Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
60, 425–435 (1982)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Loi du logarithme itéré dans $\mathscr{C}(S)$ et fonction caractéristique empirique

Michel Ledoux

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S., Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cédex

Sommaire. De nombreuses publications ont été consacrées ces dernières années à l'étude des propriétés limites des variables aléatoires lipschitziennes. Si le théorème de la limite centrale a trouvé dans les travaux de N.C. Jain et M.B. Marcus [9] et B. Heinkel [7] des conditions suffisantes en un sens meilleures possibles, la loi du logarithme itéré, bien qu'apparaisant comme corollaire immédiat de la propriété de limite centrale, était toujours à la recherche de conditions spécifiques. Nous présentons, dans notre première partie, une loi du logarithme itéré pour les variables aléatoires lipschitziennes sous des hypothèses qui lui sont propres. Dans la seconde, nous appliquons les techniques du cas lipschitzien à l'étude de la fonction caractéristique empirique en vue de préciser, dans leurs parties loi du logarithme itéré, les récents résultats de M.B. Marcus [15] et S. Csörgő [3] concernant les propriétés limites de la fonction caractéristique empirique.

1. La loi du logarithme itéré dans $\mathscr{C}(S)$

Soient (S,d) un espace métrique compact de diamètre $D(S)$ et $\mathscr{C}(S)$ l'espace de Banach des fonctions complexes et continues définies sur S muni de sa norme usuelle $\|.\|$.

Dans tout ce paragraphe, X désignera une variable aléatoire (v.a.) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ à valeurs dans $\mathscr{C}(S)$, centrée et telle que: $\sup_{s\in S} E\{|X(s)|^2\}<\infty$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de copies indépendantes de X. Pour une telle v.a., nous noterons, pour tout entier n:

$$S_n(X)=X_1+\ldots+X_n.$$

Nous poserons par ailleurs, toujours pour tout entier n:

$$a_n=(2nL_2n)^{\frac{1}{2}}$$

0044-3719/82/0060/0425/$02.20

où L_2 est la fonction sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives, définie par:

$$\forall u \geqq \exp(e),\ L_2 u = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} u);$$
$$\forall u \in [0, \exp(e)[,\ L_2 u = 1.$$

Nous dirons que X satisfait au théorème de la limite centrale si la suite $\left(\frac{S_n(X)}{n^{\frac{1}{2}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi dans $\mathscr{C}(S)$ vers une fonction aléatoire gaussienne à trajectoires continues, de même covariance que X. Nous dirons que X satisfait à la loi du logarithme itéré bornée (respectivement compacte) si, presque sûrement (p.s.), $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty$ (respectivement si, p.s., la suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $(\mathscr{C}(S), \|.\|)$, d'ensemble de valeurs d'adhérence la boule unité de l'espace autoreproduisant associé à la covariance de X) (cf. [16]).

A la suite des travaux de N.C. Jain et M.B. Marcus [9], B. Heinkel obtenait, grâce à la méthode des mesures majorantes introduite par X. Fernique [4] pour l'étude des fonctions aléatoires gaussiennes, une condition suffisante pour qu'une v.a. lipschitzienne vérifie le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans $\mathscr{C}(S)$.

X sera dite lipschitzienne par rapport à un écart ρ continu sur (S, d) (ou ρ-lipschitzienne), s'il existe une v.a. positive M de carré intégrable, telle que:

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall s, t \in S,\ |X(\omega, s) - X(\omega, t)| \leqq \rho(s, t)\, M(\omega).$$

Théorème 1.1. [7] *Supposons X ρ-lipschitzienne; s'il existe une mesure de probabilité μ sur S muni de la tribu ρ-borélienne $\mathscr{B}_\rho$, telle que:*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x\in S} \int_0^{\varepsilon} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\mu\{y \in S, \rho(x, y) < u\}}\right)^{\frac{1}{2}} du = 0,$$

alors X satisfait au théorème de la limite centrale et à la loi du logarithme itéré compacte dans $\mathscr{C}(S)$.

Remarque 1.2. Pour tout réel $u > 0$, on désigne par $N_\rho(S, u)$ le nombre minimal de ρ-boules de rayon u suffisant à recouvrir S. Il est bien connu ([4], Corollaire 6.2.4) que sous l'hypothèse d'entropie:

$$\int_0^1 (\operatorname{Log} N_\rho(S, u))^{\frac{1}{2}}\, du < \infty,$$

il existe une mesure de probabilité μ sur $(S, \mathscr{B}_\rho)$ telle que la condition du théorème 1.1 est satisfaite.

L'énoncé précédent n'a rien de spécifique en ce qui concerne sa partie loi du logarithme itéré puisqu'il entre dans le cadre des théorèmes de liaison ([16], Théorème 4.3) entre théorème de la limite centrale et loi du logarithme itéré, X étant fortement de carré intégrable. Mais pour une telle v.a., la propriété de logarithme itéré bornée (respectivement compacte) est équivalente à la bornitude en probabilité (respectivement convergence en probabilité vers 0) de la suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ([12], Theorems 4.1, 4.2). Cette observation est à l'origine du théorème suivant qui précise le résultat 1.1 en ce sens que la v.a. considérée n'aura aucune raison de vérifier le théorème de la limite centrale.

Théorème 1.3. *Supposons X ρ-lipschitzienne; s'il existe une mesure de probabilité μ sur $(S, \mathscr{B}_\rho)$, telle que:*

$$\sup_{x\in S} \int_0^{D(S)} \psi\left(\frac{1}{\mu\{y\in S, \rho(x,y)<u\}}\right) du < \infty \tag{1}$$

$\Bigg($*respectivement*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{x\in S} \int_0^{\varepsilon} \psi\left(\frac{1}{\mu\{y\in S, \rho(x,y)<u\}}\right) du = 0\Bigg) \tag{2}$$

où ψ désigne la fonction: $\psi(u)=\left(\frac{\operatorname{Log} u}{L_2(\operatorname{Log} u)}\right)^{\frac{1}{2}}$ définie sur l'intervalle $[1, \infty[$, alors X satisfait à la loi du logarithme itéré bornée (respectivement compacte) dans $\mathscr{C}(S)$.

Remarque 1.4. Là encore l'hypothèse (2) est vérifiée sous la condition d'entropie:

$$\int_0^1 \psi(N_\rho(S,u))\, du < \infty.$$

(Une écriture plus suggestive consisterait à noter l'entropie $H_\rho(S,u) = \operatorname{Log} N_\rho(S,u)$, et à supposer:

$$\int_0^1 \left(\frac{H_\rho(S,u)}{L_2(H_\rho(S,u))}\right)^{\frac{1}{2}} du < \infty;$$

nous conserverons toutefois la fonction ψ pour des commodités de notations.)

Démonstration du théorème 1.3. Elle consiste essentiellement en la transformation, sous l'hypothèse (1) ou (2), du problème de loi du logarithme itéré en un problème de bornitude en probabilité dans un espace d'Orlicz approprié. La première étape est une adaptation convenable d'un résultat général de B. Heinkel [8] sur le théorème de la limite centrale dans $\mathscr{C}(S)$. On rappelle qu'une fonction de Young φ est une fonction sur $\mathbb{R}$, croissante, convexe, continue et nulle à l'origine; l'espace d'Orlicz $L^\varphi(T,\tau)$ des fonctions complexes f définies sur un espace probabilisé $(T, \mathscr{T}, \tau)$ pour lesquelles il existe $\alpha=\alpha(f)>0$ tel que $\int_T \varphi\left(\frac{|f|}{\alpha}\right) d\tau < \infty$ est, muni de la norme

$$N^\varphi(f) = \inf\left\{a>0, \int_T \varphi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\tau \leq 1\right\},$$

un espace de Banach.

En raison des hypothèses de moments faibles faites sur X et de la loi du logarithme itéré en dimension finie, le lemme suivant est l'exact analogue du critère de [8] pour le dénominateur a_n.

Lemme 1.5. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites:*

a) *il existe une fonction de Young φ, un écart ρ sur S d-continu tel que de plus X soit ρ-continue, et une mesure de probabilité μ sur $(S, \mathscr{B}_\rho)$, tels que:*

$$\sup_{x\in S} \int_0^{D(S)} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2\{y\in S, \rho(x,y)<u\}}\right) du < \infty$$

$\Bigg($*respectivement*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{x\in S} \int_0^{\varepsilon} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2\{y\in S, \rho(x,y)<u\}}\right) du = 0\Bigg);$$

b) *si l'on pose:* $\tilde{X}(s,t) = \dfrac{X(s)-X(t)}{\rho(s,t)} I_{\{\rho\neq 0\}}(s,t)$, *alors* $\tilde{X} \in L^\varphi(S\times S, \mu\otimes\mu)$ *p.s.;*

c) *la suite* $\left(\dfrac{S_n(\tilde{X})}{a_n} = \dfrac{\tilde{X}_1+\ldots+\tilde{X}_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée en probabilité dans* $(L^\varphi(S\times S, \mu\otimes\mu), N^\varphi(.))$ *i.e.:*

$$\forall \varepsilon>0, \exists A<\infty, \sup_{n\in\mathbb{N}} P\left\{N^\varphi\left(\frac{S_n(\tilde{X})}{a_n}\right) > A\right\} < \varepsilon;$$

sous ces hypothèses, la suite $\left(\dfrac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée en probabilité (respectivement converge en probabilité vers 0) dans $\mathscr{C}(S)$ et pour tout entier n et tout réel $\delta>0$, on a:*

$$E\left\{\sup_{\substack{s,t\in S\\ \rho(s,t)<\delta}} \left|\frac{S_n(X)(s)-S_n(X)(t)}{a_n}\right|\right\}$$
$$\leqq 40\, E\left\{N^\varphi\left(\frac{S_n(\tilde{X})}{a_n}\right)\right\} \sup_{x\in S} \int_0^{\delta/2} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2\{y\in S, \rho(x,y)<u\}}\right) du.$$

Pour conclure à l'affirmation du théorème, il suffit, comme nous l'avons vu, de vérifier que la suite $\left(\dfrac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité (respectivement converge en probabilité vers 0); pour ce faire, un argument classique de symétrisation nous autorise à considérer X symétrique; nous le supposerons.

La fonction $\exp(u^2 L_2 u^2)-1$, définie sur $\mathbb{R}_+$, n'étant pas dérivable en $(\exp(e))^{\frac{1}{2}}$, nous lui substituons, sur l'intervalle $[0, (\exp(e))^{\frac{1}{2}}[$ un prolongement convexe plus petit de telle sorte que la fonction φ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi obtenue soit une fonction de Young de classe C^2; à noter qu'il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que pour tout $u\geqq 0$, on ait: $\varphi^{-1}(u) \leqq c_1\psi(u)+c_2$. Le théorème 1.3 sera alors établi si nous montrons que la condition c) du lemme 1.5 est satisfaite pour la fonction φ ainsi définie. C'est l'objet du prochain lemme qui se déduit aisément des inégalités classiques entre les moments successifs des sommes de v.a. de Rademacher et des sommes de v.a. gaussiennes.

Lemme 1.6. *Sous les hypothèses du théorème 1.3,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left\{N^{\varphi}\left(\frac{S_n(\tilde{X})}{a_n}\right)\right\} \leqq 5\,(E\{M^2\})^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration du lemme 1.6. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée construite sur un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$. On peut toujours supposer qu'il existe sur ce même espace une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de copies indépendantes de M, telles que:

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall s, t \in S,\ |X_n(\omega_1, s) - X_n(\omega_1, t)| \leqq \rho(s,t)\, M_n(\omega_1).$$

Sur un espace probabilisé $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$, distinct de $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. de Rademacher (i.e. une suite de v.a. indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$). Par symétrie, il est clair que pour tout entier n, $\frac{S_n(\tilde{X})}{a_n}$ et $\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \tilde{X}_j$ ont même loi. La définition de $N^{\varphi}(.)$ implique que pour tout réel $u>0$:

$$P_2\left\{\omega_2 : N^{\varphi}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j}{\left(2L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \geqq u\right\}$$

$$\leqq P_2\left\{\omega_2 : \int_{S\times S} \exp\left[\frac{\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j\right|^2}{2u^2 L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2}\, L_2\left(\frac{\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j\right|^2}{2u^2 L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2}\right)\right] d\mu\otimes\mu \geqq 2\right\}.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz, pour tout $u \geqq 1$ et tout n, on a:

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j\right|^2}{2u^2 L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2} \leqq \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(\omega_2)|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |\tilde{X}_j|^2\right)}{\sum_{j=1}^{n} M_j^2} \leqq n$$

puisque X est lipschitzienne. Il s'ensuit que:

$$P_2\left\{\omega_2 : N^{\varphi}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j}{\left(2L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \geqq u\right\}$$

$$\leqq P_2\left\{\omega_2 : \int_{S\times S} \exp\left[\frac{\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j\right|^2}{u^2 \sum_{j=1}^{n} M_j^2}\right] d\mu\otimes\mu \geqq 2\right\}.$$

D'un calcul de X. Fernique ([5], Corollaire 1.1.2) on déduit alors:

$$\int_{\Omega_2} N^{\varphi}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}_j}{\left(2L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) dP_2(\omega_2) \leqq 5.$$

Par suite,

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} N^{\varphi}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \tilde{X}_j\right) dP_1\otimes P_2$$

$$= \int_{\Omega_1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} M_j^2(\omega_1)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_2} N^{\varphi}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(\omega_2)\,\tilde{X}(\omega_1)}{\left(2L_2 n \sum_{j=1}^{n} M_j^2(\omega_1)\right)^{\frac{1}{2}}}\right) dP_2(\omega_2)\right) dP_1(\omega_1)$$

$$\leqq 5 \int_{\Omega_1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} M_j^2(\omega_1)}{n}\right)^{\frac{1}{2}} dP_1(\omega_1) \leqq 5(E\{M^2\})^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme et donc du théorème.

Remarque 1.7. Nous laissons le soin au lecteur de se convaincre que dans l'exemple de M.B. Marcus ([13], Sect. 2), indiquant en un certain sens que le théorème 1.1 est le meilleur possible, la v.a. Y considérée satisfait aux hypothèses du théorème 1.3 dès que $k \geqq 3$ (et donc vérifie la loi du logarithme itéré) sans toutefois posséder la propriété de limite centrale.

Remarque 1.8. En analogie avec le théorème 1.3 reste ouverte la question d'une éventuelle loi du logarithme itéré sous les hypothèses du théorème 1.1 avec M vérifiant: $E\left\{\frac{M^2}{L_2 M}\right\} \leqq \infty$. Si, comme nous allons le voir, il est toujours possible d'atteindre la convergence en probabilité vers 0 de la suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on ne peut toutefois, faute d'une hypothèse nous assurant l'intégrabilité de $\|X\|^2$, conclure à la propriété de logarithme itéré. Nous donnons une preuve simple du fait que $\frac{S_n(X)}{a_n} \xrightarrow{P} 0$ à l'aide de l'élégante démonstration du théorème 1.1 de J. Zinn [17] sous la condition d'entropie de la remarque 1.2, mais une petite modification du lemme 1.5 nous permettrait de conclure sous l'hypothèse plus générale de mesure majorante du théorème 1.1.

Sous la condition d'entropie: $\int_0^1 (\operatorname{Log} N_\rho(S,u))^{\frac{1}{2}}\,du < \infty$, J. Zinn construit tout d'abord un écart ρ' continu sur (S,d), tel que:

$$\int_0^1 (\operatorname{Log} N_{\rho'}(S,u))^{\frac{1}{2}}\,du < \infty \quad \text{et} \quad \frac{\rho(s,t)}{\rho'(s,t)} \to 0 \text{ quand } \rho'(s,t) \to 0.$$

L'espace $B = \{x \in \mathscr{C}(S),\ |x(s)-x(t)| = o(\rho'(s,t))\}$ muni de la norme: $\|x\|_B = \|x\|$

$+ \sup_{\rho'(s,t) \neq 0} \dfrac{|x(s)-x(t)|}{\rho'(s,t)}$, étant un espace de Banach séparable, les propriétés de continuité de certaines séries aléatoires gaussiennes montrent que l'application identique de B dans $\mathscr{C}(S)$ est de type 2. La conclusion s'obtient alors de la proposition 7.2 de [6] puisque:

$$E\left\{\frac{\|X\|_B^2}{L_2\|X\|_B}\right\} < \infty.$$

2. La loi du logarithme itéré pour la fonction caractéristique empirique

Soit k un entier strictement positif; $\mathbb{R}^k$ est muni du produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne: $|t| = \langle t, t\rangle^{\frac{1}{2}}$, $t \in \mathbb{R}^k$. Pour une v.a. Y à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et une v.a. complexe ξ de carré intégrable, nous introduisons une fonction caractéristique empirique de Y en posant:

$$\forall \omega \in \Omega, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^k, \ \ C(\omega, t) = \xi(\omega) \exp(i < t, Y(\omega) >) - c(t)$$

où $c(t) = E\{\xi \exp(i < t, Y >)\}$; nous lui associons l'écart σ défini par:

$$\forall s, t \in \mathbb{R}^k, \sigma^2(s, t) = 4E\{|\xi \sin(\tfrac{1}{2} < s-t, Y >)|^2\}.$$

Le principal résultat concernant les propriétés limites de la fonction caractéristique empirique a été obtenu récemment par M.B. Marcus ([15], Theorem 1) pour la dimension 1 et S. Csörgő ([3], Theorem 3.1) pour les dimensions supérieures:

Théorème 2.1. *Si* $\int_0^1 (\operatorname{Log} N_\sigma([-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}]^k, u))^{\frac{1}{2}}\, du < \infty$, *pour tout compact S de* $\mathbb{R}^k$, *C satisfait au théorème de la limite centrale et à la loi du logarithme itéré compacte dans* $\mathscr{C}(S)$.

La démonstration du théorème 2.1 repose sur une formule de convexité ([5], Proposition 1.4.2) et sur une évaluation précise du premier moment d'une v.a. sous-gaussienne ([14], Theorem 4.1). Notre résultat général du paragraphe précédent résistant à toute tentative d'extension sous-gaussienne, nous adopterons, dans le but d'énoncer une condition suffisante propre à la loi du logarithme itéré, le point de vue lipschitzien développé dans la première partie.

Théorème 2.2. *Si* $\int_0^1 \psi(N_\sigma([-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}]^k, u))\, du < \infty$, *pour tout compact S* de $\mathbb{R}^k$, *C satisfait à la loi du logarithme itéré compacte dans* $\mathscr{C}(S)$.

Démonstration du théorème 2.2. L'écart σ étant invariant par translation, il suffit de prouver le résultat pour le compact $S = [-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}]^k$. Nous noterons désormais $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$ l'espace probabilisé des v.a. Y et ξ, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$ l'espace probabilisé d'une v.a. de Rademacher ε et $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'espace produit $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, P_1 \otimes P_2)$; E_1, E_2, E désigneront respectivement les opérateurs espérances. On pose:

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}^k, D(\omega, t) = \varepsilon(\omega_2)\, \xi(\omega_1) \exp(i < t, Y(\omega_1) >).$$

Pour tout $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ et $s, t \in \mathbb{R}^k$, on a:

$$\begin{aligned} &|D(\omega, s) - D(\omega, t)|^2 \\ &\quad = |\xi(\omega_1)|^2\, |\exp(i < s, Y(\omega_1) >) - \exp(i < t, Y(\omega_1) >)|^2 \\ &\quad = 4\, |\xi(\omega_1)|^2 \sin^2(\tfrac{1}{2} < s - t, Y(\omega_1) >) \equiv \rho^2(s, t; \omega_1)\, M^2(\omega) \end{aligned}$$

où $M(\omega) \equiv 1$ et $\rho(s, t; \omega_1) \equiv 2 |\xi(\omega_1) \sin(\frac{1}{2} < s - t, Y(\omega_1) >)|$. Pour chaque $\omega_1 \in \Omega_1$, $\rho(s, t; \omega_1)$ est un écart continu par rapport à la distance usuelle sur $\mathbb{R}^k$; $D(\omega_1, \omega_2)$ est donc lipschitzienne en ω_2 au sens du premier paragraphe. En outre:

$$\rho(s, t; \omega_1) \leqq 2\, |\xi(\omega_1)|\, (\tfrac{1}{2} |s - t|\, |Y(\omega_1)| \wedge 1) \equiv h(|s - t|; \omega_1).$$

Un argument de symétrie ([15], Lemma 2) et le lemme 1.5 dans l'espace $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$ impliquent que pour tout réel $\delta > 0$ et tout $\omega_1 \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned} &E_2 \left\{ \sup_{\substack{s, t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^k \\ |s - t| < \delta}} \left| \frac{S_n(C)(\omega_1, s) - S_n(C)(\omega_1, t)}{a_n} \right| \right\} \\ &\quad \leqq 2 E_2 \left\{ \sup_{\substack{s, t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^k \\ |s - t| < \delta}} \left| \frac{S_n(D)(\omega_1, s) - S_n(D)(\omega_1, t)}{a_n} \right| \right\} \\ &\quad \leqq 80 E_2 \left\{ N^{\varphi} \left(\frac{S_n(\tilde{D}(\omega_1))}{a_n} \right) \right\} \int_0^{\frac{1}{2} h(\delta; \omega_1)} \varphi^{-1} \left(\frac{K}{\lambda^{2k} \{ y \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^k, \rho(0, y; \omega_1) < u \}} \right) du \end{aligned}$$

où φ désigne la fonction de Young construite dans la première partie à partir de la fonction $\exp(u^2 L_2 u^2) - 1$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$ et K une constante dépendant de la seule dimension k. Après utilisation du lemme 1.6 et intégration par rapport à ω_1, l'inégalité de convexité de la proposition 1.4.2 de [5] fournit:

$$\begin{aligned} &E \left\{ \sup_{\substack{s, t \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^k \\ |s - t| < \delta}} \left| \frac{S_n(C)(s) - S_n(C)(t)}{a_n} \right| \right\} \\ &\quad \leqq 400 \int_0^{\frac{1}{2} E_1 \{ h(\delta; \omega_1) \}} \varphi^{-1} \left(\frac{K}{\lambda^{2k} \{ y \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^k, \sigma(y) < u \}} \right) du \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que:

$$E_1 \{ \rho(0, y; \omega_1) \} = 2 E \{ |\xi \sin(\tfrac{1}{2} < y, Y >)| \} \leqq \sigma(y).$$

La convergence de cette dernière intégrale étant une conséquence de la convergence de celle figurant dans l'énoncé du théorème (cf. [10], Chap. IV, Lemma 6.2) on déduit du théorème de la convergence dominée que la suite $\left(\frac{S_n(C)}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

converge en probabilité vers 0 dans $\mathscr{C}([-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^k)$; C étant de norme au carré intégrable, l'affirmation du théorème s'ensuit.

Remarque 2.3. Le même schéma de démonstration fournit une autre preuve au théorème 2.1. Par ailleurs, le lecteur se convaincra aisément de ce que les quatre suites considérées par S. Csörgő ([3], Sect. 9) vérifient toutes la loi du logarithme itéré sous l'hypothèse plus faible du théorème 2.2.

Remarque 2.4. Si C vérifie le théorème de la limite centrale, le processus gaussien (stationnaire à un centrage près) limite est à trajectoires continues. En conséquence, la condition d'entropie du théorème 2.1 est également nécessaire ([4], Théorème 8.1.1) pour que C vérifie le théorème de la limite centrale. Le problème d'une éventuelle réciproque au théorème 2.2 n'est pas résolu.

Indiquons brièvement en quel sens le théorème 2.2 précise l'énoncé 2.1: pour plus de simplicité nous poserons $k=1$ et $\xi \equiv 1$; nous poserons en outre, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\forall u \geqq \exp(\exp(e)),\ g_\varepsilon(u) = \operatorname{Log} u[\operatorname{Log}(\operatorname{Log} u)]^2\,[\operatorname{Log}(\operatorname{Log}(\operatorname{Log} u))]^{1+\varepsilon};$$
$$\forall u \in [0, \exp(\exp(e))[,\ g_\varepsilon(u) = 1.$$

Soit Y une v.a. réelle telle que: $E\{g_\varepsilon(|Y|)\} < \infty$ pour un ε, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$. D'après T. Kawata ([11], p. 419–428), déjà cité dans [2], $\sigma^2(s,t) = O\left[\left(g_\varepsilon\left(\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{-1}\right]$ quand $|s-t| \to 0$. On constate alors aisément que si le théorème 2.2 nous assure la propriété de logarithme itéré pour la fonction caractéristique empirique C de Y, rien ne permet d'y conclure sous l'hypothèse 2.1. Mieux, si d'aventure $\sigma^2(s,t)$ se comporte comme $\left(g_1\left(\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{-1}$ quand $|s-t| \to 0$, d'après la remarque précédente, C ne vérifiera pas le théorème de la limite centrale.

Le théorème 2.2 peut être de quelque utilité au statisticien et présenter certains avantages par rapport aux énoncés antérieurs. Traduite sous forme bornée, la loi du logarithme itéré offre tout d'abord un ordre de convergence p.s. vers 0 de la suite $\left(\frac{S_n(C)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; on a en effet, sous la condition d'entropie du théorème 2.2:

$$\sup_{t \in S} \left|\frac{S_n(C)(t)}{n}\right| = O\left(\left(\frac{L_2 n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{p.s.}$$

pour tout compact S de $\mathbb{R}^k$. Par ailleurs, si $\xi \equiv 1$, S. Csörgő ([3], Sect. 9) a identifié l'ensemble non aléatoire des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{S_n(C)}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; il s'agit du compact $\mathscr{K}_Y$ de $\mathscr{C}(S)$ déterminé à partir de la seule covariance de C, donc fonction caractéristique de Y puisque: $E\{C(s)\,\overline{C(t)}\} = c(s-t) - c(s)\,c(-t)$, défini par:

$$\mathscr{K}_Y = \{E\{f(Y)\exp(i<t, Y>)\},\ t \in S;\ f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, E\{f(Y)\} = 0, E\{f^2(Y)\} \leqq 1\}.$$

Sans exiger une convergence normale, le statisticien aura donc à sa disposition, sous les hypothèses du théorème 2.2, deux outils pour l'estimation d'une loi inconnue à partir de mesures empiriques: la convergence en probabilité vers 0 de la suite $\left(\frac{S_n(C)}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est, nous l'avons vu, équivalente à la propriété de logarithme itéré compacte) et l'ensemble des valeurs d'adhérence p.s. de cette même suite qui ne dépend que de la loi que l'on se propose de confronter à l'expérience. En outre, de récentes inégalités exponentielles permettent d'évaluer la loi de $\left(\frac{S_n(C)}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}(S)$ ([1], Theorem 5.4): il existe en effet deux constantes positives α et β telles que pour entier n et tout réel $u > 0$:

$$P\left\{\frac{\|S_n(C)\|}{a_n} > u\right\} \leqq \alpha \exp(-\beta u^2),$$

soit une évaluation du même ordre que celle qui s'obtiendrait d'une propriété de limite centrale.

Références

1. de Acosta, A.: Strong exponential integrability of sums of independent B-valued random vectors. Preprint (1980)
2. Csörgő, S.: Limit behaviour of the empirical characteristic function. Ann. Probab. **9**, 130–144 (1981)
3. Csörgő, S.: Multivariate empirical characteristic functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **55**, 203–229 (1981)
4. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'été de Probabilités de St-Flour 1974. Lecture Notes in Math. **480**, 1–96. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
5. Fernique, X.: Continuité et théorème central limite pour les transformées de Fourier des mesures aléatoires du second ordre. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **42**, 57–66 (1978)
6. Goodman, V., Kuelbs, J., Zinn, J.: Some results on the law of the iterated logarithm in Banach space with application to weighted empirical processes. Ann. Probab. **9**, 713–752 (1981)
7. Heinkel, B.: Théorème central-limite et loi du logarithme itéré dans $C(S)$. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **282**, 711–713 (1976)
8. Heinkel, B.: Quelques remarques relatives au théorème central limite dans $C(S)$. Vector Spaces Measures and Applications I, Dublin 1977. Lecture Notes in Math. **644**, 204–211. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
9. Jain, N.C., Marcus, M.B.: Central limit theorems for $C(S)$-valued random variables. J. Funct. Anal. **19**, 216–231 (1975)
10. Jain, N.C., Marcus, M.B.: Continuity of subgaussian processes. Probability on Banach Spaces. Advances in Probability and Related Topics **4**, 81–196 (1978)
11. Kawata, T.: Fourier Analysis in Probability Theory. New York: Academic Press 1972

12. Kuelbs, J.: Kolmogorov law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables. Ill. J. Math. **21**, 784–800 (1977)
13. Marcus, M.B.: Some new results on central limit theorems for $C(S)$-valued random variables. Probability in Banach Spaces, Oberwolfach 1975. Lecture Notes in Math. **526**, 167–186. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
14. Marcus, M.B.: Continuity and central limit theorem for random trigonometric series. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **42**, 35–56 (1978)
15. Marcus, M.B.: Weak convergence of the empirical characteristic function. Ann. Probab. **9**, 194–201 (1981)
16. Pisier, G.: Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975–1976, exposés 3 et 4
17. Zinn, J.: A note on the central limit theorem in Banach spaces. Ann. Probab. **5**, 283–286 (1977)

Reçu le 10 Juillet, 1981; en forme révisée le 4 Février 1982