Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 4, 74—77 (1965)

Eine Charakterisierung der vektorwertigen meßbaren Funktionen*

Von

PAUL GEORGIOU

Einleitung

Unseren Betrachtungen liegen ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{K}, \mu)$ und ein reeller lokalkonvexer Raum E zugrunde. Wie wohlbekannt ist, definiert man gewöhnlich zwei Begriffe der Meßbarkeit einer Funktion $f: \Omega \to E$, den der schwachen und jenen der starken Meßbarkeit. In der vorliegenden Note werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Funktion schwach oder stark meßbar ist. Die Hauptresultate lauten:

(i) Es existiert eine σ-Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}$ von Teilmengen von E, so daß eine Funktion $f: \Omega \to E$ genau dann schwach meßbar ist, wenn $f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}}) \subseteq \mathfrak{K}$.

(ii) Im Falle, daß E metrisierbar ist, ist eine Funktion $f: \Omega \to E$ dann und nur dann stark meßbar, wenn ihre $\tilde{\mathfrak{A}}$-Verteilung μ_f ein straffes Maß ist.

Herrn Professor Dr. KLAUS KRICKEBERG hat der Verf. für die Anregung zu dieser Arbeit herzlich zu danken.

Bezeichnungen: Γ bezeichne eine gerichtete Familie von Pseudonormen, die die Topologie von E definiert. E' sei der (topologische) Dualraum von E und Π der Raum der $\mathfrak{K}$-meßbaren Funktionen mit Werten in R (reelle Zahlengerade). Wenn $f \in E^{\Omega}$ und $x' \in E'$ ist, dann bezeichnen wir (wie üblich) mit $x' \circ f$ die Funktion: $\omega \to x'(f(\omega))$ von Ω in R. Wenn $A \subseteq E$ ist, dann bezeichnen: A^c das Komplement, $\mathring{A}$ das Innere, $\bar{A}$ (bzw. $\overline{C(A)}$) die abgeschlossene (bzw. die konvexe abgeschlossene) Hülle von A. Für $x \in E$, $p \in \Gamma$ und $\varrho > 0$ sei $S(x, p, \varrho) = \{y \in E; p(x-y) \leqq \varrho\}$.

1. Schwach meßbare Funktionen

Es sei $f \in E^{\Omega}$; definitionsgemäß (vgl. [7] wie auch [4]) heißt f *schwach meßbar*, wenn es für jedes $x' \in E'$ gilt $x' \circ f \in \Pi$. Demnach ist f genau dann schwach meßbar, wenn für jede Borelsche Teilmenge B von R und jedes $x' \in E'$ gilt $(x' \circ f)^{-1}(B) \in \mathfrak{K}$.

Es sei $\mathfrak{A} = \{x'^{-1}(B); B \text{ Borelsch} \subseteq R \text{ und } x' \in E'\}$. Damit wird f dann und nur dann schwach meßbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathfrak{K}$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$. Wenn $\tilde{\mathfrak{A}}$ die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra in $\mathfrak{P}(E)$ ist, dann folgt aus „$\forall A \in \mathfrak{A}: f^{-1}(A) \in \mathfrak{K}$", daß „$\forall A \in \tilde{\mathfrak{A}}: f^{-1}(A) \in \mathfrak{K}$". Daraus ergibt sich der

Satz 1. *Der Begriff der schwachen Meßbarkeit ist identisch mit jenem der* $\tilde{\mathfrak{A}}$-$\mathfrak{K}$-*Meßbarkeit.*

---

* Die vorliegende Arbeit wurde unterstützt durch die Königliche Griechische Forschungsstiftung.

2. Meßbare Funktionen

Es sei $A \subseteq E$. Für $p \in \Gamma$ und $\varrho > 0$ sei $A_{p\varrho} = A \cap (S(o, p, \varrho))^c$. Jedem $a \in A_{p\varrho}$ läßt sich (vgl. [2; Seite 102]) ein $x_a' \in E'$ so zuordnen, daß $x_a'(a) = p(a)$ und $|x_a'(x)| \leqq p(x)$, $x \in E$.

Dazu gilt das

Lemma. *Wenn die Menge $A_{p\varrho}$ dicht in $(S(o, p, \varrho))^c$ liegt, dann ist $S(o, p, \varrho) = \cap \{H_a;\, a \in A_{p\varrho}\}$, wobei $H_a = \{x \in E;\, x_a'(x) < p(a)\}$.*

Beweis: Es sei $M = \cap\{H_a;\, a \in A_{p\varrho}\}$. Offensichtlich ist $S(o, p, \varrho) \subseteq M$. Es ist auch $S(o, p, \varrho) \supseteq M$; in der Tat: es sei $x_0 \in M$ und $x_0 \notin S(o, p, \varrho)$. Wenn $K = \overline{C(S(o, p, \varrho) \cup \{x_0\})}$, dann ist $[o, x_0[\subseteq \overset{\circ}{K}$ (vgl. [2; Seite 51, Prop. 15]), wobei $[o, x_0[= \{y \in E;\, y = \lambda x_0 \text{ mit } 0 \leqq \lambda < 1\}$, und $K \subseteq M$. Es sei $x_1 \in [o, x_0[\cap (S(o, p, \varrho))^c$; x_1 ist dann ein innerer Punkt von $K \cap (S(o, p, \varrho))^c$, d. h. $x_1 \in \overset{\circ}{K} \cap (S(o, p, \varrho))^c$. Da aber $A_{p\varrho}$ dicht in $(S(o, p, \varrho))^c$ liegt, gibt es ein $a_0 \in A_{p\varrho}$, so daß $a_0 \in \overset{\circ}{K} \cap (S(o, p, \varrho))^c$. Daraus folgt, daß $a_0 \in M^c$, wie sich aus $a_0 \notin H_{a_0}$ ergibt. Das widerspricht $K \subseteq M$.

Hieraus ergibt sich das

Corollar. *Wenn E separabel ist, so gilt $S(x, p, \varrho) \in \tilde{\mathfrak{A}}$.*

Für den Rest dieses Paragraphen bezeichne E einen metrisierbaren lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Nach Definition (vgl. [5]) heißt $f \in E^\Omega$ *meßbar* (oder auch *stark meßbar*), wenn f der stochastische Limes einer Folge von einfachen Funktionen ist. $g \in E^\Omega$ heißt *einfach*, wenn eine endliche Zerlegung $\{K_i;\, i = 1, \ldots, k\}$ von Ω in $\mathfrak{K}$ existiert, so daß $g(K_i) = \{x_i\}\, (x_i \in E)$ ist.

Es sei dabei bemerkt, daß der Begriff der (starken) Meßbarkeit mit dem Meßbarkeitsbegriff von Bourbaki (cas des mesures abstraites; s. [1; Seite 196]) zusammenfällt. Das folgt aus der Tatsache, daß eine stark oder nach Bourbaki meßbare Funktion der gleichmäßige Limes einer Folge von elementaren (im Sinne von [6; Seite 83]) Funktionen ist (Folgerung des Satzes von Egoroff).

Mit Hilfe des Corollars beweist man leicht (vgl. [7; Theorem 3.5.3]) den:

Satz 2. *Es sei $f \in E^\Omega$; f ist dann und nur dann meßbar, wenn es schwach meßbar ist und ein abgeschlossener separabler Teilraum T von E existiert, so daß $\mu(f^{-1}(T^c)) = 0$.*

Es sei $\mathfrak{N}$ das Ideal der μ-Nullmengen von $\mathfrak{K}$; wir betrachten die Wahrscheinlichkeitsalgebra $(F, w) = (\mathfrak{K}/\mathfrak{N}, \mu/\mathfrak{N})$. Die Zufallsvariablen (vgl. [5]) auf (F, w) mit Werten in E sind die Äquivalenzklassen mod $\mathfrak{N}$ von meßbaren Funktionen; wir setzen $X = f/\mathfrak{N}$, wobei f meßbar. Solche Zufallsvariablen sind durch ihre Borelschen Spektralscharen, d. h. durch maßtreue Homomorphismen $(\mathfrak{B}', \mu') \to (F, w)$, charakterisiert; $\mathfrak{B}'$ bezeichnet eine geeignete von X abhängende Unteralgebra der Klasse der Borelschen Teilmengen von E und μ' eine Wahrscheinlichkeit. Andererseits sind in [5] notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein maßtreuer Homomorphismus $\varphi : (\mathfrak{B}', \mu') \to (F, w)$ eine Zufallsvariable definiert; es gilt nämlich der Satz, den wir hier ohne Beweis wiedergeben:

Satz 3. *φ ist die Borelsche Spektralschar einer Zufallsvariablen genau dann, wenn folgendes gilt:*

1. *Zu beliebigen* $p \in \Gamma$, ε *und* $\delta > 0$ *gibt es* $x_i^{p\varepsilon\delta} \in E$ *und* $\varrho_i \in R$, $i = 1, \ldots, k(p, \varepsilon, \delta)$, *so daß* $0 < \varrho_i \leqq \varepsilon$, $S_{ip\varepsilon\delta} = S(x_i^{p\varepsilon\delta}, p, \varrho_i) \in \mathfrak{B}'$ *und* $\mu'(\bigcup_{i=1}^{k} S_{ip\varepsilon\delta}) \geqq 1 - \delta$;

2. $B \in \mathfrak{B}'$ *dann und nur dann, wenn es zu jedem* $\delta^* > 0$ *ein* $q \in \Gamma$ *und positive Zahlen* ε', δ' *gibt, so daß*

$$\mu'(\bigcup_j \{S_{jp\varepsilon\delta};\ S_{jp\varepsilon\delta} \cap B_{q\varepsilon'} \neq \emptyset\}) < \delta^*$$

für p, ε *mit der Eigenschaft* $S(o, p, \varepsilon) \subseteq S(o, q, \varepsilon')$ *und* $\delta < \delta'$, *wobei* $B_{q\varepsilon'}$ *das Innere der Menge* $\cup \{S(y, q, \varepsilon');\ y \in$ *Rand von* $B\}$ *ist.*

Es sei $X = f/\mathfrak{N}$ die Zufallsvariable, die durch φ definiert ist. Wir setzen $\mathfrak{B}_X = \mathfrak{B}'$ und $\mu_X = \mu'$; $\tilde{\mathfrak{B}}_X$ bezeichne die von $\mathfrak{B}_X$ erzeugte σ-Algebra. Es ist dann $\tilde{\mathfrak{B}}_X \subseteq \mathfrak{B}_f$, wobei $\mathfrak{B}_f = \{B;\ B$ *Borelsch und* $f^{-1}(B) \in \mathfrak{K}\}$, *und* $\mu_X(B) = \mu(f^{-1}(B))$ (vgl. [5]).

3. Die $\tilde{\mathfrak{A}}$-Verteilung einer meßbaren Funktion

In diesem Paragraphen bezeichne E einen metrisierbaren lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Es seien $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von E und $\mathfrak{S}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{B}$; ein Maß μ' auf $\mathfrak{S}$ heißt *straff*, wenn zu jedem $\delta > 0$ eine präkompakte Menge K_δ existiert, so daß $\sup(\mu'(B);\ B \in \mathfrak{S}$ und $B \subseteq K_\delta^c) < \delta$.

Wenn f eine schwach meßbare Funktion ist, d.h. $f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}}) \subseteq \mathfrak{K}$, so nennen wir $\tilde{\mathfrak{A}}$-Verteilung von f das Maß μ_f auf $\tilde{\mathfrak{A}}$, das folgendermaßen definiert ist:

$$\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \tilde{\mathfrak{A}}.$$

Wir wollen nun eine hinreichende und notwendige Bedingung über $\tilde{\mathfrak{A}}$-Verteilung einer schwach meßbaren Funktion f dafür angeben, daß f meßbar ist.

Satz 4. *Es sei* X *eine Zufallsvariable auf* (F, w) *mit Werten in* E. *Zu jedem* $\delta > 0$ *existiert dann eine präkompakte Teilmenge* K_δ *von* E, *so daß* $\mu_X(K_\delta) \geqq 1 - \delta$.

Beweis: Da E metrisierbar ist, setzen wir $\Gamma = \{p_n;\ n \in N\}$. Für $\delta > 0$ bezeichne δ_n (bzw. δ_{nm}) die Zahl $\delta/2^n$ (bzw. $\delta/2^{n+m}$); offensichtlich ist $\sum_{n,m} \delta_{nm} = \delta$. $(\varepsilon_j)_{j\in N}$ sei eine fallende und gegen $0 (\in R)$ konvergierte Folge. Nach Satz 3 existieren zu allen $p_n \in \Gamma$, $\delta > 0$ (mit $\delta < 1$) und $\varepsilon > 0$ Mengen $S_{ip_n\varepsilon_m\delta_n} \in \mathfrak{B}_X$, $i = 1, \ldots, k(p_n, \varepsilon, \delta_n)$, wobei $m = \min(j;\ \varepsilon_j \leqq \varepsilon)$, so daß $\mu_X(\bigcup_{i=1}^{k} S_{ip_n\varepsilon_m\delta_n}) \geqq$ $\geqq 1 - \delta_{nm}$. Es sei $K_\delta = \bigcap_{n,m} (\bigcup_i S_{ip_n\varepsilon_m\delta_n})$; es ist $K_\delta \in \mathfrak{B}_X$ und, wie man leicht bestätigen kann,

$$\mu_X(K_\delta) = \lim_{\nu,\lambda} \mu_X(\bigcap_{n=1}^{\nu} \bigcap_{m=1}^{\lambda} (\bigcup_i S_{ip_n\varepsilon_m\delta_n}))$$

$$\geqq \lim_{\nu,\lambda} (1 - \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\lambda} \delta_{nm}) \geqq 1 - \delta;$$

außerdem ist K_δ eine präkompakte Teilmenge von E (vgl. [3; Seite 41, Prop. 14]).

Satz 5. *Wenn $f \in E^{\Omega}$ meßbar ist, dann ist μ_f straff.*

Beweis: Es sei $X = f/\mathfrak{N}$. Dann existiert nach dem vorigen Satze zu jedem $\delta > 0$ (mit $\delta < 1$) eine präkompakte Menge K_δ, so daß $\mu(f^{-1}(K_\delta)) \geqq 1 - \delta$; daraus haben wir $\mu(f^{-1}(B)) < \delta$ für alle $B \in \mathfrak{B}_f$ und $B \subseteq K_\delta^c$ und folglich $\mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B) < \delta$ für alle $B \in \tilde{\mathfrak{A}}$ und $B \subseteq K_\delta^c$.

Satz 6. *Es sei $f \in E^{\Omega}$ schwach meßbar; wenn μ_f straff ist, dann ist f meßbar.*

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir folgende Bemerkung voraus: Es sei Z ein Hausdorffscher uniformer Raum mit einer abzählbaren Basis von Nachbarschaften. Wenn seine vollständige Hülle $\tilde{Z}$ separabel ist (d.h. wenn eine abzählbare überall dichte Teilmenge von $\tilde{Z}$ existiert), dann ist Z auch separabel; das folgt unmittelbar aus der Voraussetzung, daß Z Hausdorffsch ist, und aus der Tatsache, daß die Topologie von $\tilde{Z}$ eine abzählbare Basis besitzt. Daher sind nicht nur die kompakten, sondern auch die präkompakten Teilmengen eines metrisierbaren Raumes separabel.

Beweis des Satzes 6: Es seien $(\delta_n)_{n \in N}$ eine fallende und gegen 0 ($\in R$) konvergierte Folge, K_n, $n \in N$ die zu δ_n entsprechenden präkompakten Mengen, so daß

$$\sup(\mu_f(B);\ B \in \tilde{\mathfrak{A}} \text{ und } B \subseteq K_n^c) < \delta_n, \quad n \in N$$

und $A = \bigcup_{n \in N} K_n$. Aus der vorigen Bemerkung folgt, daß A separabel ist; außerdem ist $\mu_f^*(A) = 1$ (μ_f^* das zu μ_f gehörige äußere Maß). Wenn also T der von A erzeugte abgeschlossene Teilraum von E ist, dann ist T separabel und $\mu_f^*(T) = 1$; also $\mu(f^{-1}(T^c)) = 0$. Folglich ist f meßbar nach Satz 2.

Literatur

[*1*] Bourbaki, N.: Intégration, chap. 1—4. Act. Sci. et Ind. 1175. Paris: Hermann 1952.

[*2*] — Espaces vectoriels topologiques, chap. 1—2. Act. Sci. et Ind. 1189. Paris: Hermann 1953.

[*3*] — Topologie générale, chap. 9. Act. Sci. et Ind. 1045. Paris: Hermann 1958.

[*4*] — Intégration, chap. 6. Act. Sci. et Ind. 1281. Paris: Hermann 1959.

[*5*] Georgiou, P.: Vektorwertige Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung. Arch. der Math. (in Vorbereitung).

[*6*] Halmos, P. R.: Measure Theory. Princeton, N. J.: D. van Nostrand 1959.

[*7*] Hille, E., and R. S. Phillips: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1957.

Mathematisches Institut der Universität Athen
Solonos Str. 57
Athen (143), Griechenland

(Eingegangen am 29. Juni 1964)