Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
34, 129 – 134 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Une caractérisation de la loi de Cauchy

F.B. Knight[1] et P.A. Meyer[2]

[1] Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Ill. 61801, USA
[2] Laboratoire associé au CNRS, Université de Strasbourg,
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg-Cedex, France

Le présent travail est le résultat de discussions entre les deux auteurs, à la suite d'un exposé du premier auteur au séminaire de probabilités de Strasbourg, dans lequel le théorème 1 ci-dessous était établi sur $\mathbb{R}$ (par une méthode très différente). La dèmonstration sur $\mathbb{R}$ paraîtra en 1976 dans les Proceedings of the American Math. Society.

1. Notations et énoncé

Nous identifions l'espace $\mathbb{R}^n$ au complémentaire de l'hyperplan à l'infini dans l'espace projectif à n dimensions $\mathbb{P}_n$ – nous dirons précisément ci-dessous de quelle manière – et nous considérons une loi de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute transformation projective g de $\mathbb{P}_n$, nous pouvons (en considérant μ comme une loi sur $\mathbb{P}_n$ portée par $\mathbb{R}^n$) définir la mesure image $g\mu$. Notre but dans ce travail est de déterminer les mesures μ pour lesquelles la propriété (C) suivante est satisfaite:

(C) *Toutes les mesures $g\mu$ sont portées par $\mathbb{R}^n$, et du même type que μ.*

La réponse est extrêmement simple:

Théorème 1. *μ possède la propriété* (C) *si et seulement si μ est du type de Cauchy.*

Notre démonstration de ce résultat sera assez longue, mais plus «géométrique» qu'analytique. La première remarque que nous ferons, et qui jouera un grand rôle, est que *μ ne charge aucun hyperplan:* en effet, si μ chargeait un hyperplan H, en prenant pour g une projectivité envoyant H à l'infini on contredirait l'hypothèse suivant laquelle $g\mu$ est portée par $\mathbb{R}^n$.

Nous commençons par identifier $\mathbb{R}^n$ à l'hyperplan $\Pi = \{x^{n+1} = 1\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, au moyen de l'application $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, 1)$. L'espace projectif $\mathbb{P}_n$ étant l'espace des droites issues de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, le plongement de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{P}_n$ est alors celui qui associe, à $M \in \Pi$, la droite $0M \in \mathbb{P}_n$.

Soit M une matrice $(n+1, n+1)$ non dégénérée, que nous écrirons sous la forme $\begin{pmatrix} AB \\ Ce \end{pmatrix}$, où A est une matrice (n,n), B une colonne, C une ligne et $e \in \mathbb{R}$. M opère sur l'espace des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e. sur $\mathbb{P}_n$: si $x \in \mathbb{P}_n$ a pour coordonnées homogènes $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$, son transformé $g_M x = \bar{x} \in \mathbb{P}_n$ a pour coordonnées homogènes (avec des notations évidentes pour les coefficients de M)

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \sum_j{}_1^n a^i_j x^j + b^i x^{n+1} \qquad (i=1, \ldots, n) \\ \bar{x}^{n+1} &= \sum_j{}_1^n c_j x^j + e x^{n+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Les transformations g_M ainsi définies constituent le *groupe projectif* G, qui contient le *groupe affine* A $\left(\text{formé des projectivités } g \in G \text{ appliquant } \mathbb{R}^n \text{ dans lui même: les matrices } M \text{ correspondantes sont du type } \begin{pmatrix} AB \\ 0e \end{pmatrix}, \text{ avec } e \neq 0\right)$. La propriété (C) s'énonce ainsi:

pour tout $g \in G$, *il existe* $a \in A$ *tel que* $g\mu = a\mu$.

Deux matrices M et M' opèrent de la même manière sur les droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement s'il existe $t \neq 0$ tel que $tM = M'$. Une projectivité $g \in G$ admet donc

si n est pair, une représentation unique au moyen d'une matrice M de déterminant $+1$,

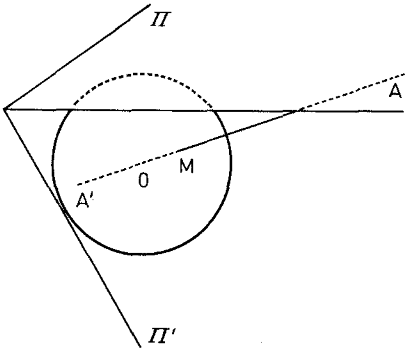
si n est impair, deux représentations au moyen de matrices M telles que $|\det(M)| = 1$, et ces deux matrices sont opposées.

Maintenant, une remarque importante. Soit à nouveau $M = \begin{pmatrix} AB \\ Ce \end{pmatrix}$ une matrice $(n+1, n+1)$, mais cette fois, au lieu de supposer que M est non dégénérée, supposons simplement que ses coefficients ne soient pas tous nuls. Les formules (1) définissent alors $g_M x = \bar{x}$, non plus partout, mais hors d'une variété projective de dimension $< n$. Comme μ ne charge pas les hyperplans projectifs, nous pouvons encore définir la mesure image $g_M \mu$, et il est facile de vérifier que l'application $M \mapsto g_M \mu$ est continue pour la topologie étroite sur $\mathbb{P}_n$.

Passons alors au quotient par la relation d'équivalence ($\exists\, t \neq 0$ tel que $tM = tM'$). Nous voyons que le groupe projectif G se plonge comme ouvert dense dans l'espace projectif à $(n+1)^2 - 1$ dimensions, qui est compact, et que nous noterons $\bar{G}$; l'application $g \mapsto g\mu$ sur G se prolonge en une application continue sur $\bar{G}$, que nous noterons encore $g \mapsto g\mu$. Par abus de langage, nous appellerons *projectivités dégénérées* les applications g_M (non partout définies) lorsque M est une matrice non nulle, mais dégénérée.

2. Partie directe du théorème 1

Nous vérifions que la loi de Cauchy usuelle γ sur $\mathbb{R}^n$ possède bien la propriété (C). Le mieux est de faire un dessin, avec la sphère unité $\mathbb{S}_n$, tangente à l'hyperplan Π en son «pôle Nord».



La loi γ est l'image de la répartition uniforme σ sur la sphère par l'application $M \mapsto A$ de $\mathbb{S}_n$ vers Π. Soit g une projectivité de Π. On peut décomposer g en une projection $A \mapsto A'$ de centre 0, de Π vers un hyperplan auxiliaire Π' ne passant pas par 0, suivie d'une application affine l de Π' sur Π. Quitte à modifier l, on peut supposer que la distance de 0 à Π' est égale à 1. Alors l'image γ' de γ par $A \mapsto A'$, qui est aussi l'image de σ par $M \mapsto A'$, est aussi une loi de Cauchy sur Π', et $g(\gamma) = l(\gamma')$ est bien du type de Cauchy sur Π.

3.

Nous passons à la réciproque, en commençant par deux petits lemmes.

Lemme 1. *Pour toute suite (g_n) d'éléments de G convergeant vers l'identité, il existe une suite extraite (g_{n_m}), une suite d'affinités (a_{n_m}) convergeant vers l'identité, telle que $g_{n_m}\mu = a_{n_m}\mu$ pour tout m.*

En effet, choisissons pour tout n une affinité $\bar{a}_n$ telle que $g_n\mu = a_n\mu$, extraire une suite $(\bar{a}_{n_m})$ qui converge dans $\bar{G}$ (compact) vers une «projectivité peut être dégénérée» $\bar{a}$. Comme g_n converge vers l'identité on a $\bar{a}\mu = \mu$, et cela exclut que $\bar{a}$ soit dégénérée (car $\bar{a}\mu$ serait alors portée par un hyperplan, et μ ne charge aucun hyperplan). Comme les $\bar{a}_{n_m}$ appliquent dans lui même l'hyperplan à l'infini, il en est de même de $\bar{a}$, qui est donc une affinité. Il ne reste plus qu'à poser $a_{n_m} = \bar{a}_{n_m}\bar{a}^{-1}$.

Lemme 2. *Soit K_μ l'ensemble des matrices M de déterminant 1 telles que $g_M\mu = \mu$. Alors K_μ est un groupe compact.*

Il suffit de démontrer le même résultat pour l'ensemble des matrices de déterminant ± 1 telles que $g_M\mu = \mu$. Comme l'application $M \mapsto g_M$ est propre (l'image réciproque de $g \in G$ comportant un élément si n est pair, deux si n est impair) il suffit de vérifier que l'ensemble H des $g \in G$ tels que $g\mu = \mu$ est compact. Or le même argument que ci-dessus montre que son adhérence dans $\bar{G}$ est formée de «projectivités» telles que $g\mu = \mu$, qui ne sauraient donc être dégénérées; H est donc fermé dans $\bar{G}$, et compact par conséquent.

4.

Soit L l'ensemble des matrices $M=\begin{pmatrix}AB\\Ce\end{pmatrix}$ non singulières (coefficients notés a^i_j, b^i, c_j, e). Considérons l'application $M\mapsto\int f(x)\,g_M\mu(dx)$ où f appartient à $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Il suffit de savoir dériver une fonction homographique pour vérifier que cette application est différentiable au point I (matrice identité) avec pour différentielle

$$\int\mu(dx)\big[\sum_{ij}da^i_j x^j D_i f(x)+\sum_i db^i D_i f(x)-de\sum_i D_i f(x)x^i-\sum_{ij}dc_j x^i x^j D_i f(x)\big].$$

Autrement dit, si l'on considère μ comme distribution sur $\mathbb{R}^n$, l'application $M\mapsto g_M\mu$ est faiblement différentiable et admet pour différentielle

$$-\sum_{ij}da^i_j D_i(x^j\mu)-\sum_i db^i D_i\mu+de\sum_i x^i D_i\mu+\sum_{ij}dc_j D_i(x^i x^j\mu). \tag{2}$$

Formellement – nous justifierons ce point rigoureusement un peu plus loin – si l'action du groupe projectif se réduit à celle du groupe affine, correspondant aux matrices $\begin{pmatrix}AB\\01\end{pmatrix}$, on doit avoir des relations linéaires de la forme suivante, pour $j=1,\dots,n$

$$\sum_i D_i(x^i x^j\mu)=\sum_{kl}u^{jk}_l D_k(x^l\mu)+\sum_k v^{jk}D_k\mu. \tag{3}$$

5.

Admettons ce point pour l'instant, et montrons comment il permet de démontrer le résultat de Knight sur $\mathbb{R}$ sans plus de travail: il s'écrit dans ce cas

$$D(x^2\mu)=uD(x\mu)+vD\mu, \qquad \text{ou encore } D((x^2-ux-v)\mu)=0$$

ainsi, il existe un polynôme du second degré $p(x)$ tel que $p\mu$ soit un multiple de la mesure de Lebesgue. Ce polynôme est nécessairement positif, et μ est une loi de Cauchy.

6.

Maintenant, démontrons l'existence d'une relation du type (3). Considérons la matrice $H=\begin{pmatrix}AB\\Ce\end{pmatrix}$ de coefficients $a^i_j=e=b^i=0$, $c_k=\delta^j_k$, et posons $g_t=g_{\exp(tH)}$. La formule (2) nous donne

$$\frac{d}{dt}\langle g_t\mu,f\rangle|_{t=0}=\sum_i\langle D_i(x^i x^j\mu),f\rangle. \tag{4}$$

Il existe une suite croissante (n_m) d'entiers, des affinités a_{n_m} convergeant vers l'identité (lemme 1)) telles que l'on ait

$$g_{1/n_m}\mu=a_{n_m}\mu.$$

Introduisons les coefficients de a_{n_m} sous la forme $\delta^i_j + \alpha^i_j(m)$, $\beta^i(m)$, et désignons par θ_m le sup des valeurs absolues des $\alpha^i_j(m)$, $\beta^i(m)$: θ_m tend vers 0 sans être nul, car les g_{1/n_m} ne sont pas des affinités. On peut écrire, à nouveau d'après (2)

$$\langle a_{n_m}\mu - \mu, f\rangle = -\sum_{ij} \alpha^i_j(m) \langle D_i(x^j \mu), f\rangle - \sum_i \beta^i(m) \langle D_i \mu, f\rangle + o(\theta_m).$$

Quitte à extraire encore une suite, on peut supposer que les coefficients $\theta_m^{-1} \alpha^i_j(m)$, $\theta_m^{-1} \beta^i(m)$, ont des limites α^i_j, β^i, et alors on a

$$\lim_m \frac{1}{\theta_m} \langle a_{n_m}\mu - \mu, f\rangle = -\sum \alpha^i_j \langle D_i x^j \mu, f\rangle - \sum \beta^i \langle D_i \mu, f\rangle \tag{5}$$

que l'on compare à (4):

$$\lim_m n_m \langle g_{1/n_m}\mu - \mu, f\rangle = \sum_i \langle D_i(x^i x^j \mu), f\rangle. \tag{6}$$

Il en résulte d'abord que $n_m \theta_m$ tend vers une limite finie et non nulle, et ensuite (4).

7.

Nous arrivons maintenant à la remarque cruciale de la démonstration.

Lemme 3. *Pour toute μ possédant la propriété (C), le groupe K_μ contient n sous-groupes à un paramètre indépendants.*

Partons en effet de la relation (3), fixons $j = 1, \ldots, n$, et considérons la matrice $H = \begin{pmatrix} AB \\ Ce \end{pmatrix}$ de coefficients

$$a^k_l = u^{jk}_l, \qquad b^k = v^{jk}, \qquad c_k = \delta^j_k, \qquad e = 0.$$

Posons $g_t = g_{\exp(tH)}$. Alors les relations (3) et (2) nous donnent

$$\frac{d}{dt} \langle g_t \mu, f\rangle |_{t=0} = 0 \qquad \text{pour toute } f \in C^\infty_c$$

et le sous-groupe à un paramètre (g_t) laisse μ invariante. Les matrices $\exp(tH)$ n'appartiennent pas à K_μ, car leur déterminant n'est pas égal à 1, mais les matrices $\exp(tH) \cdot e^{-t\,\mathrm{Tr}(A)/n+1}$ forment les sous-groupes cherchés (cette transformation revient à modifier la diagonale de H, et ne détruit évidemment pas l'indépendance des sous-groupes).

Lemme 4. *Si l'on fait opérer K_μ sur $\mathbb{P}_n$, l'orbite de tout point de $\mathbb{P}_n$ est $\mathbb{P}_n$ tout entier (autrement dit, $\mathbb{P}_n$ est un espace homogène de K_μ).*

En effet, K_μ est un groupe de matrices compact, donc un groupe de Lie opérant différentiablement sur l'espace $\mathbb{P}_n$ des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'orbite d'un point de $\mathbb{P}_n$ est donc une variété compacte. Si nous pouvons démontrer que cette variété est de dimension n, elle sera aussi ouverte, et ce sera $\mathbb{P}_n$ entier. Nous avons construit n sous-groupes à un paramètre indépendants dans le lemme précédent. En regardant comment ils opèrent sur le point de coordonnées homogènes $(1, 1, \ldots, 1, u)$, il est facile de voir que l'orbite de ce point dans $\mathbb{P}_n$ est effectivement de dimension n si u est grand, et le lemme est établi.

8.

Achevons alors la démonstration. Nous remarquons d'abord que tout groupe compact de matrices $(n+1, n+1)$ laisse invariante une forme quadratique positive non dégénérée sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit M une matrice non dégénérée, et soit $\lambda = g_M \mu$; on a $K_\lambda = M \cdot K_\mu \cdot M^{-1}$, et on peut donc choisir M telle que K_λ laisse invariante la forme quadratique $\sum x_i^2$. Comme λ et μ sont du même type, il nous suffit de montrer que λ est l'image de la loi uniforme sur $\mathbb{S}_n$ par l'application canonique de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathbb{P}_n$ (i.e. la loi de Cauchy usuelle dans l'identification de $\mathbb{P}_n$ privé de l'hyperplan à l'infini à l'hyperplan $\{x^{n+1} = 1\}$). Or soit λ' cette mesure image. Comme K_λ est un groupe de rotations de la sphère, λ' e λ sont toutes deux invariantes par l'action de K_λ. Comme $\mathbb{P}_n$ est un espace homogène de K_λ, l'unicité de la «mesure de Haar» d'un espace homogène (quand elle existe) entraîne que $\lambda = \lambda'$.

Reçu le 25 Avril 1975