_n(f)=\frac{1}{\lambda(H_n)}\int_{H_n} f(g)\,d\lambda(g)\right\}$ stark regulär ist (s. [1], 18.13). Für $G=R$ kann man etwa $H_n=(-n,n)$ nehmen.

3. Ist G kompakt, so ist eine Folge stark (bzw. schwach) regulär, wenn sie in der starken (bzw. schwachen) Topologie gegen λ_G strebt.

§ 4. Der Hauptsatz der Gleichverteilung für kompakte Gruppen

X sei kompakt und es seien weiters noch erfüllt:

A. $\{\mu_g\}$ sei stetig auf G

$C_1=\{\nu_\alpha, \alpha\in I\}$ sei schwach regulär

$C_2=\{\rho_\beta, \beta\in J\}$ habe die Eigenschaft, daß $\lim \rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta(\{0\})=0$ ist

beziehungsweise

B. $\{\mu_g\}$ sei meßbar auf G

$C_1=\{\nu_\alpha, \alpha\in I\}$ sei stark regulär

$C_2=\{\rho_\beta, \beta\in J\}$ habe die Eigenschaft, daß $\lim \rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta(\{0\})=0$ ist.

Ist A oder B erfüllt, so gilt:

Lemma 1.

$$\lim_I \int d\nu_\alpha(g)\int \hat{\mu}_{g-h}(y)\,d\rho_\beta(h)=\lim_I \iint \hat{\mu}_{g-h}(y)\,d\nu_\alpha(g)\,d\rho_\beta(h)=\lim_I \int \hat{\mu}_g(y)\,d\nu_\alpha(g),$$

falls einer der Limiten existiert.

Lemma 2.

$$\begin{aligned}\Big|\int d\nu_\alpha(g)\int \hat{\mu}_{g-h}(y)\,d\rho_\beta(h)\Big|^2 &\leq \int d\nu_\alpha(g)\iint \hat{\mu}_{g-h}(y)\,\overline{\hat{\mu}_{g-l}(y)}\,d\rho_\beta(h)\,d\rho_\beta(l)\\ &\leq \rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta(\{0\})+\Big|\iint_{(h,l):\,h\neq l}\Big\{\int \hat{\mu}_{g-h}(y)\,\overline{\hat{\mu}_{g-l}(y)}\,d\nu_\alpha(g)\\ &\quad -\int \hat{\mu}_{g-h+l}(y)\,\overline{\hat{\mu}_g(y)}\,d\nu_\alpha(g)\Big\}\,d\rho_\beta(h)\,d\rho_\beta(l)\Big|\\ &\quad +\Big|\iint_{(h,l):\,h\neq l}\int \hat{\mu}_{g-h+l}(y)\,\overline{\hat{\mu}_g(y)}\,d\nu_\alpha(g)-\hat{\tau}_{l-h}(y)\,d\rho_\beta(h)\,d\rho_\beta(l)\Big|\\ &\quad +\Big|\iint_{(h,l):\,h\neq l}\hat{\tau}_{l-h}(y)\,d\rho_\beta(h)\,d\rho_\beta(l)\Big|.\end{aligned}$$

Satz 10 *(Hauptsatz der Gleichverteilung für stetige Funktionen). $\{\mu_g\}$ sei stetig. Für jedes $h\neq 0$ in G habe $\{\mu_{g+h} * \tilde{\mu}_g\}$ das C_1-Verteilungsmaß τ_h, und C_1 sei schwach regulär. Gibt es ein $C_2=\{\rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta: \beta\in J\}$, mit $\lim \rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta\{0\}=0$, bezüglich dessen $\{\tau_h\}$ gleichverteilt ist, so ist $\{\mu_g\}$ C_1-gleichverteilt.*

Beweis. Nach Lemma 1 und 2 gilt:

$$\Big|\lim_I \int \hat{\mu}_g(y)\,d\nu_\alpha(g)\Big|^2 \leq 2\rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta\{0\}+\Big|\int \hat{\tau}_h(y)\,d\rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta(h)\Big|$$

(τ_0 wird irgendwie ergänzt). Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun den nichtstetigen Fall betrachten und gleichzeitig eine quantitative Abschätzung erhalten:

Lemma 3. *Unter den Voraussetzungen* B *gilt:*

a) $\left|\int d\nu_\alpha(g) \int \hat{\mu}_{g-h}(y)\, d\rho_\beta(h) - \int \hat{\mu}_g(y)\, d\nu_\alpha(g)\right| \leqq \int \|\nu_\alpha - \nu_\alpha * p_h\|\, d\rho_\beta(h) = D_\alpha(\beta)$ *und* $\lim_I D_\alpha(\beta) = 0$.

b) $\left| \iint_{(h,\,l):\, h \neq l} \int \{\hat{\mu}_{g-h}(y)\, \overline{\hat{\mu}_{g-l}(y)} - \hat{\mu}_{g-h+l}(y)\, \overline{\hat{\mu}_g(y)}\}\, d\nu_\alpha(g)\, d\rho_\beta(h)\, d\rho_\beta(l)\right|$

$$\leqq \int \|\nu_\alpha - \nu_\alpha * p_h\|\, d\rho_\beta(h) + \rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta\{0\}.$$

Satz 11. *C_1 sei stark regulär und $\{\mu_g\}$ sei meßbar. Für $C_2 = \{\rho_\beta : \beta \in J\}$ gelte wiederum:* $\lim \rho_\beta * \rho_\beta\{0\} = 0$. *Dann gilt:* $(C_1 = \{\nu_\alpha : \alpha \in I\})$

$$(d_r(\alpha))^2 \leqq 2 D_\alpha(\beta) + 2\rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta\{0\} + \int_{h \neq 0} d_h(\alpha, \tau_h)\, d\rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta(h) + d_r(\tau, \beta).$$

Dabei ist

$$d_r(\tau, \beta) = d_r\left(\iint \tau_h\, d\rho_\beta * \tilde{\rho}_\beta(h), \lambda\right) \qquad (\tau_0 \textit{ wird ergänzt})$$

und

$$d_h(\alpha, \tau_h) = d_r\left(\int \mu_{g+h} * \tilde{\mu}_g\, d\nu_\alpha(g), \tau_h\right).$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma 1, 2 und 3, wenn man berücksichtigt, daß

$$d_r\left(\int \mu_g\, d\nu_\alpha(g), \lambda\right)^2 \leqq d_r\left(\int \mu_g\, d\nu_\alpha(g) * \int \tilde{\mu}_g\, d\nu_\alpha(g), \lambda\right)$$

ist.

Dieser Satz stellt eine quantitative Fassung des Hauptsatzes der Gleichverteilung dar. Insbesondere gilt also:

Korollar. *Besitzt $\{\mu_{g+h} * \mu_g\}$ unter den Voraussetzungen* B *für jedes $h \neq 0$ ein C_1-Verteilungsmaß τ_h, und ist $\{\tau_h\}$ C_2-gleichverteilt, so ist auch $\{\mu_g\}$ C_1-gleichverteilt.*

§ 5. Der Hauptsatz der Gleichverteilung für lokalkompakte Gruppen

G sei nicht mehr kompakt vorausgesetzt. Es soll untersucht werden, was passiert, wenn man nicht mehr annimmt, daß $\{\tau_h\}$ gleichverteilt ist.

Satz 12. *Es seien die Voraussetzungen* A *oder* B *erfüllt. Hat, für ein fest gewähltes $\mu \in M(X)$, die Funktion $(\tilde{\mu}_g - \tilde{\mu}) * (\mu_{g+h} - \mu)$ das Verteilungsmaß τ_h (τ_h kann nun auch signiert sein), und ist $\lim_I \int \hat{\tau}_h(y)\, d\rho_\beta(h) = 0$ für alle $y \in \hat{X}$, so ist μ das C_1-Verteilungsmaß von $\{\mu_g\}$.*

Bewiesen wird dieser Satz genauso wie im kompakten Fall. Daß tatsächlich schwache Konvergenz vorliegt, folgt aus einem bekannten Satz über die kompakt-gleichmäßige Konvergenz stetiger positiv definiter Funktionen.

Wir wollen nun noch feststellen, welche Maße μ bei einer Anwendung von Satz 12 in Betracht kommen:

Sei τ_h das C_1-Verteilungsmaß von $\{\mu_{g+h} * \tilde{\mu}_g\}$. Das C_2-Verteilungsmaß von $\{\tau_h\}$ bezeichnen wir mit μ_0, und wir wollen annehmen, daß $\{\mu_g\}$ das C_1-Verteilungsmaß μ hat.

Mit einer kleinen Abänderung von Lemma 2 erhalten wir:

$$\left|\int \hat{\mu}_g(y) - \hat{\mu}(y)\, d\nu_\alpha(g)\right|^2 \leqq o(1) + \left|\widehat{\mu * \tilde{\mu}}(y) - \hat{\mu}_0(y)\right|.$$

Das heißt also, daß man sich auf Maße beschränken kann, für die $\mu * \tilde{\mu} = \mu_0$ ist.

§ 6. Der Fall $G=R^n$

1. Sei $G=R$ und X kompakt.

Wir setzen $G_1=R\times R$. Auf G_1 sei eine meßbare Funktion $\mu_{g_1 g_2}$ definiert mit:

a) $\mu_{g_1 g_2}\in M(X)$

b) $\mu_{gh} * \mu_{hl}=\mu_{gl}$ für $g\leqq h\leqq l$

c) $\mu_{gg}=p_0$

d) $\mu_{gh}=\mu_{hg}$.

Wir setzen: $\mu_g=\mu_{0g}$.

Satz 13. *Ist C ein stark reguläres Summierungsverfahren, bezüglich dessen $\{\mu_{g,g+h}\}$ für jedes $h\neq 0$ ein Verteilungsmaß τ_h hat, und ist $\{\tau_h\}$ C-gleichverteilt, so ist auch $\{\mu_g\}$ C-gleichverteilt.*

Der *Beweis* ist nicht wesentlich verschieden gegenüber dem im diskreten Fall, der in [6] gezeigt wird.

Zwei weitere Sätze, die sich ohne Schwierigkeiten übertragen lassen, finden sich in [4]. Sie lauten, gleich für Maßfunktionen formuliert, folgendermaßen:

Sei $G=R^n$, $I=N$ und $v_m(f)=(2m)^{-n}\int_{-m}^{m}\dots\int_{-m}^{m} f\,d\lambda_G$. Wir setzen $\rho_k(f)=(2k+1)^n \sum_{k'_1\dots k'_n\leqq k} f(k_1,\dots,k_n)$ $(k'_i=\max(|k_i|,1))$ und bezeichnen: $C=\{v_m\}$ und $C'=\{\rho_k\}$.

Dann gilt:

Satz 14. *Ist für jedes $(t_1,\dots,t_n)$ mit $t_i>0$, $i=1\dots n$, die Folge $(\mu((m_1,\dots,m_n)+(t_1,\dots,t_n)))$ gleichverteilt bez. C', so ist $\{\mu_g\}$ C-gleichverteilt.*

Dasselbe gilt, wenn jede der Folgen $(\mu(m_1 t_1,\dots,m_n t_n))$ C'-gleichverteilt ist.

Literatur

1. Hewitt, E., Ross, K. A.: Abstract harmonic analysis I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
2. Hlawka, E.: Über C-Gleichverteilung. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **49**, 311–326 (1960).
3. Kerstan, J., Matthes, K.: Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen Gruppen I. Math. Nachr. **37**, 267–312 (1968).
4. Ryll-Nardzewski, C.: Sur les suites et les fonctions également réparties. Studia math. **12**, 143–144 (1951).
5. Schmidt, K.: Eine Diskrepanz von Maßfolgen auf lokalkompakten Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **17**, 48–52 (1971).
6. Sigmund, K.: Über Verteilungsmaße von Maßfolgen auf kompakten Gruppen. Compositio Math. **21**, 299–311 (1969).

Dr. Klaus Schmidt
Bedford College
University of London
Regents Park
London NW 1, England

(Eingegangen am 21. Juli 1969)