Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
43, 245–251 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Mesures marginales et théorème de Ford-Fulkerson

G. Hansel et J.P. Troallic

Dépt. de Mathématiques, Faculté des Sciences et des Techniques
Université de Rouen, F-76130 Mont Saint Aignan

Introduction

Dans un article important [13], Strassen a étudié plusieurs problèmes relatifs à l'existence sur un espace-produit d'une mesure ayant des lois marginales données. Les conditions supplémentaires imposées à une telle mesure sont essentiellement de deux types: a) se désintégrer suivant une probabilité de transition satisfaisant à certaines propriétés; b) être majorée par une mesure donnée. Strassen a obtenu des résultats dans chacune de ces deux directions. Les théorèmes de «première espèce» qu'il a obtenus ont fait l'objet de généralisations variées [2, 6, 7, 14, 15]. Par contre, les théorèmes de «deuxième espèce» n'ont été que peu étudiés (cf. cependant Dudley [3] et Kellerer [8]). L'objet du présent travail est d'obtenir des généralisations ou d'autres variantes des théorèmes de «deuxième espèce». Les méthodes de démonstration très différentes de celles de Strassen et de Kellerer sont à rapprocher de celles de Dudley. Elles reposent sur des techniques de théorie des graphes, en particulier sur les théorèmes de Ford-Fulkerson et de Hoffmann (on notera que le théorème de Hahn-Banach n'est pas utilisé). La simplification des démonstrations obtenue ainsi est substantielle.

Notations-Définitions

On appelle *espace finiment mesuré* un triplet $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ où X est un ensemble, $\mathfrak{A}$ une algèbre de parties de X, $\mu: \mathfrak{A} \to \bar{R}_+$ une mesure finiment additive (en abrégé m.f.a.) sur $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ est une σ-algèbre et si μ est σ-additive $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

Soient $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ des espaces finiment mesurés ou mesurés. On note $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ l'algèbre de parties de $X \times Y$ engendrée par les rectangles $A \times B$ $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$; on note $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ la σ-algèbre engendrée par ces rectangles.

Pour toute mesure finiment additive m sur $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ (ou pour toute mesure m sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$), on note m_X et m_Y les projections de m sur $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ($m_X: \mathfrak{A} \to \bar{R}_+$ est définie par $m_X(A) = m(A \times Y)$).

Soit p une mesure finiment additive sur $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ (resp. une mesure sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$); une mesure finiment additive m sur $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ (resp. une mesure m sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$) est dite (μ, ν, p)-*admissible* (respect. (μ, ν, p)-σ-*admissible*) si $m \leqq p$, $m_X \leqq \mu$, $m_Y \leqq \nu$.

0044-3719/78/0043/0245/$01.40

Enfin l'on pose

$$c=c(\mu, \nu, p)=\inf\{\mu(\complement A)+p(A\times B)+\nu(\complement B)/A\in\mathfrak{A}, B\in\mathfrak{B}\}.$$

Théorème 1. *Soient* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *et* $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ *deux espaces finiment mesurés et soit* p: $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}\to\bar{R}_+$ *une mesure finiment additive.*

1° *Toute mesure finiment additive* (μ, ν, p)*-admissible a une masse au plus égale à* c.

2° *Il existe une mesure finiment additive* (μ, ν, p)*-admissible de masse* c.

Démonstration. a) Soit m une m.f.a. (μ, ν, p)-admissible, $A\in\mathfrak{A}, B\in\mathfrak{B}$.

$$m(X\times Y)\leqq m_X(\complement A)+m(A\times B)+m_Y(\complement B)\leqq\mu(\complement A)+p(A\times B)+\nu(\complement B)$$

et donc $m(X\times Y)\leqq c$.

b) Supposons X et Y finis, $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{P}(Y)$.

L'existence d'une m.f.a. (μ, ν, p)-admissible de masse c est alors un corollaire du théorème de Ford-Fulkerson (1). Nous allons en donner une démonstration directe.

Tout élément de $\bar{R}_+$ étant limite d'une suite de rationnels, on peut supposer que μ, ν, p, sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit L l'ensemble des m.f.a. (μ, ν, p)-admissibles à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $m\in L$ tel que $m(X\times Y)$ soit maximum. On définit f:

$$f\colon \mathfrak{P}(X)\to\mathfrak{P}(Y) \quad \text{et} \quad g\colon \mathfrak{P}(Y)\to\mathfrak{P}(X)$$

par

$$f(A)=\{y\in Y/\exists\, x\in A\colon\ m(x, y)<p(x, y)\}$$

$$g(B)=\{x\in X/\exists\in B\colon\ m(x,)>0\}.$$

On définit alors par récurrence une suite $(A_n, B_n)_{n\in N}$ de $\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(Y)$ de la façon suivante:

$$A_0=\{x\in X/m_X(x)<\mu(x)\}, \qquad B_0=f(A_0);$$

A_k et B_k étant définis pour $k=0, 1, \dots, n$, on pose

$$A_{n+1}=g(B_n)\setminus\bigcup_{k=0}^{n}A_k \quad \text{et} \quad B_{n+1}=f(A_{n+1})\setminus\bigcup_{k=0}^{n}B_k.$$

Soit $A=\bigcup_{n\in N}A_n$ et soit $B=\bigcup_{n\in N}B_n$. Par construction de A et B on a les relations $m(A\times\complement B)=p(A\times\complement B)$, $m(\complement A\times B)=0$, $m_X(\complement A)=\mu(\complement A)$. Enfin la maximalité de $m(X\times Y)$ implique que $m_Y(B)=\nu(B)$ (si $m_Y(y)<\nu(y)$ avec $y\in B$, on peut trouver une suite finie $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$, avec $x_i\in A_i$, $y_i\in B_i$ et $y_n=y$. On définit alors une mesure m' par $m'(x_i, y_i)=m(x_i, y_i)+1$ pour $i=0, 1, \dots, n$ et $m'(x_{i+1}, y_i)=m(x_{i+1}, y_i)-1$ pour $i=0, 1, \dots, n-1$ et $m'(x, y)=m(x, y)$ par ailleurs. m' est (μ, ν, p)-admissible et de masse strictement supérieure à celle de m).

On a alors

$$m(X\times Y)=m(A\times\complement B)+m(X\times B)+m(\complement A\times Y)=p(A\times\complement B)+\nu(B)+\mu(\complement A)\geqq c.$$

c) Cas général.

Soit $\mathfrak{H}$ l'ensemble des mesures finiment additives $m\colon \mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}\to\bar{R}_+$. $\mathfrak{H}$ muni de la topologie de la convergence simple est un espace compact. Soit $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$) une sous-algèbre finie de $\mathfrak{A}$ (resp. de $\mathfrak{B}$). Il résulte de b) appliqué aux espaces d'atomes de $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{E}\perp\mathfrak{F}$, que l'ensemble $\mathfrak{H}_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}}$ des mesures finiment additives sur $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ dont la restriction à $\mathfrak{E}\perp\mathfrak{F}$ est $(\mu/\mathfrak{E}, \nu/\mathfrak{F}, p/\mathfrak{E}\perp\mathfrak{F})$-admissible et dont la masse est au moins c est non vide. De plus $H_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}}$ est une partie fermée de $\mathfrak{H}$. Par raisonnement de compacité $H=\bigcap_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}} H_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}}\neq\emptyset$. Tout élément de H est une m.f.a. (μ,ν,p)-admissible de masse c.

Théorème 2. *Soient $(X,\mathfrak{A},\mu)$ et $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ deux espaces mesurés et p une mesure sur* $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$.

1° *Toute mesure (μ,ν,p)-σ-admissible a une masse au plus égale à c.*

2° *Il existe une mesure (μ,ν,p)-σ-admissible de masse c dans chacun des cas suivants*

C_1) *p est une mesure finie*

C_2) *ν est une mesure finie et p_Y est une mesure σ-finie*

C_3) *X et Y sont des espaces polonais, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ leurs tribus boréliennes, μ et ν des mesures finies et p est extérieurement régulière.*

Démonstration. Le 1° est déjà démontré dans le théorème 1. Montrons le 2°.

D'après le théorème 1 il existe une m.f.a. $m\colon \mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}\to\bar{R}_+$ de masse c et qui est (μ,ν,p)-admissible.

Cas C_1. m étant majorée par une mesure finie est σ-additive sur $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ et se prolonge en une mesure $\tilde{m}\colon \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to R_+$. Le théorème des classes monotones montre que $\tilde{m}\leqq p$ sur $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$.

Cas C_2. a) Montrons d'abord que m est σ-additive sur $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$.

Soit $(B_n)_{n\in N}$ une suite d'élèments deux à deux disjoints de $\mathfrak{B}$ tels que $\bigcup_{n\in N} B_n=Y$ et $p(X\times B_n)<+\infty$. Soit $(C_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ tels que $C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\in\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$.

On a

$$\begin{aligned} m(C)&=\sum_n m(C\cap(X\times B_n))=\sum_n\sum_p m(C_p\cap(X\times B_n))\\ &=\sum_p\sum_n m(C_p\cap(X\times B_n))=\sum_p m(C_p). \end{aligned}$$

(la première égalité résulte de ce que $m_Y\leqq\nu$ et ν est finie, la deuxième égalité résulte de la définition des B_n).

b) m se prolonge en une mesure $\tilde{m}\colon \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to R_+$ et le théorème des classes monotones montre que $\tilde{m}\leqq p$.

Cas C_3. a) Montrons que m est σ-additive sur $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$.

Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des réunions finies de rectangles $L\times M$ avec L compact de X et M compact de Y. $\mathfrak{K}$ est une sous-classe compacte de $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$. Pour montrer que m est σ-additive, il suffit de montrer que pour tout $C\in\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ on a $m(C)=\sup\{m(K)/K\subset C, K\in\mathfrak{K}\}$ (cf. proposition 1-6.2 p. 27 de [12]).

Pour tout $A \in \mathfrak{A}$ (resp. $B \in \mathfrak{B}$), $m_A: \mathfrak{B} \to R_+$ (resp. $m_B: \mathfrak{A} \to R_+$) définie par $m_A(B) = m(A \times B)$ (resp. $m_B(A) = m(A \times B)$) est une mesure finiment additive majorée par une mesure finie. On en déduit que m_A et m_B sont des mesures finies; X et Y étant polonais m_A et m_B sont tendues.

Soit alors $C \in \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ et soit $\varepsilon > 0$. On a $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$ avec $A_i \in \mathfrak{A}$ et $B_i \in \mathfrak{B}$ les $A_i \times B_i$ étant de plus deux à deux disjoints. m_{A_i} étant tendue, il existe un compact $T_i \subset B_i$ tel que $m(A_i \times T_i) \geqq m(A_i \times B_i) - \varepsilon/2n$. m_{T_i} étant tendue, il existe un compact $S_i \subset A_i$ tel que $m(S_i \times T_i) \geqq m(A_i \times T_i) - \varepsilon/2n$.

Soit $K = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \times T_i$. On a $K \in \mathfrak{K}$, $K \subset C$ et $m(K) \geqq m(C) - \varepsilon$.

b) Soit $\tilde{m}$ un prolongement de m à $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. On vérifie immédiatement que pour tout ouvert 0 de $X \times Y$ on a $\tilde{m}(0) \leqq p(0)$. La régularité extérieure de p implique alors que $\tilde{m} \leqq p$.

Corollaire 1 (cf. Strassen [13]). *Soient $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ deux espaces de probabilité. Soit p une mesure sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ayant au moins une loi marginale σ-finie. Pour qu'il existe sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ une probabilité m majorée par p et ayant μ et ν pour lois marginales il faut et il suffit que pourtout $A \in \mathfrak{A}$ et tout $B \in \mathfrak{B}$, on ait $p(A \times B) + 1 \geqq \mu(A) + \nu(B)$.*

Démonstration. La condition nécessaire est simple à vérifier. Montrons la condition suffisante. D'après le théorème 2, il existe sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ une mesure m de masse $c(\mu, \nu, p)$ et (μ, ν, p)-σ-admissible. Il résulte des hypothèses que $c(\mu, \nu, p) = 1$. Donc m se projette nécessairement sur μ et ν.

Remarque. La méthode de démonstration employée par Strassen exigeait que l'un des espaces X ou Y soit polonais.

Corollaire 2 (cf. Strassen [13]). *Soient $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ deux espaces de probabilité, X et Y étant des espaces polonais de tribus boréliennes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Soit F un fermé de $X \times Y$ et $\varepsilon \geqq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ une probabilité m ayant μ et ν pour lois marginales et telle que $m(F) \geqq 1 - \varepsilon$.*

(2) $(A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}, A \times B \cap F = \emptyset) \Rightarrow (\mu(A) + \nu(B) \leqq 1 + \varepsilon)$.

(3) *pour tout fermé E de Y on a $\nu(E) \leqq \mu(p_X(X \times E \cap F)) + \varepsilon$.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) est simple à vérifier. Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1).

Soit p la mesure sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ définie par $p(C) = +\infty$ si $C \cap F \neq \emptyset$, $p(C) = 0$ si $C \cap F = \emptyset$ p est une mesure extérieurement régulière. D'après le théorème 2, il existe sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ une mesure $\tilde{m}$ de masse $c(\mu, \nu, p)$ et (μ, ν, p)-σ-admissible. Si $\tilde{m}(X \times Y) = 1$, $\tilde{m}$ est solution. Supposons que $\tilde{m}(X \times Y) < 1$. L'hypothèse implique que pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $\mu(\complement A) + p(A \times B) + \nu(\complement B) \geqq 1 - \varepsilon$ et donc que $\tilde{m}(X \times Y) \geqq 1 - \varepsilon$. Il en résulte que $m = \tilde{m} + \dfrac{1}{1 - \tilde{m}(X \times Y)} (\mu - \tilde{m}_X) \times (\nu - \tilde{m}_Y)$ est solution.

Corollaire 3 (cf. Furstenberg [4, 5]). *Considérons le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

dans lequel X, Y et Z sont des espaces polonais, f et g des surjections continues. Soit μ une probabilité sur X et ν une probabilité sur Y ayant la même loi image λ par f et g. Il existe alors sur $X \times Y$ une probabilité m portée par $F = \{(x, y) \in X \times Y / f(x) = g(y)\}$ et ayant pour lois marginales μ et ν.

Démonstration. F est un fermé de $X \times Y$. Soient A un compact de X et B un compact de Y tels que $\mu(A) + \nu(B) > 1$. On a $\lambda[f(A)] + \lambda[g(B)] > 1$ et donc $A \times B \cap F \neq \emptyset$. L'existence de m résulte donc du corollaire 2.

Remarque. Le corollaire 3 est établi dans (4) dans le cas où X et Y sont compacts à l'aide du théorème de Hahn-Banach et dans (5) au moyen du théorème de désintégration.

Théorème 3. *Soit $(X, \mathfrak{A}, \mu_2)$ et $(Y, \mathfrak{B}, \nu_2)$ deux espaces finiment mesurés. Soit μ_1 et ν_1 des mesures finiment additives sur $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ respectivement telles que $\mu_1 \leqq \mu_2$ et $\nu_1 \leqq \nu_2$; soit p: $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B} \to \bar{R}_+$ une mesure finiment additive. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe une mesure finiment additive m sur $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ vérifiant les relations $m \leqq p$, $\mu_1 \leqq m_X \leqq \mu_2$, $\nu_1 \leqq m_Y \leqq \nu_2$.*

(2) $\forall A \in \mathfrak{A}$, $\forall B \in \mathfrak{B}$: *$p(A \times B) + \mu_2(\complement A) \geqq \nu_1(B)$ et $p(A \times B) + \nu_2(\complement B) \geqq \mu_1(A)$.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) est aisé à vérifier. Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1).

a) Supposons que X et Y soient finis, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(Y)$.

L'existence d'une m.f.a. satisfaisant aux conditions voulues est alors un corollaire du théorème de Hoffmann (1). Nous allons en donner une démonstration directe. Tout élément de $\bar{R}_+$ étant limite d'une suite de rationnels, on peut supposer que μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 et p sont à valeurs dans N.

Soit L l'ensemble des m.f.a. sur $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, (μ_2, ν_2, p)-admissibles. Pour tout $l \in L$ on définit $D(l)$ par

$$D(l) = \sum_{l_X(x) < \mu_1(x)} [\mu_1(x) - l_X(x)] + \sum_{l_Y(y) < \nu_1(y)} [\nu_1(y) - l_Y(y)].$$

Soit $m \in L$ tel que $D(m) = \inf_{l \in L} D(l)$. Il suffit de montrer que $D(m) = 0$. Supposons que $D(m) > 0$. Soit $a \in X$ tel que $m_X(a) < \mu_1(a)$ (par exemple). On définit f: $\mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ et g: $\mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ comme dans la démonstration du théorème 1. On définit alors par récurrence une suite $(A_n, B_n)_{n \in N}$ de $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(Y)$ de la façon suivante

$$A_0 = \{x \in X / m_X(x) < \mu_1(x)\}, \qquad B_0 = f(A_0);$$

A_k et B_k étant définis pour $k = 0, \ldots, n$, on pose

$$A_{n+1} = g(B_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} A_k \quad \text{et} \quad B_{n+1} = f(A_{n+1}) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_k.$$

Soit $A=\bigcup_n A_n$ et $B=\bigcup_n B_n$. On a par construction de A et B

$$m(A\times \complement B)=p(A\times \complement B), \tag{1}$$

$$m(\complement A\times B)=0, \tag{2}$$

$$m_X(\complement A)\geqq \mu_1(\complement A). \tag{3}$$

D'après l'hypothèse on a $m(A\times \complement B)+\nu_2(B)\geqq \mu_1(A)$. (4)

Il résulte de (2) et (4) que $m(A\times Y)+\nu_2(B)\geqq \mu_1(A)+m(X\times B)$. (5)

Comme $m(A_0)<\mu_1(A_0)$, ou bien il existe $x\in A\setminus A_0$ tel que $m_X(x)>\mu_1(x)$, ou bien il existe $y\in B$ tel que $m_Y(y)<\nu_2(y)$. Dans un cas comme dans l'autre, un raisonnement semblable à celui fait dans la démonstration du théorème 1 montre qu'il existe alors $l\in L$ tel que $D(l)<D(m)$ ce qui est absurde.

b) Cas général. Un argument de compacité semblable à celui donné dans la démonstration du théorème 1 permet de passer aisément du cas fini au cas général.

Théorème 4. *Soient μ_1 et μ_2 des mesures sur un espace mesurable $(X,\mathfrak{A})$ telles que $\mu_1\leqq\mu_2$ ν_1 et ν_2 des mesures sur un espace mesurable $(Y,\mathfrak{B})$ telles que $\nu_1\leqq\nu_2$ et soit p une mesure sur $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Pour qu'il existe sur $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ une mesure m telle que $m\leqq p$, $\mu_1\leqq m_X\leqq\mu_2$, et $\nu_1\leqq m_Y\leqq\nu_2$ il est nécessaire que l'on ait $\forall A\in\mathfrak{A}$, $\forall B\in\mathfrak{B}$: $p(A\times B)+\mu_2(\complement A)\geqq\nu_1(B)$ et $p(A\times B)+\nu_2(\complement B)\geqq\mu_1(A)$. Ces inégalités sont suffisantes dans chacun des cas suivants.*

(D_1) *Les lois marginales de p sont σ-finies*

(D_2) *ν_2 est une mesure finie et p_Y une mesure σ-finie*

(D_3) *X et Y sont des espaces polonais de tribus boréliennes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, μ_2 et ν_2 sont des mesures finies et p une mesure extérieurement régulière.*

Démonstration. La condition nécessaire est aisée à vérifier. Montrons la condition suffisante. D'après le théorème 3, il existe $t\colon \mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}\to\bar{R}_+$, mesure finiment additive qui vérifie $t\leqq p/\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$, $\mu_1\leqq t_X\leqq\mu_2$, $\nu_1\leqq t_Y\leqq\nu_2$.

a) Supposons que (D_1) soit vérifié.

p_X étant σ-finie, p l'est aussi et il existe une suite $(C_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_n C_n=X\times Y$ et pour tout $n\in N$ $p(C_n)<+\infty$. Pour tout $C\in\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ posons $\tilde{t}(C)=\sum_{n\in N} t(C\cap C_n)$.

$\tilde{t}$ est une mesure σ-additive sur $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ qui se prolonge en une mesure m sur $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. On a $\tilde{t}\leqq t\leqq p/\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$.

p étant σ-finie sur $\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ on a $m\leqq p$. Remarquons d'autre part que si $C\in\mathfrak{A}\perp\mathfrak{B}$ avec $p(C)<+\infty$ on a $m(C)=t(C)$ $(m(C)=\tilde{t}(C)=\sum_n t(C\cap C_n)=t(C))$.

Soit $A\in\mathfrak{A}$ et soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{A}$ deux à deux disjoints tels que $X=\bigcup_n A_n$ et $p(A_n\cap Y)<+\infty$, $n\in N$. On a $m_X(A)=\sum_{n\in N} m_X(A\cap A_n)$.

Or pour tout $n\in N$, $\mu_1(A\cap A_n)\leqq m_X(A\cap A_n)\leqq\mu_2(A\cap A_n)$. Par conséquent $\mu_1\leqq m_X\leqq\mu_2$. On montre de même que $\nu_1\leqq m_Y\leqq\nu_2$.

b) Supposons que (D_1) ou (D_2) soit vérifié.

On montre comme dans la démonstration du théorème 2 que t est σ-additive sur $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$. Soit m une mesure sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ qui prolonge t. Si (D_2) est vérifié, il résulte du théorème des classes monotones que $m \leqq p$. Si (D_3) est vérifié cette même inégalité résulte de la régularité extérieure de p.

Corollaire (cf. Kellerer [8]). *Soient $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ et $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ des espaces mesurés et soit p une mesure sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ayant des lois marginales σ-finies. Pour qu'il existe sur $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ une mesure m majorée par p et ayant μ et ν pour lois marginales il faut et il suffit que* $\forall\, A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}$: $p(A \times B) + \mu(\complement\, C) \geqq \nu(B)$ *et* $p(A \times B) + \nu(\complement\, B) \geqq \mu(A)$.

Remarques. 1. Les corollaires 1 et 3 du théorème 1 se déduisent aussi du théorème 4.

2. Le corollaire du théorème 4 établi dans [8] suppose p absolument continue par rapport à une mesure produit.

Références

1. Berge, C.: Théorie des graphes et applications. Paris: Dunod 1958
2. Castaing, C.: Analyse convexe. Montpellier, 1968–1969 publication n° 44
3. Dudley, R.M.: Distances of probability measures and random variables. Ann. Math. Statist. 1563 –1572 (1968)
4. Furstenberg, H.: Disjointness in ergodictheory, minimal sets and a problem in Diophantine approximation. Math. Systems Theory **1**, 1–49 (1967)
5. Furstenberg, H.: Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions. (Preprint) 1976
6. Ioffe, A.D., Levin, V.L.: Subdifferentials of convex functions. Trudy Moscov. Mat. Obšč. **26**, 3 –73 (1972)
7. Ionescu-Tulcea, A.: Sur la domination des mesures et la désintégration des mesures. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **262**, 1142 (1966)
8. Kellerer, H.: Funktionen auf Produkträumen mit vorgegebenen Marginalfunktionen. Math. Ann. **144**, 323–344 (1961)
9. Kellerer, H.: Maßtheoretische Marginalprobleme. Math. Ann. **153**, 168–198 (1964)
10. Kellerer, H.: Marginalprobleme für Funktionen. Math. Ann. **154**, 147–156 (1964)
11. Kellerer, H.: Schnittmaß-Funktionen in mehrfachen Produkträumen. Math. Ann. **155**, 369–391 (1964)
12. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités, Paris: Masson 1970
13. Strassen, V.: The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Statist. **36**, 423 –439 (1965)
14. Valadier, M.: Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **266**, 14–16 (1968)
15. Valadier, M.: Sur le théorème de Strassen. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **278**, 1021–1024 (1974)

Reçu le 16 Mai 1977