Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
51, 123–132 (1980)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Processus de vie et de mort sur $\mathbb{R}$ avec interaction selon les particules les plus proches

Christiane Cocozza[1] and Claude Kipnis[2]

[1] Laboratoire de Probabilités, Tour 56, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu F-75221 Paris Cedex 05
[2] UER de Mathématiques, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, F-75221 Paris Cedex 05

I. Introduction

Spitzer, dans [11], a proposé d'étudier une classe particulière de processus de naissance et mort sur la droite réelle qui heuristiquement se comportent de la manière suivante: étant donné à l'instant t une configuration η du système (c'est-à-dire une suite doublement infinie de points de $\mathbb{R}$ ayant pour seuls points d'accumulation $+\infty$ et $-\infty$) dans l'intervalle de temps $[t, t+dt]$, chaque particule de la configuration η tend à disparaître avec une intensité $\delta(x, \eta)$ alors que, dans le même intervalle de temps, une particule nouvelle tend à apparaître entre x et $x+dx$ avec une intensité $\beta(x, \eta)\,dx$.

Entre autres choses, une démonstration de l'existence et de l'unicité d'un processus du type ci-dessus a déjà été obtenue par Holley et Stroock [7] en résolvant un problème des martingales; nous proposons ici une approche probabiliste du problème, différente de la leur, qui repose sur la combinaison de deux idées: la première, déjà développée dans [6] dans le cas de particules sur un ensemble dénombrable, consiste à transformer, à l'aide d'un «changement de temps simultané» [5] un problème avec interaction en un problème sans interaction.

La seconde, due à Harris [4], trop peu connue à notre avis, consiste à construire directement, trajectoire par trajectoire, le processus avec interaction à partir du processus sans interaction. Nous développons la première idée d'une manière peut-être plus «sophistiquée» que dans [6], mais qui présente l'avantage d'être beaucoup moins calculatrice et de s'appliquer indifféremment au problème considéré ou au problème analogue sur $\mathbb{Z}$ étudié par Gray [3].

Dans tout l'article, les démonstrations dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ étant analogues, nous avons choisi de ne traiter que le cas, a priori plus compliqué de $\mathbb{R}$.

Le présent article est organisé comme suit: le paragraphe II est consacré à la construction du changement de temps simultané. Nous donnons une formule explicite permettant de calculer les nouvelles trajectoires en fonction des anciennes, et, à l'aide du calcul intégral stochastique, nous montrons que ce nouveau processus est, pour toute solution au problème des martingales initial, un processus de vie et mort sans interaction.

0044-3719/80/0051/0123/$02.00

Au paragraphe III, nous étudions la transformation inverse de la précédente, définie comme solution d'un système d'équations baptisé «système de Harris». Nous montrons que, pour toute trajectoire «typique» du processus sans interaction, ce système a une unique solution. Enfin, au paragraphe IV, nous en déduisons l'existence et l'unicité des solutions au problème des martingales.

Avant de passer aux formulation équivalentes du problème des martingales, nous fixons quelques notations. Nous appelons $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de Radon η sur $\mathbb{R}$ qui vérifient:

- pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\eta(\{x\})=0$ ou 1,
- $\eta(\mathbb{R}_+)=\eta(\mathbb{R}_-)=+\infty$.

Nous munissons $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ de la topologie de la convergence vague sur les compacts et nous obtenons ainsi un espace polonais (cf. [7], p. 3). Sa tribu borélienne est engendrée par les applications $\eta \to \int 1_F(x)\,\eta(dx)$ lorsque F décrit les boréliens de $\mathbb{R}$.

Soit $\mathscr{D}$ l'espace des fonctions f, sur $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, mesurables bornées et à valeurs réelles pour lesquelles il existe un compact K tel que $f(\eta)=f(\eta')$ lorsque les restrictions à K de η et η' coïncident.

Lorsque η appartient à $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, η^x désigne la mesure $\eta+\varepsilon_x$ (resp. $\eta-\varepsilon_x$) si $\eta(\{x\})=0$ (resp. $\eta(\{x\})=1$) (ε_x est la masse de Dirac au point x). Quand β et δ sont des fonctions positives, mesurables et bornées sur $\mathbb{R}\times\mathscr{M}(\mathbb{R})$, nous considérons la fonction Lf définie pour f dans $\mathscr{D}$ par:

$$Lf(\eta)=\int_{\mathbb{R}} \beta(x,\eta)(1-\eta(x))[f(\eta^x)-f(\eta)]\,dx+\int_{\mathbb{R}} \delta(x,\eta)[f(\eta^x)-f(\eta)]\,\eta(dx).$$

Nous pouvons maintenant rappeler ce qu'est le problème des martingales. Nous notons $\Omega=D(\mathbb{R}_+,\mathscr{M}(\mathbb{R}))$ l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, muni de la topologie de Skorohod, et $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par le processus jusqu'à l'instant t.

Nous dirons qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathscr{F}_\infty)$ est solution du problème des martingales, de coefficients β et δ, d'état initial η_0 (appartenant à $\mathscr{M}(\mathbb{R})$) si et seulement si:

- $\mathbb{P}[\eta(0,\cdot)=\eta_0]=1$,
- $f[\eta(t)]-\int_0^t Lf[\eta(s)]\,ds$ est une $\mathbb{P}$-martingale par rapport aux tribus $\mathscr{F}_t$, pour toute f dans $\mathscr{D}$.

Dans la suite de l'article, nous appellerons une telle probabilité une solution au problème (β,δ,η_0).

Dans le cas que nous étudions, nous supposons que les intensités β et δ vérifient les conditions:

(Ca): β et δ sont majorées par une constante K et minorées par une constante k strictement positive.

(Cb): les intensités $\beta(x,\eta)$ et $\delta(x,\eta)$ ne dépendent que du point x et de sa position par rapport aux plus proches particules de η à droite et à gauche de x, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions n et m telles que:

$$\beta(x, \eta) = n(x, \ell_x(\eta), r_x(\eta)) \qquad \delta(x, \eta) = m(x, \ell_x(\eta), r_x(\eta))$$

où $\ell_x \eta) = \sup\{y: y < x \text{ et } \eta(\{y\}) = 1\}$
et $r_x(\eta) = \inf\{y: y > x \text{ et } \eta(\{y\}) = 1\}$.
Définissons maintenant les processus ponctuels $N^+(dx, ds)$ et $N^-(dx, ds)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par

$$N^+(dx, ds) = \sum_{(x,s)} 1_{\{\eta(s)(x) - \eta(s-)(x) = 1\}} \varepsilon_{(x,s)},$$

$$N^-(dx, ds) = \sum_{(x,s)} 1_{\{\eta(s)(x) - \eta(s-)(x) = -1\}} \varepsilon_{(x,s)}.$$

Ces processus ponctuels permettent de donner une formulation plus agréable du problème des martingales qui a déjà été exploitée dans [1] dans le cas de particules sur $\mathbb{Z}$ et qui se démontre de façon analogue sur $\mathbb{R}$ ([6]).

Proposition I.1. $\mathbb{P}$ *est solution du problème* (β, δ, η_0) *si et seulement si*

- $\mathbb{P}(\eta(0) = \eta_0) = 1$.
- *Pour tout borélien borné Γ de $\mathbb{R}$*

$$\tilde{N}_+^\Gamma(t) = \int 1_\Gamma(x)\, 1_{[s \leq t]} [N^+(dx, ds) - \beta(x, \eta(s))\, dx\, ds]$$

et

$$\tilde{N}_-^\Gamma(t) = \int 1_\Gamma(x)\, 1_{[s \leq t]} [N^-(dx, ds) - \delta(x, \eta(s))(\eta(s)(dx))\, ds]$$

sont des $\mathbb{P}$-martingales par rapport à la filtration $\mathscr{F}_t$, leurs sauts sont p.s. de taille 1 *et elles n'ont p.s. aucun saut commun.*

L'introduction de ces processus ponctuels permet d'utiliser la théorie de l'intégrale stochastique et permet d'établir le corollaire ci-dessous qui nous sera utile par la suite. On appelle tribu prévisible la tribu $\tilde{\mathscr{P}}$ sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ engendrée par les variables aléatoires $(\omega, x, s) \to Z(\omega, x, s)$ qui, à s fixé sont $\mathscr{F}_s \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$-mesurables et, à (ω, x) fixé sont continues à droite. On a alors:

Corollaire I.2. *Pour toute solution au problème* (β, δ, η_0) *et toute variable aléatoire Z prévisible on a*

$$\mathbb{E}\left(\int Z(\omega, x, s)[N^+(dx, ds) - \beta(x, \eta(s))\, dx\, ds]\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\int Z(\omega, x, s)[N^-(dx, ds) - \delta(x, \eta(s))(\eta(s)(dx))\, ds]\right) = 0.$$

II. Changement de temps simultané

Dans le cas particulier où les coefficients β et δ sont égaux à 1, le problème des martingales a évidemment une unique solution désignée par $\mathbb{Q}_{\eta_0}$. Le théorème principal de ce paragraphe (Théorème II.2) associe à tout couple (β, δ) une transformation φ de l'espace des trajectoires Ω, qui applique toute solution du problème (β, δ, η_0) sur $\mathbb{Q}_{\eta_0}$.

Afin de définir φ, il est utile de remarquer que toute solution au problème (β, δ, η_0) est nécessairement portée par le sous-ensemble des trajectoires qui ont en chaque point x au plus un temps d'apparition, noté $a(x)$ (qui peut être infini) et donc au plus un temps de disparition $d(x)$, postérieur à $a(x)$. En effet,

Proposition II.1. *Si $a(x)=\inf\{t \mid \eta_t(x)=1\}$ désigne le premier instant d'apparition d'une particule en x, on a pour tout borélien Γ borné*

$$\mathbb{E}\left(\int 1_\Gamma(x)\, 1_{[a(x)<s]}\, N_+(dx\, ds)\right)=0.$$

Démonstration. La proposition I.1 montre immédiatement que la probabilité pour qu'il y ait une naissance en un point *x fixé* de $\mathbb{R}$ est nulle et le corollaire I.2 implique alors facilement le résultat.

Une trajectoire est donc caractérisée par les nombres $a(x)$ et $d(x)$, à partir de la formule $\eta(s)(x)=\eta_0(x)+1_{[s\leq a(x))]}-1_{[d(x)\leq s]}$ et toute solution au problème (β, δ, η_0) est portée par l'ensemble D des trajectoires telles que

- pour tout t, l'ensemble des x tels que $a(x)\leqq t$ est dénombrable et sans point d'accumulation à distance finie
- $\eta_0=\{x \mid a(x)=0\}$
- $\limsup_{x\in\eta_0;\, x\to+\infty} d(x)=+\infty=\limsup_{x\in\eta_0;\, x\to-\infty} d(x)$

grâce à la condition (Ca) en appliquant le lemme de Borel-Cantelli.

Remarque. Dans ce langage $\mathbb{Q}_{\eta_0}$ est caractérisée de façon équivalente comme étant la probabilité telle que $\eta(0)=\eta_0$ et faisant du processus ponctuel $N_+(dx, ds) = \sum_{x:\, 0<a(x)<\infty} \varepsilon_{(x,\, a(x))}(dx, ds)$ un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ marqué de façon indépendante par les variables $(d(x)-a(x))$ qui sont indépendantes et exponentielles de paramètre 1. Ceci signifie que la fonctionnelle génératrice [10] du processus ponctuel $\sum_{x:\, a(x)<\infty} [d(x)-a(x)]\, \varepsilon_{(x,\, a(x))}(dx, ds)$ est donnée, pour toute fonction $f(x, s)$ positive ou nulle, par

$$\exp\int [(1+f(x,s))^{-1}-1]\, dx\, ds.$$

Dans le cas où les coefficients β et δ ne sont pas égaux à 1, considérons les nombres $u(x)$ et $v(x)$ définis par

$$u(x)=\int_0^{a(x)} \beta(x, \eta(s))\, ds \qquad v(x)=\int_{a(x)}^{d(x)} \delta(x, \eta(s))\, ds+u(x).$$

On définit alors l'application φ de D dans lui-même en posant comme image de la trajectoire $\eta.$, la trajectoire $\varphi(\eta.)$ définie par:

$$[\varphi(\eta)](s)(x)=\eta_0(x)+1_{[0<u(x)\leq s]}-1_{[0<v(x)\leq s]}.$$

On a alors le

Théorème II.2. *Sous l'hypothèse* (Ca) *l'image par φ de toute solution du problème (β, δ, η_0) est la solution du problème* $(1, 1, \eta_0)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toute fonction g borélienne positive, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, à support compact, on a pour $\mu^+(\omega;\cdot)=N^+(\varphi(\omega);\cdot)$

$$\mathbb{E}[\exp\{-\int g(x,s)[v(x)-u(x)]\,\mu^+(dx,ds)\}]$$
$$=\exp\int\left(\frac{1}{1+g(x,s)}-1\right)dx\,ds. \tag{1}$$

Etant donné une fonction f borélienne positive, à support compact, les fonctions $(x,s,\omega)\to f\left(x,\int_0^{a(x)}\beta(x,\eta(v))\,dv\right)1_{[a(x)\leqq s]}$ et $(x,s,\omega)\to f\left(x,\int_0^s\beta(x,\eta(v))\,dv\right)$ appartiennent à la tribu prévisible $\tilde{\mathscr{P}}$. Le corollaire I.2 et la formule exponentielle pour les martingales sommes de sauts compensés ([13]) montrent que

$$M_t=\exp\left\{\int f\left(x,\int_0^{a(x)}\beta(x,\eta(v))\,dv\right)1_{[a(x)\leqq s]}1_{[s\leqq t]}N^-(dx,ds)\right.$$
$$-\int\left(\exp\left[f\left(x,\int_0^{a(x)}\beta(x,\eta(v))\,dv\right)\right]-1\right)$$
$$\left.\cdot\,1_{[a(x)\leqq s]}1_{[s\leqq t]}\,\delta(x,\eta(s))(\eta(s)(dx))\,ds\right\}$$

et

$$N_t=\exp\left\{-\int f\left(x,\int_0^s\beta(x,\eta(v))\,dv\right)1_{[s\leqq t]}N^+(dx,ds)\right.$$
$$\left.-\int\left(\exp\left[-f\left(x,\int_0^s\beta(x,\eta(v))\,dv\right)\right]-1\right)1_{[s\leqq t]}\,\beta(x,\eta(s))\,dx\,ds\right\}$$

sont des martingales locales, sans saut commun donc orthogonales. Par conséquent $M_t N_t$ est une martingale locale. Il existe donc une suite τ_n de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$, telle que $E(M_{t\wedge\tau_n}N_{t\wedge\tau_n})=1$. Lorsque τ_n et t tendent vers $+\infty$, $M_{t\wedge\tau_n}N_{t\wedge\tau_n}$ tend p.s. vers

$$A=\exp\left\{-\int\left(\exp\left[f\left(x,\int_0^{a(x)}\beta(x,\eta(v))\,dv\right)\right]-1\right)\delta(x,\eta(s))\,ds(\eta(s)(dx))\right.$$
$$\left.-\int\left(\exp\left[-f\left(x,\int_0^s\beta(x,\eta(v))\,dv\right)\right]-1\right)\beta(x,\eta(s))\,dx\,ds\right\}$$

car si $\Gamma\times[0,T]$ désigne un compact de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ hors duquel f est nulle et si M est un majorant de f, les hypothèses (Ca) entraînent que, lorsque t et τ_n tendent vers $+\infty$, l'expression positive

$$\int f\left(x,\int_0^s\beta(x,\eta(v))\,dv\right)1_{[s\leqq t\wedge\tau_n]}N^+(dx,ds)$$
$$-\int f\left(x,\int_0^{a(x)}\beta(x,\eta(v))\,dv\right)1_{[a(x)\leqq s]}1_{[s\leqq t\wedge\tau_n]}N^-(dx,ds)$$

qui est majorée par

$$M \int 1_{[s \leqq t \wedge \tau_n \leqq d(x)]}\, 1_\Gamma(x)\, 1_{[s \leqq Tk^{-1}]}\, N^+(dx, ds)$$

tend presque sûrement vers 0. D'autre part, la martingale $M_{t \wedge \tau_n} N_{t \wedge \tau_n}$ est majorée par la variable aléatoire

$$X = \exp\{M \int 1_\Gamma(x)\, 1_{[s \leqq Tk^{-1}]}\, N^+(dx, ds) + K \int 1_\Gamma(x)\, 1_{s \leqq Tk^{-1}}\, dx\, ds\}.$$

On montre alors facilement que la variable aléatoire X est intégrable, en remarquant que la formule exponentielle déjà utilisée ci-dessus entraîne que:

$$\exp\{\int 1_\Gamma(x)\, 1_{[s \leqq t]}\, N^+(dx, ds) - \int (e^x - 1)\, \beta(x, \eta(s))\, dx\, ds\}$$

est une martingale locale positive, donc une surmartingale positive.

Le théorème de convergence dominée montre alors que $E(A) = 1$ ce qui n'est autre que la formule (1) avec $g = e^f - 1$.

III. Le système de Harris

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la transformation φ correspondant au changement de temps appliquait toute solution du problème (β, δ, η_0) sur la probabilité $\mathbb{Q}_{\eta_0}$. Cette transformation φ envoie clairement D dans lui-même. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que, sous les hypothèses d'interaction par plus proche voisin, cette application φ est en réalité une bijection de D.

Etant donné une famille $(u(x), v(x))$ caractérisant une trajectoire de D, qui vérifie donc

- $\{x; u(x) = 0\} = \eta_0$
- $\forall t \geqq 0 \quad F_t = \{x; u(x) \leqq t\}$ est dénombrable sans point d'accumulation
- $\limsup\limits_{x \in \eta_0,\, x \to +\infty} v(x) = \limsup\limits_{x \in \eta_0,\, x \to -\infty} v(x) = +\infty$ (2)

nous considérons pour tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}$, le système suivant appelé système de Harris associé aux coefficients β et δ:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1) \quad a(x) = \inf\{s; \xi(s)(x) = 1\} \quad \forall x \in \mathbb{R}\\
&(\alpha_2) \quad d(x) = \inf\{s; s > a(x), \xi(s)(x) = 0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}\\
&(\beta_1) \quad u(x) = \int_0^{a(x)} \beta(x, \xi(s))\, ds \quad \forall x \in A\\
&(\beta_2) \quad v(x) = u(x) + \int_{a(x)}^{d(x)} \delta(x, \xi(s))\, ds) \quad \forall x \in A\\
&(\gamma) \quad \xi(s)(x) = \eta_0(x) \quad \forall x \notin A
\end{aligned} \tag{E_A}$$

(nous faisons la convention $\inf \emptyset = +\infty$).

Une solution (resp. une solution jusqu'à l'instant T, T étant un nombre réel positif) de ce système est une application $s \to \xi(s)$ continue à droite, limitée à gauche de $\mathbb{R}$ (resp. $[0, T]$) dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ vérifiant E_A (resp. les relations (α_1), (α_2), (γ) ainsi que la relation (β_1) lorsque $a(x)$ est inférieur ou égale à T et la relation (β_2) lorsque $d(x)$ est inférieur ou égal à T).

Harris ([4]) a démontré la

Proposition 3.1. *Lorsque l'ensemble A est fini, le système E_A a une unique solution. De plus si $A \subset B$ et si pour tout point x de A, les coefficients $\beta(x, \eta)$ et $\delta(x, \eta)$ ne dépendent que de la configuration η dans A, alors toute solution de E_B coïncide dans A avec la solution de E_A.*

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* (Ca) *et* (Cb) *le système de Harris $E_{\mathbb{R}}$ a une et une seule solution.*

Démonstration. Il suffit en fait de montrer que, pour tout T, il existe une unique solution jusqu'à l'instant T du système $E_{F_{KT}}$, l'ensemble F_t étant défini dans (2) et K étant un majorant de la fonction β. Or, par hypothèse, il existe une suite croissante d'intervalles $A_n = [x_n, x'_n]$ tels que:

$$\bigcup_n A_n = \mathbb{R},$$

$$\eta_0(x_n) = \eta_0(x'_n) = 1 \qquad \text{pour tout } n,$$

$$v(x_n) > KT \quad \text{et} \quad v(x'_n) > KT.$$

La condition (Ca) entraîne que pour tout $p > n$, les solutions jusqu'à l'instant T des systèmes $E_{A_n \cap F_{KT}}$ et $E_{A_p \cap F_{KT}}$ notées respectivement ξ_n et ξ_p vérifient $\xi_k(s)(x_n) = \xi_k(s)(x'_n) = 1$ ($k = n$ ou p).

La condition (Cb) et la proposition 3.1 montrent alors que ξ_n et ξ_p coïncident dans A_n. Les solutions jusqu'à l'instant T des systèmes $E_{A_n \cap F_{KT}}$ ($n \in \mathbb{N}$) s'induisent donc et définissent une solution du système $E_{F_{KT}}$.

L'unicité provient de ce que toute solution de $E_{F_{KT}}$ est, quel que soit n, *dans* A_n, une (et donc la) solution de $E_{F_{KT} \cap A_n}$. ■

Nous notons désormais ψ l'application de D dans lui-même qui associe à une trajectoire (caractérisée par $(u(x), v(x))$ la trajectoire solution du système $E_{\mathbb{R}}$. Il est clair que ψ est l'inverse de φ sur D.

IV. Existence et unicité du problème des martingales

Dans cette partie $\mathbb{Q}_{\eta_0}$ désigne toujours la solution du problème $(1, 1, \eta_0)$. L'unicité s'obtient facilement en utilisant les propriétés des applications φ et ψ.

Théorème IV.1. *Si les coefficients β et δ vérifient* (Ca) *et* (Cb) *alors il existe au plus une solution au problème (β, δ, η_0).*

Démonstration. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}'$ deux solutions du problème (β, δ, η_0). Elles sont toutes deux ainsi que $\mathbb{Q}_{\eta_0}$ portées par D et l'on a donc d'après le théorème II.2 $\varphi(\mathbb{P}) = \varphi(\mathbb{P}') = \mathbb{Q}_{\eta_0}$. Par conséquent: $\mathbb{P} = \psi \circ \varphi(\mathbb{Q}_{\eta_0}) = \mathbb{P}'$, puisque $\psi \circ \varphi$ est l'identité sur D. ■

Il nous reste à montrer l'existence d'une solution et pour ce faire, nous introduisons les coefficients tronqués β_n et δ_n définis par:

$$\left.\begin{aligned}\beta_n(x,\eta)&=\beta(x,\eta)\\ \delta_n(x,\eta)&=\delta(x,\eta)\end{aligned}\right\}\quad \text{si } |x|\leqq n$$
$$\beta_n(x,\eta)=\delta_n(x,\eta)=0 \qquad \text{si } |x|>n.$$

Notons alors ψ_n l'application de D dans lui-même, définie de façon analogue à ψ, qui associe à une trajectoire la trajectoire solution du système de Harris $E_{\mathbb{R}}$ avec les coefficients β_n et δ_n (ou de façon équivalente la solution du système $E_{[-n,n]}$ avec coefficients β et δ).

La démonstration du paragraphe précédent montre en particulier que, pour toute trajectoire ω de D, $\psi_n(\omega)$ coïncide avec $\psi(\omega)$ sur un ensemble borné jusqu'à un instant T, à partir d'un certain rang. D'autre part, par unicité de la solution du problème $(\beta_n, \delta_n, \eta_0)$ et grâce à l'unicité des solutions du système $E_{[-n,n]}$ il est clair que l'image par ψ_n de $\mathbb{Q}_{\eta_0}$ est *la* solution du problème $(\beta_n, \delta_n, \eta_0)$. On a donc:

– $N_+^\Gamma(t)$ et $N_-^\Gamma(t)$ ont des sauts de taille 1 et aucun saut commun $\psi_n(\mathbb{Q}_{\eta_0})$ presque sûrement (ceci signifie, par exemple, que $N_+^\Gamma(t, \psi_n(\omega))$ a $\mathbb{Q}_{\eta_0}$ - p.s. des sauts de taille un). (3)

– $N_+^\Gamma(t)-\int_0^t\int_\Gamma \beta_n(x,\eta(s))\,dx\,ds$ et $N_-^\Gamma(t)-\int_0^t\int_\Gamma \delta_n(x,\eta(s))(\eta(s)(dx))\,ds$ (4)

sont des $\psi_n(\mathbb{Q}_{\eta_0})$-martingales.

Grâce à la convergence des ψ_n vers ψ, nous allons démontrer le:

Théorème. *L'image de $\mathbb{Q}_{\eta_0}$ par ψ est une solution du problème (β, δ, η_0).*

Démonstration. Nous devons vérifier que, pour $\psi(\mathbb{Q}_{\eta_0})$:

$\tilde{N}_+^\Gamma(t)$ et $\tilde{N}_-^\Gamma(t)$ (définis dans la Proposition I.1) sont des martingales. (5)

Elles ont des sauts de taille 1 et pas de sauts communs. (6)

Nous allons démontrer (5) et (6) en faisant tendre n vers l'infini dans (3) et (4). Pour toute région bornée Λ et tout s positif, appelons $\mathscr{F}_s^\Lambda$ la σ-algèbre engendrée par $\eta(u)(\Lambda')$ pour $\Lambda'\subset\Lambda$ et $u\leqq s$. Puisque pour n assez grand, $\psi(\omega)$ et $\psi_n(\omega)$ coïncident sur Γ jusqu'à l'instant t, on a si $x\in\Lambda$:

$$\delta_n(x, \psi_n(\omega)(s))=\delta(x, \psi(\omega)(s))$$
$$\beta_n(x, \psi_n(\omega)(s))=\delta(x, \psi(\omega)(s))$$

et pour tout A de $\mathscr{F}_t^\Gamma$: $1_A\circ\psi_n(\omega)=1_A\circ\psi(\omega)$.

Par conséquent, pour n assez grand et $s\leqq t$, on a: $N_+^\Gamma(s)\circ\psi_n(\omega)=N_+^\Gamma(s)\circ\psi(\omega)$ ce qui implique que $N_+^\Gamma(t)\circ\psi(\omega)$ n'a que des sauts d'amplitude 1. Un argument analogue pour les sauts communs démontre (6).

Par ailleurs de (4), il s'ensuit que, pour tout Λ borné de $\mathbb{R}$, tout $s\leqq t$ et A dans

$\mathscr{F}_s^A$, on a

$$\int 1_A(\psi_n(\omega))\left[N_+^\Gamma(t)\circ\psi_n(\omega)-\int_0^t\int_\Gamma\beta_n(x,\psi_n(\omega)(u)\,dx\,du\right]d\mathbb{Q}_{\eta_0}$$
$$=\int 1_A(\psi_n(\omega))\left[N_+^\Gamma(s)\circ\psi_n(\omega)-\int_0^s\int_\Gamma\beta_n(x,\psi_n(\omega)(u))\,dx\,du\right]d\mathbb{Q}_{\eta_0}.$$

Les seuls termes non bornés dans cette expression sont $N_+^\Gamma(t)\circ\psi_n(\omega)$ et $N_+^\Gamma(s)\circ\psi_n(\omega)$. Mais l'hypothèse (Ca) implique que, pour tout n:

$$N_+^\Gamma(t)\circ\psi_n(\omega)\leqq N_+^\Gamma(Kt)(\omega).$$

Puisque $N_+^\Gamma(Kt)(\omega)$ est une fonction $\mathbb{Q}_{\eta_0}$-intégrable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne,

$$\int 1_A\circ\psi(\omega)\cdot\tilde{N}_+^\Gamma(t)\circ\psi(\omega)\,d\mathbb{Q}_{\eta_0}=\int 1_A\circ\psi(\omega)\cdot\tilde{N}_s^\Gamma\circ\psi(\omega)\,d\mathbb{Q}_{\eta_0}.$$

De façon similaire, on démontre que $N_-^\Gamma(t)\circ\psi(\omega)$ est une martingale en utilisant les inégalités

$$N_-^\Gamma(t)\circ\psi_n(\omega)\leqq N_-^\Gamma(Kt)\leqq N_+^\Gamma(Kt)(\omega)+\eta_0(\Gamma)$$
$$\cdot\int_0^t\int_\Gamma\delta_n(x,\psi_n(\omega)(s))(\eta_s(dx))\,ds\leqq KN_+^\Gamma(Kt)(\omega)+\eta_0(\Gamma).\quad\blacksquare$$

Remerciements. Nous tenons à remercier M. Yor qui nous a initié aux formules exponentielles, J. Neveu pour le soutien constant qu'il nous a apporté dans la préparation de ce travail. Enfin le rapporteur, par ses remarques, nous a permis de clarifier la présentation de cet article.

Bibliographie

1. Cocozza, C., Kipnis, C.: Existence de processus markoviens pour des systèmes infinis de particules. Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1977, tome 13, N° 3
2. Cocozza, C., Kipnis, C.: Processus de vie et de mort sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ avec interaction selon les particules les plus proches. CRAS, t. 284 (23 mai 1977), série A 1291
3. Gray, L.: Controlled spin-flip system. Thèse (mai 1977)
4. Harris, T.E.: Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices. Advances in Math. **9**, 66–89 (1972)
5. Helms, H.: Ergodic properties of several interacting Poisson particles. Adv. in Math., **12**, p. 32–57 (1974)
6. Holley, R.A., Stroock, D.W.: A martingale approach to infinite systems of interacting processes. Annals of Probability, vol. 4, N° 2, 195–228 (1976)
7. Holley, R.A., Stroock, D.W.: Nearest-neighbor birth and death processes on $\mathbb{R}$, Acta Mathematica **140**, 103–154 (1978)
8. Jacod, J.: Multivariate point processes, predictable projection, Radon Nikodym derivatives, representation of martingales. **31**, 235–253 (1975)
9. Neveu, J.: Evolutions markoviennes. Séminaire sur les processus markoviens à une infinité de particules, décembre 1974, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique

10. Neveu, J.: Processus ponctuels, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour VI. Berlin Heidelberg New York: Springer 1976
11. Spitzer, F.: Stochastic time evolution of one-dimensional infinite particle system. BAMS, vol **83** N° 5, syt 77, 880–890
12. Stroock, D.W., Varadhan, S.: Diffusion process with continuous coefficients. Comm. pure and app. Math. **22**, 1969
13. Yor, M.: Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X, Université de Strasbourg. Berlin Heidelberg New York: Springer 1976

Received June 1, 1978