Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
39, 217–229 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Une loi du logarithme itéré pour le groupe d'Heisenberg

Pierre Crepel[1] et Bernard Roynette[2]

[1] Sciences mathématiques, Université de Nancy I, F-54037 Nancy Cedex, France

[2] Département de mathématiques et Informatique, Université de Rennes I, F-35031 Rennes Cedex, France

0. Introduction

Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi, centrées et ayant un moment d'ordre $2(\sigma^2 = EX_1^2)$. Il est bien connu que l'ensemble des points d'accumulation de $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{2n \log\log n}}$ est p.s non aléatoire et égal au segment $[-1, 1]$.

Nous nous proposons d'étudier ici le comportement asymptotique d'une marche aléatoire non plus sur $\mathbb{R}$ mais sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_1$, et d'établir un résultat analogue à celui qui vient d'être cité.

Remarquons qu'une étude de ce type a été faite dans [1] pour le cas du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$.

Le groupe de Heisenberg possède la propriété d'être le plus simple des groupes nilpotents non abéliens. La généralisation d'un théorème abélien à une classe de groupes plus généraux (nilpotents, résolubles, moyennables, ...) passe donc naturellement par l'étude de groupes tels que $\mathbb{H}_1$, «$a x + b$», déplacements de $\mathbb{R}^d$.

Récemment A. Raugi, dans un article à paraître, a montré que l'étude du théorème de la limite centrale sur les groupes de Lie se ramène à l'étude de ce problème sur certains groupes particuliers (dont les groupes nilpotents). Il n'est pas interdit de penser qu'on puisse faire dans cet esprit un travail analogue pour la loi du logarithme itéré.

Enfin, on peut remarquer que la loi du logarithme itéré classique a trait à des v.a. en dépendance linéaire. Il est donc naturel de chercher une même loi pour des v.a. en dépendance polynômiale, et en particulier en dépendance polynômiale de de degré 2, comme dans le problème traité ici.

1. Notations et énoncé

Le groupe $\mathbb{H}_1$ est l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de la multiplication:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \tfrac{1}{2}(x y' - y x')).$$

Soit (X_n, Y_n, Z_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi, centrées à valeur dans $\mathbb{H}_1$ et tellé que (X_1, Y_1) ait un moment d'ordre $2+\delta$, $(\delta>0)$, et Z_1 un moment d'ordre 1.

La troisième composante T_n de la marche aléatoire droite

$$(X_1, Y_1, Z_1)\cdot(X_2, Y_2, Z_2)\dots(X_n, Y_n, Z_n)$$

est égale à:

$$T_n = Z_1 + \cdots + Z_n + \tfrac{1}{2}\{X_1 Y_2 + (X_1+X_2) Y_3 + \cdots + (X_1+\cdots+X_{n-1}) Y_n - Y_1 X_2 - (Y_1+Y_2) X_3 - \cdots - (Y_1+\cdots+Y_{n-1}) X_n\}.$$

Bien sûr, c'est cette composante qui est la plus intéressante à étudier. Nous proposons de démontrer ici:

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, l'ensemble des points d'accumulation de* $\dfrac{T_n}{n\log\log n}$ *est p.s égal au segment* $\left(-\dfrac{1}{C\pi}, \dfrac{1}{C\pi}\right)$, *où* C *est une constante ne dépendant que des moments d'ordre 2 de* (X_1, Y_1)*:*

$$C = \{E(X_1^2)\cdot E(Y_1^2) - (E(X_1\cdot Y_1))^2\}^{-1/2}.$$

La suite de cet article consiste en la démonstration de ce théorème.

Nous allons d'abord faire quelques remarques simples qui permettent de réduire le problème à un cas particulier plus maniable:

a) D'après la loi forte des grands nombres, $\dfrac{Z_1+\cdots+Z_n}{n}$ converge p.s. vers 0; on peut donc supposer que $Z_i = 0 (\forall i)$

b) Un changement de variable nous permet de supposer que $EX_1^2 = EY_1^2 = 1$, $EX_1 Y_1 = 0$, $C=1$.

En effet il suffit pour cela de remarquer que l'application: $\mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1$ définie sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice:

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta & 0 \\ -b\sin\theta & b\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme du groupe $\mathbb{H}_1$.

Et, dans ces conditions, on peut remplacer X_1 et Y_1 par

$$X_1' = a(X_1\cos\theta + y_1\sin\theta) \quad \text{et} \quad Y_1' = b(-X_1\sin\theta + Y_1\cos\theta)$$

(cela revient à remplacer T_n par $T_n' = ab\, T_n$).

Si l'on choisit θ, a et b convenablement, c'est à dire tels que

$$EX_1' Y_1' = 0 \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2EX_1 Y_1}{EX_1^2 - EY_1^2},$$

$$EX_1'^2 = 1 \quad \text{i.e.} \quad a^2\cdot E(X_1\cos\theta + Y_1\sin\theta)^2 = 1,$$

$$EY_1'^2 = 1 \quad \text{i.e.} \quad b^2\cdot E(-X_1\sin\theta + Y_1\cos\theta)^2 = 1,$$

alors on obtient la réduction cherchée, car un calcul élémentaire montre que $ab = C$ (la constante définie dans le théorème).

Sous ces nouvelles hypothèses: $Z_i = 0 (\forall i)$, $EX_1^2 = EY_1^2 = 1$, $EX_1 Y_1 = 0$ le résultat à démontrer est donc que:

$$\frac{\pi T_n}{\log \log n} \text{ a p.s. pour ensemble dérivé } [-1, 1].$$

2. Théorème central limite et vitesse de convergence

Comme dans le cas classique de $\mathbb{R}$, nous établissons d'abord un théorème central limite avec vitesse de convergence et nous en déduisons ensuite la loi du logarithme itéré.

Pour le groupe $\mathbb{H}_1$, il existe un théorème central limite (cf. [6], et plus récemment [2]). La méthode que nous allons utiliser est différente et donne des précisions nouvelles sur la limite et sur la vitesse de convergence. Elle s'appuie sur certaines idées de [4].

Proposition. *Sous les hypothêses précédentes, il existe c et $\alpha > 0$ telles que:*

$$\left| P\left(a \leqq \frac{T_n}{n} \leqq b\right) - \int_a^b \frac{dx}{\operatorname{ch} \pi x} \right| \leqq \frac{c}{n^\alpha} \qquad \begin{array}{l} \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{array}$$

(Nous ne cherchons ici aucune précision sur c et α.)

Démonstration. La démonstration est longue et fait l'objet de toute la suite du point 2. En gros, il s'agit de montrer qu'on peut se ramener à l'étude de $\frac{T_{nk}}{nk}$ où n et k sont convenablement choisis, et d'utiliser pour cette étude un théorème central limite pour somme de v.a. *indépendantes* à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

a) *Préliminaires*

Ecrivons T_{nk} sous la forme:

$$\begin{aligned} 2T_{nk} = \{ & X_1 Y_2 + \cdots + (X_1 + \cdots + X_{k-1}) Y_k \\ & + (X_1 + \cdots + X_k)(Y_{k+1} + \cdots + Y_{2k}) + X_{k+1} Y_{k+2} + \cdots + (X_{k+1} + \cdots + X_{2k-1}) Y_{2k} \\ & + (X_1 + \cdots + X_{2k})(Y_{2k+1} + \cdots + Y_{3k}) + X_{2k+1} Y_{2k+2} \\ & + \cdots + (X_{2k+1} + \cdots + X_{3k-1}) Y_{3k} \\ & + \cdots + (X_1 + \cdots + X_{(n-1)k})(Y_{(n-1)k+1} + \cdots + Y_{nk}) + X_{(n-1)k+1} Y_{(n-1)k+2} \\ & + \cdots + (X_{(n-1)k+1} + \cdots + X_{nk-1}) Y_{nk} \\ - & \text{ des termes symétriques («t.s.»)} \} \end{aligned}$$

Posant alors:

$$\begin{aligned} N_p^k &= X_{pk+1} Y_{pk+2} + \cdots + (X_{pk+1} + \cdots + X_{(p+1)k-1}) Y_{(p+1)k} \\ M_p^k &= X_1 + \cdots + X_{(p+1)k} \\ Q_p^k &= Y_1 + \cdots + Y_{(p+1)k}, \end{aligned}$$

on a alors:

$$T_{nk}=\tfrac{1}{2}\{N_0^k+N_1^k+\dots+N_{n-1}^k)+(M_0^k(Q_1^k-Q_0^k)+\dots+M_{n-2}^k(Q_{n-1}^k-Q_{n-2}^k)]\text{-t.s.}\}.$$

Pour chercher la limite de $\frac{T_{nk}}{nk}$, nous allons montrer que:

$$\frac{N_0^k+\dots+N_{n-1}^k}{nk} \text{ est négligeable (ainsi que le t.s.)} \tag{A}$$

$$\frac{M_0^k(Q_1^k-Q_0^k)+\dots+M_{n-2}^k(Q_{n-1}^k-Q_{n-2}^k)\text{-t.s.}}{nk}=W_n^k \text{ est proche de:}$$

$$\frac{M_0'(Q_1'-Q_0')+\dots+M_{n-2}'(Q_{n-1}'-Q_{n-2}')\text{-t.s.}}{n}=W_n' \tag{B}$$

où M_i', Q_i' sont des v.a. gaussiennes convenablement choisies

la loi de $\frac{M_0'(Q_1'-Q_0')+\dots+M_{n-2}'(Q_{n-1}'-Q_{n-2}')\text{-t.s.}}{n}$ est proche de la probabilité de densité $\frac{1}{\operatorname{ch}\pi x}$. (C)

(Pour des raisons techniques, nous ferons ce tiercé dans le désordre.)

b) **Lemme 1** (*correspondant au* (B)).
Il exite une constante $c_1>0$ et une v.a. gaussienne

$$G_n=(M_0', Q_0', M_1', Q_1', \dots, M_{n-1}', Q_{n-1}')$$

dont la covariance est précisée ci-dessous, telles que

$$\left|P\left(a\leqq\frac{M_0^k(Q_1^k-Q_0^k)+\dots+M_{n-2}^k(Q_{n-1}^k-Q_{n-2}^k)\text{-t.s.}}{nk}\leqq b\right)\right.$$
$$\left.-P\left(a\leqq\frac{M_0'(Q_1'-Q_2')+\dots+M_{n-2}'(Q_{n-1}'-Q_{n-2}')\text{-t.s.}}{n}\leqq b\right)\right|\leqq\frac{c_1 n^{10}}{k^{\delta/2}}$$

$\forall a, b\in\overline{\mathbb{R}}, \quad \forall n, k\in\mathbb{N}^*.$

Pour démontrer ce lemme nous avons besoin de deux résultats auxiliaires:

– le premier est un théorème de Sazonov relatif à la vitesse de convergence dans le théorème central limite classique dans un espace enclidien $\mathbb{R}^d$:

Théorème de Sazonov (version simplifiée) cf [5]. *Soit (ζ_k) une suite de v.a., à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$, indépendantes et de même loi, centrées et de matrice de covariance Λ. Soit Γ une v.a. gaussienne centrée de même covariance. Alors, en supposant*

$$E\|\zeta_1\|^{2+\delta}<\infty(\delta>0),$$

on a, pour tout ensemble $C\in\mathscr{C}$:[1]

[1] $\mathscr{C}$ est une classe de parties suffisamment régulières de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant par exemple les régions délimitées par des hyperquadriques

$$\left|P\left(\frac{\zeta_1+\cdots+\zeta_k}{\sqrt{k}}\in C\right)-P(\Gamma\in C)\right|\leqq\frac{c_2\, n^4\, E|(\Delta^{-1}\zeta_1,\zeta_1)|^{1+\delta/2}}{k^{\delta/2}},$$

– le second est un simple résultat technique:

Sous-lemme. *Soit*

$$\begin{aligned}S_n^2=&\,U_0^2+V_0^2+(U_0+U_1)^2+(V_0+V_1)^2+\cdots+(U_0+\cdots+U_{n-1})^2\\&+(V_0+\cdots+V_{n-1})^2\end{aligned}$$

où $(U_0, V_0), \ldots, (U_{n-1}, V_{n-1})$ *est une suite de v.a. indépendantes et de même loi, à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$, *et admettant un moment d'ordre* $2+\delta$ $(0<\delta<2)$.

Alors $E(S_n^{2+\delta})\leqq c_3\, n^6$ *où* c_3 *est une constante.*

Démonstration du sous-lemme. S_n^2 apparaît, après développement des carrés, comme une somme de $p_n=2(1+2^2+\cdots+n^2)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\leqq n^3$ termes de la forme $U_i U_j$ ou $V_i V_j$.

En appliquant aux termes de cette somme l'inégalité élémentaire suivante:

$$\begin{aligned}|a_1+\cdots+a_p|^{1+\delta/2}&=|a_1+\cdots+a_p|\,|a_1+\cdots+a_p|^{\delta/2}\\&\leqq(|a_1|+\cdots+|a_p|)\,(|a_1|^{\delta/2}+\cdots+|a_p|^{\delta/2})\\&\leqq p(|a_1|^{1+\delta/2}+\cdots+|a_p|^{1+\delta/2})\end{aligned}$$

on obtient que $ES_n^{2+\delta}$ est inférieur à p_n fois une somme de p_n termes de la forme $E|U_i U_j|^{1+\delta/2}$ ou $E|V_i V_j|^{1+\delta/2}$.

Comme pour x et $y\in R$, $|x\,y|^{1+\delta/2}\leqq\frac{1}{2}(|x|^{2+\delta}+|y|^{2+\delta})$, on obtient alors aisément que:

$$ES_n^{2+\delta}\leqq\tfrac{1}{2}\,p_n^2(E|U_0|^{2+\delta}+E|V_0|^{2+\delta})\leqq c_3\, n^6.$$

Démonstration du lemme. Soient $(U_0, V_0), \ldots, (U_{n-1}, V_{n-1})$ n couples de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, indépendantes et de même loi que (X_1, Y_1).

Notons R_n la v.a. $(U_0, U_0+U_1, \ldots, U_0+\cdots+U_{n-1}, V_0, V_0+V_1, \ldots, V_0+\cdots+V_{n-1})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$. Considérons alors une suite R_n^k de v.a. indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$, et de même loi que R_n. Alors, pour tout k, la loi de $\left(\frac{M_0^k}{\sqrt{k}}, \ldots, \frac{M_{n-1}^k}{\sqrt{k}}, \frac{Q_0^k}{\sqrt{k}}, \ldots, \frac{Q_{n-1}^k}{\sqrt{k}}\right)$ est la même que celle de $\frac{R_n^1+\cdots+R_n^k}{\sqrt{k}}$. (La démonstration de ce résultat est évidente, il s'agit d'un simple réarrangement de notations.)

– La v.a. R_n, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$, est centrée et a pour matrice de covariance.

$$\Delta_n=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2\ \cdots & 2 & & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 1 & 2 & & n & & & & \\ \hline & & & & 1 & 1 & \cdots & 1\\ & & 0 & & 1 & 2 & 2\ \cdots & 2\\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & 1 & 2 & & n\end{array}\right)$$

Considérons donc une v.a. gaussienne $G_n=(M'_0, Q'_0, N'_1 \to M'_1, \dots, Q'_{n-1})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$, centrée et de même covariance (Δ_n) que R_n; alors, grâce au théorème de Sazonov:

$$\left|P\left\{\left(\frac{M_0^k}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{M_{n-1}^k}{\sqrt{k}}, \frac{Q_0^k}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{Q_{n-1}^k}{\sqrt{k}}\right) \in C\right\} - P\{(M'_0, \dots, M'_{n-1}, Q'_0, \dots, Q'_{n-1}) \in C\}\right.$$
$$\leqq \frac{c_2 n^4 E\|R_n\|^{2+\delta}}{k^{\delta/2}} \qquad \forall n,\ k \in \mathbb{N}, \quad \forall C \in \mathscr{C}.$$

Le sous-lemme nous permet d'affirmer que cette quantité est inférieure à

$$\frac{c_4 n^{10}}{k^{\delta/2}}.$$

– Enfin, dans $\mathbb{R}^{2n}$, la courbe définie par:

$$x_0(y_1-y_0)+\dots+x_{n-2}(y_{n-1}-y_{n-2})-y_0(x_1-x_0)-\dots-y_{n-2}(x_{n-1}-x_{n-2})=r$$

(où les x_i et y_i sont les $2n$ coordonnées, et où r est une constante) est une hyperquadrique.

On en déduit aisément que:

$$\left|P\left\{a \leqq \frac{M_0^k(Q_1^k-Q_0^k)+\dots+M_{n-2}^k(Q_{n-1}^k-Q_{n-2}^k)\text{-t.s.}}{nk} \leqq b\right\}\right.$$
$$\left. - P\left\{a \leqq \frac{M'_0(Q'_1-Q'_0)+\dots+M'_{n-2}(Q'_{n-1}-Q'_{n-2})\text{-t.s.}}{n} \leqq b\right\}\right|$$
$$\leqq \frac{c_1 n^{10}}{k^{\delta/2}} \qquad \forall a,\ b \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \forall n,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 1.

c) Résolution du point (C)

Lemme 2. *Il existe des constantes c_5 et $\alpha_2 > 0$ telles que*

$$\left|P\left(a \leqq \frac{W'_n}{n} \leqq b\right) - \int_a^b \frac{dx}{\operatorname{ch} \pi x}\right| \leqq \frac{c_5}{n^{\alpha_2}} \qquad \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(où W'_n est définie par la formule de (B) avec le choix des $(M'_0, Q'_0, \dots, Q'_{n-1})$ fait au lemme 1).

Démonstration du lemme. Pour cela, nous utiliserons l'inégalité classique (cf. [3], p. 285). Si μ et ν sont deux probabilités sur $\mathbb{R}$ (ν ayant une densité bornée par M), alors:

$$|\mu(I)-\nu(I)| \leqq \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{|\hat{\mu}(t)-\hat{\nu}(t)|}{t} dt + \frac{24M}{\pi T}$$

pour tout intervalle I, et pour tout $T>0$.

On vérifie aisément que la loi de $\frac{W_n'}{n}$ est celle de $\frac{1}{2n}\,{}^tXMX$ où X est un vecteur gaussien réduit dans $\mathbb{R}^{2n}$ et où M est la matrice $\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline {}^tA & 0 \end{array}\right)$ d'une forme quadratique.

[A désignant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \dots\dots\dots 1 \\ -1 & 0 \quad\quad \vdots \\ \vdots & \ddots \quad 1 \\ -1 \dots\dots & -1 \dots 0 \end{pmatrix}$ d'ordre n.]

Il est alors bien connu que la fonction caractéristique $\varphi_n(t)$ de $\frac{W_n'}{n}$ est égale à $\varphi_n(t) = \left[\det\left(I - \frac{it}{2n} M\right)\right]^{-1/2}$.

Or grâce à la formule de calcul des déterminants par blocs, on a

$$\det\left(I - \frac{it}{2n} M\right) = \det\left(I - \frac{t^2}{4n^2} A^2\right) = \det\left(I - \frac{t}{2n} A\right) \cdot \det\left(I + \frac{t}{2n} A\right).$$

Or ces deux derniers déterminants étant visiblement égaux, on en tire que $\varphi_n(t) = \left[\det\left(I + \frac{t}{2n} A\right)\right]^{-1}$.

Un calcul de récurrence classique pour le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x \dots\dots\dots x \\ -x & 1 \quad\quad \vdots \\ \vdots & \ddots \quad x \\ -x \dots\dots & -x \quad 1 \end{vmatrix}$$

donne que $\Delta_n = \frac{1}{2}\left[(1+x)^n + (1-x)^n\right]$.

Il en résulte que $\varphi_n(t) = \left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{t}{2n}\right)^n + \left(1 - \frac{t}{2n}\right)^n\right]\right\}^{-1}$.

Un calcul élémentaire montre alors que

$$\left|\varphi_n(t) - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{t}{2}}\right| \leqq \frac{t^2}{4n} \qquad \forall t \leqq n.$$

L'inégalité classique rappelée plus haut nous donne alors que

$$\left|P(\quad) - \int_a^b\right| \leqq \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{t}{4n}\, dt + \frac{24}{\pi T} = \frac{T^2}{4\pi n} + \frac{24}{\pi T}.$$

Il suffit de prendre $T = n^{1/3}$ pour obtenir le résultat cherché.

N.B. Cette démonstration a été simplifiée grâce à une remarque de M. J. Lacroix.

M. J. Neveu nous a fait remarquer que P. Lévy, dans son livre Processus stochastiques et mouvement brownien, fait des calculs un peu analogues pour l'étude d'une aire liée au mouvement brownien. Mais il ne nous semble pas qu'on puisse en déduire plus simplement le résultat précédent.

d) Résolution du point (A)

Les deux paragraphes précédents nous ont permis d'aboutir au résultat suivant:

Lemme 1+2. *Il existe deux constantes c_7 et $\alpha_2>0$ telles que:*

$$\left|P\left(a\leqq\frac{W_n^k}{n\,k}\leqq b\right)-\int_a^b\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}\right|\leqq\frac{c_7}{n^{\alpha_2}}\qquad\forall a,\ b\in\overline{\mathbb{R}},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\geqq n^{21/\delta}.$$

Nous allons maintenant montrer le lemme suivant:

Lemme 3. *Il existe deux constantes c_8 et $\alpha_3>0$ telles que:*

$$\left|P\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\,b\right)\leqq-\int_a^b\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}\right|\leqq\frac{c_8}{n^{\alpha_3}}\qquad\forall a,\ b\in\overline{\mathbb{R}},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ k\geqq n^{21/\delta}.$$

Démonstration. Il suffit, bien sûr, pour cela, d'étudier:

$$\left|P\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{n\,k}\leqq b\right)-P\left(a\leqq\frac{W_n^k}{n\,k}\leqq b\right)\right.$$

$$=P\left(a\leqq\frac{W_n^k+\frac{1}{2}(N_0^k+\cdots+N_{n-1}^k\text{-t.s.})}{n\,k}\leqq b\right)-P\left(a\leqq\frac{W_n^k}{n\,k}\leqq b\right)$$

$$=\int\limits_{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{N_0^k+\cdots+N_{n-1}^k\text{-t.s.}}{nk}\right)>\varepsilon\right\}}\left[1_{\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\leqq b\right)}-1_{\left(a\leqq\frac{W_n^k}{nk}\leqq b\right)}\right]dP$$

$$+\int\limits_{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{N_0^k+\cdots+N_{n-1}^k\text{-t.s.}}{nk}\right)\leqq\varepsilon\right\}}\text{idem.}$$

La valeur absolue de cette quantité est majorée par:

$$P(N_0^k+\cdots+N_{n-1}^k\text{-t.s.}>2\varepsilon\,n\,k)+P\left(\frac{W_n^k}{n\,k}\in[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\cup[b-\varepsilon,b+\varepsilon]\right).$$

Comme $E(N_0^k+\cdots+N_{n-1}^k)^2=0\,(n\,k^2)$, on peut, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, majorer le premier terme par $\dfrac{c_9}{n\,\varepsilon^2}$.

Le second terme, lui, grâce au lemme 1+2, peut être majoré par

$$2\frac{c_7}{n^{\alpha_2}}+\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}+\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}\leqq\frac{2c_7}{n^{\alpha_2}}+4\varepsilon.$$

Finalement, la quantité étudiée est inférieure à

$$\frac{c_9}{\varepsilon^2 n}+\frac{2c_7}{n^{\alpha_2}}+4\varepsilon\leqq\frac{c_9}{n^{1/3}}+\frac{2c_7}{n^{\alpha_2}}+\frac{4}{n^{1/3}}\leqq\frac{c_8}{n^{\alpha_4}}\qquad\left(\text{si l'on prend }\varepsilon=\frac{1}{n^{1/3}}\right).$$

Ceci démontre bien le lemme 3, et termine l'étude du comportement asymptotique de $\dfrac{T_{nk}}{n\,k}$.

e) Fin de la démonstration de la proposition

Soit $p=nk+q, 0\leqq q<n$. Pour démontrer la proposition, il reste donc à majorer convenablement

$$\left|P\left(a\leqq\frac{T_p}{p}\leqq b\right)-P\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\leqq b\right)\right|.$$

Or $T_p=T_{nk+q}=T_{nk}+V_n^k$, où:

$$V_n^k=\tfrac{1}{2}\{X_1+\cdots+X_{nk})\,Y_{nk+1}+\cdots+(X_1+\cdots+X_{nk+q-1})\,Y_{nk+q}\text{-t.s.}\}$$

(Un calcul simple montre que $E(V_n^k)^2=O(n^2\,k))$ d'où:

$$\begin{aligned}
&P\left(a\leqq\frac{T_p}{p}\leqq b\right)-P\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\leqq b\right)\\
&=P\left\{a\left(1+\frac{q}{nk}\right)\leqq\frac{T_{nk}}{nk}+\frac{V_n^k}{nk}\leqq b\left(1+\frac{q}{nk}\right)\right\}-P\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\leqq b\right)\\
&=\int\limits_{\left\{\frac{|V_n^k|}{nk}>\varepsilon\right\}}\left[1_{\left\{a\left(1+\frac{q}{nk}\right)\leqq\frac{T_{nk}}{nk}+\frac{V_n^k}{nk}\leqq b\left(1+\frac{q}{nk}\right)\right\}}-1_{\left\{a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\leqq b\right\}}\right]dP+\int\limits_{\left\{\frac{|V_n^k|}{nk}\leqq\varepsilon\right\}}\text{idem.}
\end{aligned}$$

La première intégrale est majorée, en valeur absolue, par:

$$P(|V_n^k|>\varepsilon n\,k)\leqq\frac{E(V_n^k)^2}{\varepsilon^2 n^2 k^2}\leqq\frac{c_{10}}{\varepsilon^2 k}.$$

Grâce au lemme 3, la seconde intégrale est majorée, en valeur absolue par:

$$\frac{2c_8}{n^{\alpha_3}}+\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon+\frac{|a|q}{nk}}\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}+\int\limits_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon+\frac{|b|q}{nk}}\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}$$

et

$$\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon+\frac{|a|q}{nk}}\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}\leqq\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon+\frac{|a|}{k}}\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}\leqq\sup\left(3\varepsilon,\frac{2}{\pi}e^{-\pi(k-1)\varepsilon}\right)$$

$\left(\text{comme on le voit en distinguant les deux cas }\frac{|a|}{k}\leqq\varepsilon\text{ et }\frac{|a|}{k}\geqq\varepsilon\right)$.

En résumé, pour $k\geqq n^{21/\delta}$, on a

$$\left|P\left(a\leqq\frac{T_p}{p}\leqq b\right)-P\left(a\leqq\frac{T_{nk}}{nk}\leqq b\right)\right|\leqq\frac{c_{10}}{\varepsilon^2 k}+\frac{2c_8}{n^{\alpha_3}}+2\sup\left(3\varepsilon,\frac{2}{\pi}e^{-\pi(k-1)\varepsilon}\right).$$

Il suffit alors de prendre $\varepsilon=k^{1/3}$, $k=[n^{21/\delta}]$, pour avoir

$$\left|P\left(a\leqq\frac{T_p}{p}\leqq b\right)-\int\limits_a^b\frac{dx}{\operatorname{ch}\pi x}\right|\leqq\frac{c_{11}}{n^{\alpha_4}}\leqq\frac{c}{p^\alpha}\qquad\forall a,\ b\in\mathbb{R},\quad\forall p\in\mathbb{N}^*.$$

Ainsi s'achève la démonstration de la proposition.

3. Démonstration de la loi du logarithme itéré

Cette démonstration se fait en deux parties résumées par les lemmes 4 et 5.

Lemme 4. $\overline{\lim_n} \frac{\pi T_n}{n \log \log n} \leqq 1$ p.s.

Démonstration. Elle s'appuie sur le lemme maximal suivant:

Lemme maximal. *Il existe deux constantes $b>0$ et $c \in]0,1[$ telles que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$P\{\sup_{1 \leqq k \leqq n} T_k > a\} \leqq \frac{1}{c} P(T_n > a - b\,n).$$

Nous démontrerons ce lemme un peu plus loin. Montrons pour l'instant que le lemme 4 en résulte:

Soit $\varepsilon > 0$; il suffit de démontrer que

$$\mathrm{P}\left(\overline{\lim_n}\left\{T_n > \frac{(1+\varepsilon)\,n \log \log n}{\pi}\right\}\right) = 0.$$

Posons $n_k = d^k$ (où $d > 1$ sera convenablement choisi plus loin).

$$P\left(\overline{\lim_n}\left\{T_n > \frac{(1+\varepsilon)\,n \log \log n}{\pi}\right\}\right) \leqq P\left(\overline{\lim_k}\left\{\sup_{0 \leqq p \leqq n_k} T_p > \frac{1+\varepsilon}{\pi} n_{k-1} \log \log n_{k-1}\right\}\right.$$

$$\leqq P\left(\overline{\lim_k}\left\{\sup_{0 \leqq p \leqq n_k} T_p > \frac{1+\varepsilon'}{\pi} n_k \log \log n_k\right\}\right)$$

$\left(\text{avec } 1+\varepsilon' < \frac{1+\varepsilon}{d}, \text{ ce qui demande de choisir } d \text{ suffisamment proche de } 1\right)$.

Grâce au lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que

$$\sum_k P\left\{\sup_{0 \leqq p \leqq n_k} T_p > \frac{1+\varepsilon'}{\pi} n_k \log \log n_k\right\} < \infty.$$

Or ceci n'est pas difficile, car, d'après le lemme maximal, cette dernière probabilité est inférieure à

$$\frac{1}{c} P\left\{T_{n_k} > \frac{(1+\varepsilon')}{\pi} n_k \log \log n_k - b\,n_k\right\} \leqq \frac{1}{c} P\left\{T_{n_k} > \frac{1+\varepsilon''}{\pi} n_k \log \log n_k\right\}.$$

Et grâce au théorème central limite avec vitesse de convergence, cette probabilité ne diffère que par une quantité exponentiellement petite de

$$\int_{\frac{1+\varepsilon''}{\pi} \log \log n_k}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} \pi x} \leqq \frac{K}{k^{1+\varepsilon''}}$$

où K est une constante $\left(\text{en utilisant le fait que } \frac{1}{\operatorname{ch} \pi x} \leqq \frac{2}{e^{\pi x}}, \text{ et en intégrant}\right)$.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer le lemme maximal.

Démonstration du lemme maximal. Cette démonstration est évidemment inspirée du cas classique:

Posons

$$A_i=\{T_1\leqq a, \ldots, T_{i-1}\leqq a,\ T_i>a\}.$$

Alors:

$$P(T_n>a-b\,n)\geqq \sum_{i=1}^{n} P[(T_n>a-b\,n)\cap A_i]\geqq \sum_{i=1}^{n} P[(T_n-T_i>-b\,n)\cap A_i].$$

Malheureusement ici les évènements $(T_n-T_i>-b\,n)$ et A_i ne sont pas indépendants; nous allons néanmoins démontrer que

$$P|(T_n-T_i>-b\,n)\cap A_i|\geqq c\,P(A_i) \tag{1}$$

ce qui permet de conclure, puisque $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=P(\sup_{1\leqq k\leqq n} T_k>a)$.

Montrons donc (1):

$$\begin{aligned}T_n-T_i=\tfrac{1}{2}\{&(X_1+\cdots+X_i)(Y_{i+1}+\cdots+Y_n)-(Y_1+\cdots+Y_i)(X_{i+1}+\cdots+X_n)\\&+X_{i+1}\,Y_{i+2}+\cdots+(X_{i+1}+\cdots+X_{n-1})\,Y_n-Y_{i+1}\,X_{i+2}\\&-\cdots-(Y_{i+1}+\cdots+Y_{n-1})\,X_n.\end{aligned}$$

En supposant un instant $X_1, \ldots, X_i, Y_1, \ldots, Y_i$ définis sur un espace Ω et $X_{i+1}, \ldots, Y_{i+1}, \ldots$ sur un espace Ω', on a, en posant.

$$X_1+\cdots+X_i=p(\omega) \quad \text{et} \quad Y_1+\cdots+Y_i=q(\omega):$$

$$\begin{aligned}P\{(T_n-T_i>-b\,n)\cap A_i\}\geqq E_\omega\{&1_{A_i(\omega)}\cdot P_{\omega'}[p(\omega)\,(Y_{i+1}\,\omega'\cdots+Y_n)\,(\omega')\\&+\tfrac{1}{2}(X_{i+1}\,Y_{i+2}+\cdots+(X_{i+1}+\cdots+X_{n-1})\,Y_n)\,(\omega)\text{-t.s.}>-b\,n)]\}.\end{aligned}$$

Nous aurons donc terminé la démonstration du lemme si nous pouvons déterminer b et $c>0$ de manière que pour tous p et $q\in\mathbb{R}$, on ait:

$$\begin{aligned}P[&p(Y_{i+1}+\cdots+Y_n)-q(X_{i+1}+\cdots+X_n)\\&+\tfrac{1}{2}\{X_{i+1}\,Y_{i+2}+\cdots+(X_{i+1}+\cdots+X_{n-1})\,Y_n-Y_{i+1}\,X_{i+2}\\&-\cdots-(Y_{i+1}+\cdots+Y_{n-1})\,X_n\}>-b\,n]>c.\end{aligned}$$

Or pour $n-i$ fixé il est facile de voir que la probabilité en question est minorée par un nombre positif indépendant de p et q.

On peut donc supposer que $n-i$ est assez grand. La probabilité de l'événement complémentaire est inférieure à

$$\begin{aligned}&P\left[p(Y_1+\cdots+Y_{n-i})-q(X_1+\cdots+X_{n-i})\leqq -\frac{b\,n}{2}\right]\\&\quad+P\left[\frac{1}{2}\{X_1\,Y_2+\cdots+(X_1+\cdots+X_{n-i-1})\,Y_{n-i}\text{-t.s.}\}\leqq -\frac{b\,n}{2}\right].\end{aligned}$$

Grâce au théorème central limite sur $\mathbb{R}$, pour le premier terme, et au théorème central limite sur $\mathbb{H}_1$, pour le second, il n'est pas difficile de voir que, pour $n-i$ assez grand, la première quantité est plus petite que $\frac{1}{2}$ et la seconde plus petite que $\frac{1}{4}$ (à condition de choisir b assez grand).

Ceci achève la démonstration de (1) et, par suite, la démonstration du lemme maximal et du lemme 4.

Lemme 5. *Tout $\alpha \in [-1, 1]$ est p.s. point d'accumulation de* $\dfrac{\pi T_n}{n \log\log n}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_k = d^k$ (où $d > 1$ sera choisi convenablement plus loin); nous allons démontrer que: $P(\overline{\lim_k}\, A_k) = 1$, où

$$A_k = \left\{ \left| \frac{\pi T_{n_k}}{n_k \log\log n_k} - \alpha \right| < 3\varepsilon \right\}.$$

(Supposons $\alpha > 0$, ce qui ne nuit pas à la généralité.)

Pour cela, montrons d'abord (comme dans le cas classique) que $P(\overline{\lim_k}\, A'_k) = 1$, où:

$$A'_k = \left\{ \left| \frac{\pi (T_{n_k} - T_{n_{k-1}})}{n_k \log\log n_k} - \alpha \right| < 2\varepsilon \right\}.$$

Ecrivons:

$$\begin{aligned} T_{n_k} - T_{n_{k-1}} &= \tfrac{1}{2} \{ (X_1 + \cdots + X_{n_{k-1}})(Y_{n_{k-1}+1} + \cdots + Y_{n_k}) \text{-t.s.} \} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \{ X_{n_{k-1}+1} Y_{n_{k-1}+2} + \cdots + (X_{n_{k-1}+1} + \cdots + X_{n_k - 1}) Y_{n_k} \text{-t.s.} \} \\ &= W_k + V_k. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\pi W_k}{n_k \log\log n_k} = \pi \cdot \frac{X_1 + \cdots + X_{n_{k-1}}}{\sqrt{2 n_{k-1} n \log\log n_{k-1}}} \cdot \frac{Y_{n_{k-1}+1} + \cdots + Y_{n_k}}{\sqrt{2(n_k - n_{k-1}) \log\log (n_k - n_{k-1})}} \cdot a_n \text{-t.s.}$$

où

$$a_n = \frac{\sqrt{d^{k-1}(d^k - d^{k-1})}}{d^k} \cdot \frac{\sqrt{\log\log d^{k-1} \cdot \log\log (d^k - d^{k-1})}}{\log\log d^k} \leqq \frac{1}{\sqrt{d}};$$

d'après la loi du logarithme itéré classique; on a donc:

$$\left| \frac{\pi W_k}{n_k \log\log n_k} \right| \leqq \frac{\pi}{\sqrt{d}} \quad \text{p.s.}$$

En d'autres termes, cette quantité peut être rendue p.s. inférieure à ε si l'on choisit d assez grand.

D'autre part, les V_k sont indépendantes: il suffit donc, grâce au lemme de Borel-Cantelli, de montrer que:

$$\sum_k P\left(\frac{\pi V_k}{n_k \log\log n_k} \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \right) = +\infty.$$

Or ceci est facile, car

$$\left\{\frac{\pi V_k}{n_k \log\log n_k} \in [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]\right\}$$
$$= \left\{\frac{V_k}{n_k - n_{k-1}} \in \left[\frac{\alpha-\varepsilon}{\pi\left(1-\frac{1}{d}\right)} \log\log n_k, \frac{\alpha+\varepsilon}{\pi\left(1-\frac{1}{d}\right)} \log\log n_k\right]\right\};$$

et grâce au théorème central limite avec vitesse de convergence, la probabilité de cet ensemble ne diffère que par une quantité exponentiellement petite de

$$\int_{\frac{\alpha-\varepsilon}{\pi(1-\frac{1}{d})}\log\log d^k}^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\pi(1-\frac{1}{d})}\log\log d^k} \frac{dx}{\operatorname{ch} \pi x} \geqq \frac{K}{n^{(\alpha-\varepsilon)/1-\frac{1}{d}} \log n}$$

où K est une constante $\left(\text{en utilisant le fait que } \frac{1}{\operatorname{ch} \pi x} \geqq \frac{1}{e^{\pi x}}, \text{ et en intégrant}\right)$.

Il suffit alors de prendre d suffisamment grand pour avoir: $\frac{\alpha-\varepsilon}{1-\frac{1}{d}} < 1$.

Pour terminer, il suffit, comme dans le cas classique, de remarquer que:

$$\frac{|T_{n_{k-1}}|}{n_k \log\log n_k} < \varepsilon \qquad \text{p.s. dès que } k \text{ est assez grand.}$$

Or ceci est une conséquence immédiate du lemme 4 dès que $\frac{n_k \log\log n_k}{n_{k-1} \log\log n_{k-1}} \geqq d$ est assez grand.

Bibliographie

1. Crepel, P., Le Page, E.: Loi du logarithme itéré fonctionnelle sur le groupe des déplacements de R^d. C.R. Acad. 8ci. Paris Sér. A-B **281**, 475–478 (1975)
2. Crepel, P., Raugi, A.: Théorème central limite sur les groupes nilpotents. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **281**, 605–608 (1975)
3. Loeve, M.: Probability theory. 3e édition. New York: Van Nostrand 1963
4. Roynette, B.: Théorème central limite sur le groupe des déplacements de R^d. Ann. 2nst. H. Poincaré Sect. B, vol. X, $n \doteq 4$, 391–398 (1974)
5. Sazonov, V.: A new general estimate of the rate of convergence in the central limit theorem in $\mathbb{R}^k$. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **71**, 1, 118–121 (1974)
6. Tutubalin, V. N.: Composition of measures on the simplest nilpotent group. Theor. Probability Appl. **9**, 3, 479–487 (1964)

Manuscrit reçu le 15 novembre 1975