

Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée

Jacques Azema*

Université de Paris VI Laboratoire de Calcul des Probabilités
9 quai Saint Bernard Tour 56 F-75230 Paris Cedex 05

1. Position du problème

On dit qu'une surmartingale positive (X_t) est engendrée par un processus croissant intégrable (B_t) si l'on a $X_t = E[B_\infty - B_t | \mathcal{F}_t]$; une telle représentation n'est unique que si l'on impose à (B_t) des conditions supplémentaires, par exemple être prévisible dans le cas de la représentation de Doob-Meyer. Mais d'autres représentations peuvent être utiles; Meyer [6] vient récemment de montrer que toute surmartingale bornée est engendrée par un processus croissant borné (qui, bien entendu, n'est plus prévisible, ni même adapté). On se propose ici de caractériser cette nouvelle représentation, et l'on définit une classe d'unicité qui paraît intéressante pour deux raisons; tout d'abord c'est une généralisation naturelle de la classe des fonctionnelles multiplicatives (ou, plus exactement, des fonctionnelles co-multiplicatives) intervenant dans la théorie des processus de Markov. Ensuite parce que cette classe admet comme prototype simple les processus de la forme $C_t = 1_{\{t \geq L\}}$ où L est la fin d'un ensemble aléatoire prévisible. Cela nous change un peu des temps d'arrêt.

On donne à la fin de cet article quelques exemples d'applications à l'étude de problèmes divers: décomposition multiplicative d'une sous martingale, temps local d'une martingale continue, représentation de Skorohod d'une mesure sur l'espace d'états d'un processus de Markov.

2. Définitions et notations

Nous traiterons d'abord le cas où la filtration est engendrée par une famille d'opérateurs de meurtre; nous expliquerons ensuite au paragraphe 6 comment on peut toujours se ramener à cette situation. Rappelons quelques définitions et résultats de [2].

* Laboratoire associé au CNRS N° 224 «Processus stochastiques et applications». Université Pierre et Marie Curie

(Ω, \mathbf{F}^0) est un espace mesurable, $(k_t)_{0 < t \leq \infty}$ est une famille d'applications mesurables de (Ω, \mathbf{F}^0) dans lui même, ζ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ qui satisfont aux axiomes suivants

$$(1) \quad \forall s \forall t \quad k_s \circ k_t = k_{s \wedge t}; \quad \zeta \circ k_t = \zeta \wedge t; \quad k_t(\omega) = \omega \text{ si } t \geq \zeta(\omega).$$

On appelle \mathbf{F} la complétée universelle de \mathbf{F}^0 et on pose $\mathbf{F}_t = \bigcap_{s > t} k_s^{-1}(\mathbf{F})$; la famille (\mathbf{F}_t) est croissante et continue à droite, ζ est un temps d'arrêt relativement à cette filtration. La tribu des évènements strictement antérieurs à ζ joue un rôle important et sera notée \mathbf{F}^* .

On réservera le nom d'ensemble optionnel, prévisible, de temps d'arrêt etc. ... pour désigner les êtres algébriques relatifs à la filtration (\mathbf{F}_t) ; si P est une probabilité sur (Ω, \mathbf{F}^0) on appellera ensembles P -optionnels, ou P -prévisibles, P -temps d'arrêt, les objets habituels de la théorie générale des processus sur l'espace filtré $(\Omega, \mathbf{F}_t^P, P)$ dûment complété. Si H est un ensemble aléatoire mesurable de $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ on pose

$$D^H(\omega) = \inf \{t \geq 0; (\omega, t) \in H\} \quad L^H(\omega) = \sup \{t \geq 0; (\omega, t) \in H\}$$

où l'on a posé par convention $0^- < 0 < \infty < \infty^+$, $\inf \phi = \infty^+$, $\sup \phi = 0^-$. Si H est adapté, L^H et D^H sont \mathbf{F}^* -mesurables et D^H est un temps d'arrêt.

Les processus (et les ensembles aléatoires) seront définis à l'infini. Si S est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0^-\} \cup \overline{\mathbb{R}}_+ \cup \{\infty^+\}$, on appelle graphe de S l'ensemble aléatoire $\llbracket S \rrbracket = \{(\omega, t) / 0 \leq t \leq \infty; t = S(\omega)\}$. On fait une convention analogue en ce qui concerne les intervalles stochastiques. On dira qu'un processus $(\mathcal{Z}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ est constant après ζ si l'on a $\mathcal{Z}_t(\omega) = \mathcal{Z}_\zeta(\omega)$ quelque soit $t \geq \zeta(\omega)$.

Rappelons que l'on a la caractérisation suivante des processus prévisibles: c'est un résultat de [2] un tout petit peu modifié.

(2) **Proposition.** Soit $(\mathcal{Z}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ un processus mesurable sur (Ω, \mathbf{F}) tel que \mathcal{Z}_0 soit \mathbf{F}_0 -mesurable; (\mathcal{Z}_t) est un processus prévisible si et seulement s'il existe une variable aléatoire z \mathbf{F}^* -mesurable telle que $\mathcal{Z}_t(\omega) = z \circ k_t(\omega)$ quel que soit $t \in]0, \zeta(\omega)[$.

Il résulte de cette proposition qu'il existe une bijection entre l'ensemble des variables aléatoires sur (Ω, \mathbf{F}^*) et l'ensemble des restrictions des processus prévisibles à $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$: à un processus prévisible (\mathcal{Z}_t) correspond la variable aléatoire \mathcal{Z}_ζ ; inversement à une variable aléatoire z correspond le processus $(\mathcal{Z}_t) = (z \circ k_t)$.

(3) **Corollaire.** Soit l une variable aléatoire inférieure ou égale à ζ \mathbf{F}^* -mesurable, à valeurs dans $\{0^-\} \cup \overline{\mathbb{R}}_+$ et ne prenant pas la valeur 0; l est la fin d'un ensemble prévisible de $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ si et seulement si l vérifie

$$l \circ k_t(\omega) = l(\omega) \quad \text{quelque soit } t \text{ et } \omega \text{ avec } t \geq l(\omega) > 0.$$

Démonstration. Si l vérifie cette relation, on pose $H = \{(\omega, t) | t > 0 \text{ et } l \circ k_t(\omega) = t\}$; H est prévisible et l est la fin de H ; réciproquement, si l est la fin d'un ensemble prévisible H inclus dans $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$, on vérifie facilement que $l \circ k_t(\omega) = \sup \{s | 0 < s \leq t(\omega, s) \in H\}$; il en résulte que $l \circ k_t(\omega) = l(\omega)$ si $t \geq l(\omega)$.

3. Mesures Aléatoires prévisibles, mesures de sortie

(4) *Définition.* On appellera *mesure aléatoire prévisible* un noyau $\mu(\omega, dt)$ ayant les propriétés suivantes

- * $\forall \omega \mu(\omega \cdot)$ est une mesure positive sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ portée par $]0, \zeta(\omega)[$.
- * Quel que soit A borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu(\cdot, A)$ est une variable aléatoire \mathbf{F}^* -mesurable.
- * $\forall \omega \forall t \mu(k_t(\omega), ds) = \mu(\omega, ds) 1_{]0, t[}(s)$.

Un cas particulier important est celui des mesures aléatoires pour les quelles $A_\infty(\omega) = \mu(\omega, \overline{\mathbb{R}}_+)$ est intégrable. Le processus $A_t = \mu(\omega,]0, t])$ vérifie $A_t = A_\infty \circ k_t$ et est donc un processus croissant prévisible intégrable.

Faisons une dernière remarque: nous avons vu en (2) qu'il existe une bijection entre processus prévisibles sur $]0, \zeta[$ et variables aléatoires, il y a donc aussi bijection entre mesure bornées sur la tribu des prévisibles portées par $]0, \zeta[$ et mesures bornées sur (Ω, \mathbf{F}^*) ; il reste à expliciter la correspondance.

(5) *Définitions.* Soit λ une mesure positive sur la tribu des prévisibles, portée par $]0, \zeta[$; Soit z une variable aléatoire \mathbf{F}^* -mesurable et $(\mathcal{Z}_t) = z \circ k_t$. On pose $\int z dQ = \lambda((\mathcal{Z}_t))$. On dira que Q est la mesure de sortie associée à λ . Q est la mesure de sortie associée à λ si eut seulement si $Q\{T < \zeta\} = \lambda(]T, \zeta[)$ quel que soit le temps d'arrêt T .

Un cas particulier important est celui où λ est la mesure associée à un processus croissant intégrable prévisible (A_t) constant après ζ : si l'on a $\lambda((\mathcal{Z}_t)) = E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_s dA_s \right]$, alors $\int z dQ = E \left[\int_0^\infty z \circ k_s dA_s \right]$ et $Q\{T < \zeta\} = E[X_T; T < \zeta]$, où (X_t) est le potentiel engendré par (A_t) ; nous dirons dans ce cas que Q est la mesure de sortie associée à (X_t) . (C'est la «mesure de Föllmer» associée à X dans le cas particulièrement simple où (X_t) est de la classe (D)).

4. Processus multiplicatifs

(6) *Définition.* Soit $(C_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ un processus compris entre 0 et 1; nous dirons que (C_t) est un *processus multiplicatif* si

- * (C_t) est \mathbf{F}^* -mesurable pour tout t
- * $C_t(\omega) = 1$ quelque soit $t \geq \zeta(\omega)$
- * $C_s \circ k_u = C_s \circ k_t \times C_t \circ k_u$ si $0 < s \leq t \leq u$.

On n'utilisera dans cet article que des processus multiplicatifs continus à droite; pour abrégé nous les appellerons simplement processus multiplicatifs. Il n'empêche que d'autres types de processus multiplicatifs peuvent être intéressants; à ce sujet voir Gettoor [5] qui utilise des processus continus à gauche; ce ne sont pas les mêmes objets: les nôtres sont liés, nous allons le voir, aux fins d'ensembles prévisibles, ceux de Gettoor sont plutôt liés aux fins d'ensembles optionnels.

Il n'est pas difficile de voir que la dernière condition de (6) est équivalente à la condition apparemment plus faible

$$C_s = C_s \circ k_t \times C_t \quad \text{si } 0 \leq s \leq t.$$

Donnons deux exemples importants de processus multiplicatifs (continus à droite).

(7) Soit H un ensemble prévisible de $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ et l la fin de H ; le processus $C_t = 1_{\llbracket 0, \infty \rrbracket}(t)$ est un processus multiplicatif. On peut en effet écrire d'après le corollaire (3) si $0 < s \leq t$

$$\{s \geq l\} = \{s \geq l \circ k_t\} \cap \{t \geq l\}, \quad \text{ce qui est équivalent à}$$

$$C_s = C_s \circ k_t \times C_t.$$

(8) Voici le deuxième exemple. Soit $\mu(\omega, dt)$ une mesure aléatoire prévisible; on peut lui associer un processus multiplicatif en posant

$$C_t(\omega) = \exp(-\mu(\omega,]t, \infty])).$$

Le premier instant où un processus multiplicatif devient strictement positif jouera un rôle fondamental. On a la proposition suivante.

(9) **Proposition.** Soit (C_t) un processus multiplicatif et $\tau = \sup\{t \geq 0 \mid C_t = 0\}$. On a les implications suivantes

- a) $(t > \tau(\omega) \text{ et } t > 0) \Rightarrow \tau \circ k_t(\omega) = \tau(\omega)$
- b) $(\tau(\omega) > 0 \text{ et } C_\tau(\omega) > 0) \Rightarrow \tau \circ k_\tau(\omega) = \tau(\omega)$.

Il en résulte que τ est la fin d'un ensemble optionnel.

Démonstration. Il résulte immédiatement de la relation multiplicative vérifiée par (C_t) que

- (i) $(C_s(\omega) = 0 \text{ et } C_t(\omega) > 0) \Rightarrow C_s \circ k_t(\omega) = 0 \Rightarrow s \leq \tau \circ k_t(\omega)$
- (ii) $(C_s(\omega) > 0 \text{ et } C_t(\omega) > 0) \Rightarrow C_s \circ k_t(\omega) > 0 \Rightarrow s \geq \tau \circ k_t(\omega)$.

Montrons tout d'abord que $(C_t(\omega) > 0) \Rightarrow (\tau \circ k_t(\omega) \geq \tau(\omega))$; c'est évident si $\tau(\omega) = 0^-$; si $\tau(\omega) = 0$, alors $C_0(\omega) = 0$ et (i) appliqué à $s = 0$ prouve que $\tau \circ k_t(\omega) \geq 0$; si enfin $\tau(\omega) > 0$, on applique (i) à une suite s_n croissant strictement vers $\tau(\omega)$. Pour prouver l'inégalité inverse on applique (ii) à une suite (s_n) décroissant strictement vers $\tau(\omega)$ si $\tau(\omega) \geq 0$, et à $s = 0$ dans le cas $\tau(\omega) = 0^-$.

Comme la fonction $u \rightarrow C_t \circ k_u$ est décroissante, $u \rightarrow \tau \circ k_u$ est croissante.

Posons alors $\tau_u = \tau \circ k_u$; le processus (τ_u) est prévisible, (τ_{u^+}) est optionnel, et $\tau = \sup\{u \geq 0; \tau_{u^+} = u\}$; τ est donc la fin d'un ensemble optionnel.

(10) **Corollaire.** Soit l une variable aléatoire \mathbf{F}^* -mesurable inférieure ou égale à ζ et ne prenant pas la valeur 0; on pose $C_t = 1_{\llbracket 0, \infty \rrbracket}(t)$; (C_t) est un processus multiplicatif si et seulement si l est la fin d'un ensemble prévisible de $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$.

Démonstration. Il reste à montrer que l est la fin d'un prévisible si (C_t) est multiplicatif. Cela résulte immédiatement de (9) et de (3).

5. Surmartingale engendrée par un processus multiplicatif

Munissons (Ω, \mathbf{F}^0) d'une probabilité P et soit (C_t) un processus multiplicatif. On appelle (X_t) la surmartingale continue à droite vérifiant

$$(11) \quad X_T = E[C_\infty - C_T | \mathbf{F}_T] = E[1 - C_T | \mathbf{F}_T]$$

pour tout temps d'arrêt T . Il est clair que (X_t) est comprise entre 0 et 1 et est nulle sur $[\zeta, \infty]$. Nous dirons que (X_t) est la *surmartingale engendrée par (C_t)* ; c'est la projection optionnelle du processus $(1 - C_t)$. Considérons maintenant le point de vue des mesures aléatoires. Appelons (B_t) le processus croissant prévisible intégrable engendrant (X_t) et dC_t la mesure aléatoire *ne chargeant pas $[0]$* induite par (C_t) (on ne tient pas compte du saut en 0 de C_t). La relation (11) peut encore s'écrire

$$E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_s dB_s \right] = E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_s dC_s \right]$$

quelque soit (\mathcal{Z}_t) prévisible borné; ce qui prouve que (dB_t) est la projection duale prévisible de (dC_t) . Enonçons ces remarques sous forme de proposition

(12) **Proposition.** *Les assertions suivantes sont équivalentes*

- a) (C_t) engendre (X_t)
- b) (X_t) est la projection optionnelle de $(1 - C_t)$
- c) dB_t est la projection duale prévisible de dC_t .

Si (C_t) est un processus multiplicatif on a posé $\tau = \sup\{t \geq 0; C_t = 0\}$; nous allons montrer que τ ne dépend que de la surmartingale engendrée par C_t . Nous aurons besoin de la définition suivante:

(13) **Définition.** Soit Γ un ensemble aléatoire et l une variable aléatoire. Nous dirons que Γ est à gauche de l si la fin de Γ est P -presque sûrement inférieure ou égale à l .

On définit les ensembles aléatoires H et \tilde{H} liés à (X_t)

$$H = \{(\omega, t) | t > 0, X_{t-}(\omega) = 1\} \quad \tilde{H} = H \cup \{(\omega, t) | t \geq 0, X_t(\omega) = 1\}.$$

On peut toujours s'arranger pour que (X_t) et (X_{t-}) soient respectivement optionnels et prévisibles (et pas seulement P -optionnels et P -prévisibles) de sorte que H est prévisible et que \tilde{H} est optionnel. On a la proposition suivante

(14) **Proposition.** a) H est (à un ensemble évanescant près) le plus grand ensemble P -prévisible de $\llbracket 0, \infty \rrbracket$ situé à gauche de τ .

- b) \tilde{H} est le plus grand ensemble P -optionnel situé à gauche de τ .
- c) τ est presque sûrement égal à la fin de \tilde{H} .

Démonstration. Appelons σ la fin de H et (A_t) le processus croissant prévisible vérifiant, quelque soit (\mathcal{Z}_t) prévisible borné

$$(15) \quad E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_s dA_s \right] = E[\mathcal{Z}_\sigma; \sigma > 0].$$

Appelons enfin S le support gauche de (A_t) :

$$S = \{(\omega, t) | t > 0, A_t - A_{(t-h)^+} > 0 \ \forall h > 0\}.$$

Appliquant la relation (15) au processus $(\mathcal{Z}_s) = 1_S$ qui est prévisible, on montre sans difficulté que $\llbracket \sigma \rrbracket \subset S$ à un ensemble évanescents près; on peut alors montrer a): puisque la projection prévisible du processus (C_{t-}) est $(1 - X_{t-})$, on peut écrire

$$E \left[\int_0^\infty C_{t-} dA_t \right] = E \left[\int_0^\infty (1 - X_{t-}) dA_t \right] = E[(1 - X_{\sigma-}); \sigma > 0] = 0$$

(C_{t-}) est donc nul sur S , ce qui montre que H est à gauche de τ . Montrons que c'est le plus grand ensemble prévisible ayant cette propriété; si Γ est prévisible inclus dans $\llbracket 0, \infty \rrbracket$ et à gauche de τ , on a $1_\Gamma \leq (1 - C_{t-})$, inégalité qui, après projection prévisible, devient $1_\Gamma \leq (X_{t-})$; on a donc $\Gamma \subset H$ à un ensemble évanescents près.

b) Posons $K = \{(\omega, t) | t \geq 0, X_t(\omega) = 1\} - H$; K est optionnel sans points d'accumulation pour la topologie gauche. Il en résulte que, si σ' est la fin de K , on a $X_{\sigma'} = 1$ sur $\{\sigma' \geq 0\}$. On peut alors raisonner comme précédemment: on appelle (A'_t) le processus croissant optionnel vérifiant

$$E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_s dA'_s \right] = E[\mathcal{Z}_{\sigma'}; \sigma' \geq 0]$$

quelque soit (\mathcal{Z}_s) optionnel borné, S' le support ordinaire de (A'_t) , et l'on montre que $\llbracket \sigma' \rrbracket$ est inclus dans S' . On écrit ensuite

$$E \left[\int_0^\infty C_s dA'_s \right] = E \left[\int_0^\infty (1 - X_s) dA'_s \right] = E[(1 - X_{\sigma'}); \sigma' \geq 0] = 0.$$

(C_s) est donc nul sur S' et K est à gauche de τ ; il en est de même de $\tilde{H} = H \cup K$. Reste à montrer la maximalité de \tilde{H} . D'après le théorème de section, il suffit de prouver que l'on a $X_T = 1$ sur $\{T < \infty^+\}$, pour tout temps d'arrêt T dont le graphe est à la fois à gauche de τ et dans le complémentaire de H . Si T est un tel temps d'arrêt, nous allons montrer que $C_T = 0$; il en résultera que

$$E[X_T; T < \infty^+] = E[(1 - C_T); T < \infty^+] = P[T < \infty^+]$$

et le résultat sera ainsi démontré. Etudions donc C_T ; il suffit de le faire sur $\{T = \tau\} \cap \{\tau > 0\}$. On remarque d'abord que l'ensemble aléatoire $\{(\omega, t) | t > 0, \tau \circ k_t = t\}$ est prévisible et à gauche de τ d'après ((9).a)). Il est donc, à un ensemble évanescents près, inclus dans H . Cela nous montre que, sur $H^c \cap \llbracket 0, \infty \rrbracket$, on a $\tau \circ k_s < s$. On a donc $\tau \circ k_\tau < \tau$ p.s. sur $\{T = \tau\} \cap \{\tau > 0\}$; appliquant alors ((9).b)), on voit que $C_\tau = C_T = 0$ p.s. sur cet évènement.

c) On sait ((14).c)) que τ est la fin d'un ensemble optionnel; il résulte alors immédiatement du caractère maximal de \tilde{H} que τ et la fin de \tilde{H} sont presque sûrement égaux.

6. Le théorème de représentation

Soit (X_t) une surmartingale comprise entre 0 et 1, nulle après ζ . On peut supposer (X_t) optionnelle et (X_{t-}) prévisible. On appelle (B_t) le processus croissant intégrable prévisible engendrant (X_t) ; (B_t) vérifie la relation $B_t = B_\infty \circ k_t$ et est constant sur $[\zeta, \infty]$. On conviendra que $X_{0-} = 0$. On pose enfin

$$\gamma_t = \exp\left(-\int_{]0, \infty]} \frac{dB_s^c}{1-\dot{X}_s}\right) \prod_{t < s \leq \infty} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{1-\dot{X}_s}\right)$$

où (\dot{X}_s) désigne un processus prévisible qui est projection P -prévisible de (X_t) . Il n'est pas difficile de voir que (γ_t) est un processus multiplicatif continu à droite. Le théorème suivant est une petite modification d'un résultat de P.A. Meyer dont nous reproduisons la démonstration

(16) **Théorème.** *Le processus multiplicatif (γ_t) engendre (X_t) .*

Démonstration. a) On suppose d'abord $(X_t) \leq 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), et on pose $A_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1-\dot{X}_s}$; (A_t) est un processus croissant prévisible et le produit infini figurant dans la définition de (γ_t) est presque-sûrement convergent. On pose maintenant

$$(17) \quad \mu_t = \gamma_0 \circ k_t = \exp\left(-\int_{]0, t]} \frac{dB_s^c}{1-\dot{X}_s}\right) \prod_{0 < s \leq t} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{1-\dot{X}_s}\right)$$

(γ_t) et (μ_t) sont continus à droite et ne s'annulent pas; (μ_t) est prévisible décroissant; (γ_t) est l'unique solution de «l'équation différentielle stochastique

$$(18) \quad dC_t = C_t dA_t \quad C_\infty = 1$$

tandis que (μ_t) est l'unique solution de

$$(19) \quad dM_t = -M_t \cdot dA_t \quad M_0 = 1.$$

Ces définitions posées, passons à la démonstration du théorème de Meyer. Soit T un temps d'arrêt; on peut écrire

$$E[(1-\gamma_T); T < \infty^+] = E\left[\left(1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_T}\right); T < \infty^+\right] = E\left[-\frac{1}{\mu_T} \int_{]T, \infty]} d\mu_s\right].$$

Mais on a $-d\mu_s = \mu_{s-} dB_s - \dot{X}_s d\mu_s$, ce qui nous permet de transformer le membre de droite qui s'écrit encore

$$E\left[\frac{1}{\mu_T} \int_{]T, \infty]} \mu_{s-} dB_s - \dot{X}_s d\mu_s\right] = E\left[\frac{1}{\mu_T} \int_{]T, \infty]} \mu_{s-} dB_s - (B_\infty - B_s) d\mu_s\right].$$

Une intégration par parties, et l'on obtient

$$E[(1-\gamma_T); T < \infty^+] = E[B_\infty - B_T; T < \infty^+] = E[X_T; T < \infty^+].$$

b) On suppose simplement $(X_t) \leq 1$; on applique le résultat précédent à (λX_t) ($0 \leq \lambda < 1$); posons

$$\gamma_t^\lambda = \exp \left(\int_{]t, \infty]} \frac{\lambda dB_s^c}{1 - \lambda \dot{X}_s} \right) \prod_{t < s \leq \infty} \left(1 - \frac{\lambda \Delta B_s}{1 - \lambda \dot{X}_s} \right).$$

On sait que (γ_t^λ) a pour projection optionnelle $(1 - \lambda X_t)$. Il est facile de voir que γ_t^λ décroît, quand λ tend vers 1, vers (γ_t) , (pour le terme exponentiel, cela résulte du théorème de convergence monotone, et pour le produit infini, d'une interversion d'inf). On en déduit que $(1 - \gamma_t)$ admet (X_t) comme projection optionnelle.

Passons au théorème d'unicité

(20) **Théorème.** Si (C_t) est un processus multiplicatif continu à droite engendrant (X_t) , (C_t) est indistinguable de (γ_t) .

La démonstration repose sur trois lemmes.

(21) **Lemme.** Si (C_t) ne s'annule pas sur $]0, \infty]$ et engendre (X_t) , alors (C_t) et (γ_t) sont indistinguables.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; posons $M_t^\varepsilon = C_\varepsilon \circ k_t$, de sorte que $C_\varepsilon = M_t^\varepsilon \times C_t$ si $t \geq \varepsilon$; (M_t^ε) est continu à droite et l'on a $0 = M_t^\varepsilon - dC_t + C_t dM_t^\varepsilon$ sur $]\varepsilon, \infty]$. D'autre part (M_t^ε) est prévisible. Considérons alors la mesure aléatoire $\frac{dC_t}{C_t}$ définie sur $]0, \infty]$; elle vérifie, quel que soit (\mathcal{Z}_t) mesurable borné, nul sur $[0, \varepsilon]$

$$(22) \quad E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_s \frac{dC_s}{C_s} \right] = E \left[\int_0^\infty \dot{\mathcal{Z}}_s \frac{dC_s}{C_s} \right]$$

où $(\dot{\mathcal{Z}}_s)$ est la projection P -prévisible de (\mathcal{Z}_s) . Faisant tendre ε vers 0, on voit que (19) est vérifiée sans condition de support pour (\mathcal{Z}_s) ; il en résulte que la mesure aléatoire $dB'_s = (1 - \dot{X}_s) \frac{dC_s}{C_s}$ vérifie

$$(23) \quad E \left[\int_{]0, \infty]} \mathcal{Z}_s dB'_s \right] = E \left[\int_{]0, \infty]} \dot{\mathcal{Z}}_s dB'_s \right]$$

quel que soit (\mathcal{Z}_s) mesurable borné. On a donc:

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_t dB_t \right] &= \left[\int_0^\infty \dot{\mathcal{Z}}_t dB_t \right] = E \left[\int_0^\infty \dot{\mathcal{Z}}_t dC_t \right] = E \left[\int_0^\infty \frac{C_t \dot{\mathcal{Z}}_t}{1 - \dot{X}_t} dB'_t \right] \\ &= E \left[\int_0^\infty \dot{\mathcal{Z}}_t dB'_t \right] = E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_t dB'_t \right] \end{aligned}$$

(Remarquer que (X_t) et (\dot{X}_t) sont strictement inférieurs à 1 sur $]0, \infty]$; appliquer, par exemple, ((14).c)).

Les mesures aléatoires dB_t et dB'_t sont donc égales; il en résulte que (C_t) est, lui aussi, solution de l'équation différentielle stochastique (18). (C_t) et (γ_t) sont donc indistinguables.

Passons au deuxième lemme, dont nous laisserons la vérification au lecteur.

(24) **Lemme.** Soit τ une variable aléatoire \mathbf{F}^* -mesurable, $\leq \zeta$, vérifiant $\tau \circ k_s = \tau$ si $s > \tau$. On définit

$$k'_i = k_{\tau+t}, \quad C'_i = C_{\tau+t}, \quad \zeta' = \zeta - \tau$$

(avec la convention $h + 0^- = h - 0^- = h$).

La famille $(k'_i)_{i>0}$ est une famille d'opérateurs de meurtre de durée de vie ζ' ; (C'_i) est un processus multiplicatif relativement à la famille (k'_i) .

Le lemme suivant précise ((14).a); on a, avec les notations de cette proposition,

(25) **Lemme.** Soit (C_i) un processus multiplicatif engendrant (X_i) ; il existe un processus multiplicatif (C'_i) indistinguable de (C_i) tel que $\{(\omega, t) | t > 0 \tau' \circ k_t = t\}$ soit indistinguable de H , quand on a posé $\tau' = \sup \{t; C'_t = 0\}$.

Démonstration. Appelons σ la fin de H , et posons $C'_i = C_i \cdot 1_{\llbracket \sigma, \infty \rrbracket}(t)$. (C'_i) est un processus multiplicatif continu à droite (c'est le produit de deux processus multiplicatifs), indistinguable de (C_i) d'après (14). On a les inclusions suivantes:

$$\{(\omega, t) | t > 0 \tau' \circ k_t = t\} \supset \{(\omega, t) | t > 0 \sigma \circ k_t = t\} = H.$$

Mais l'inclusion inverse est vérifiée à un ensemble évanescent près d'après ((14).a)). Le résultat est démontré.

Démonstration du Théorème (20). Soient (C^1_i) et (C^2_i) deux processus multiplicatifs engendrant (X_i) ; on pose $\tau^i = \sup \{t; C^i_t = 0\}$ ($i=1, 2$). On sait que $\tau^1 = \tau^2$ p.s. d'après (14) et l'on peut toujours, quitte à remplacer (C^i_i) par un processus indistinguable, supposer que les variables τ^i ont la propriété (25). Dans les calculs qui suivent, on a posé

$$H' = H^c, \quad Y^i_s = 1_{\{\tau^i \circ k_s < s\}}, \quad \tau = \tau^1 \vee \tau^2.$$

Puisque (C^1_i) et (C^2_i) ont même projection duale prévisible, on a

$$(26) \quad E \left[\int_{]0, \zeta]} z \circ k_s 1_{H'}(s) dC^1_s \right] = E \left[\int_{]0, \zeta]} z \circ k_s 1_{H'}(s) dC^2_s \right]$$

quelle que soit $z \mathbf{F}^*$ -mesurable bornée. Le premier membre peut encore s'écrire, d'après (25) et la définition de τ^1 ,

$$E \left[\int_{] \tau^1, \zeta]} z \circ k_s Y^1_s dC^1_s \right].$$

Je dis que je peux remplacer l'intervalle d'intégration $] \tau^1, \zeta]$ par $] \tau^1, \zeta]$; c'est évident sur l'évènement $\{C^1_{\tau^1} = 0\}$; mais c'est aussi vrai sur $\{C^1_{\tau^1} > 0\}$ puisque, sur cet évènement, on a $\tau^1 \circ k_{\tau^1} = \tau^1$, c'est à dire $Y^1_{\tau^1} = 0$. Notre expression s'écrit donc

$$E \left[\int_{] \tau^1, \zeta]} z \circ k_s Y^1_s dC^1_s \right] = E \left[\int_{] \tau^1, \zeta]} z \circ k_s dC^1_s \right] = E \left[\int_{] \tau, \zeta]} z \circ k_s dC^1_s \right].$$

Transformant de la même manière le second membre de (26), on obtient l'égalité

$$(27) \quad E \left[\int_{] \tau, \zeta]} z \circ k_s dC_s^1 \right] = E \left[\int_{] \tau, \zeta]} z \circ k_s dC_s^2 \right].$$

On remarque maintenant que, τ satisfaisant aux hypothèses du lemme (24), l'égalité (27) peut s'écrire, avec les notations de ce lemme

$$E \left[\int_{] 0, \zeta]} z \circ k'_s dC_s^1 \right] = E \left[\int_{] 0, \zeta]} z \circ k'_s dC_s^2 \right].$$

On applique alors le lemme (21): C'^1 et C'^2 sont indistinguables. Il en résulte que C^1 et C^2 sont indistinguables sur $]\tau, \infty]$; comme ils sont aussi trivialement indistinguables sur $]\tau, \infty]$, le théorème est démontré.

7. Retour aux conditions habituelles

Soit $(\Omega, \mathbf{F}_t, P)$ un espace filtré satisfaisant aux conditions habituelles. On va se ramener à la situation du §2. On pose $\bar{\Omega} = \Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$. On prendra pour tribu $\bar{\mathbf{F}}^0$ sur $\bar{\Omega}$ la tribu \mathcal{P} des P -prévisibles, et on définit une famille $(k_t)_{t > 0}$ d'opérateurs de meurtre de durée de vie ζ en posant

$$k_t(\omega, \lambda) = (\omega, \lambda \wedge t) \quad \zeta(\omega, \lambda) = \lambda \quad (0 < t \leq \infty) \quad (0 \leq \lambda \leq \infty).$$

Les différentes tribus construites à l'aide de (k_t) sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathbf{F}}^0)$ seront notées de la même manière qu'au §2, à ceci près qu'une barre rappellera que l'on se trouve sur $\bar{\Omega}$; la première chose à faire est d'identifier \mathbf{F}^* .

(28) **Proposition.** *On a $\bar{\mathbf{F}}^* = \bar{\mathbf{F}}^0 = \mathcal{P}$.*

Démonstration. $\bar{\mathbf{F}}^*$ est engendrée par les ensembles aléatoires de la forme $H \cap \{\zeta > t\}$ où $H \in \bar{\mathbf{F}}_t$. Remarquons tout d'abord que $\{\zeta > t\} =]t, \infty]$. Il n'est, d'autre part, pas très difficile d'identifier les ensembles aléatoires de $\bar{\mathbf{F}}_t$; si $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la complétée universelle de \mathcal{P} , on a

$$H \in \bar{\mathbf{F}}_t \Leftrightarrow H \in \tilde{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad \exists A \subset \Omega \text{ tel que } H \cap]t, \infty] = A \times]t, \infty].$$

En combinant ces deux remarques, on voit que \mathbf{F}^* est engendrée par les ensembles aléatoires de $\tilde{\mathcal{P}}$ qui sont de la forme $A \times]t, \infty]$. Posons $K = A \times]t, \infty]$; nous allons montrer que K est en fait dans \mathcal{P} , de qui démontrera la proposition. Soit $s > t$ et \bar{P}_s la probabilité image de P par $\omega \rightarrow (\omega, s)$. Puisque K est dans $\tilde{\mathcal{P}}$ il existe K' et K'' dans \mathcal{P} avec $K' \subset K \subset K''$ et $P_s(K'' - K') = 0$. Appellons alors K'_s, K''_s les sections en s de K', K'' ; on a $P[K'_s - K''_s] = 0$ et $K'_s \subset A \subset K''_s$; puisque la tribu \mathbf{F}_s est P -complète, cela entraîne $A \in \mathbf{F}_s$; ceci ayant lieu quelque soit $s > t$, on voit que $A \in \mathbf{F}_t$; K est donc P -prévisible.

(29) **Corollaire.** *Soit \bar{T} un temps d'arrêt sur $\bar{\Omega}$; on pose $T(\omega) = \bar{T}(\omega, \infty)$; T est un P -temps d'arrêt sur Ω et $]\bar{T}, \infty] = \{\bar{T} < \zeta\}$.*

Démonstration. L'ensemble aléatoire $]\bar{T}, \infty]$ est prévisible et vérifie par

conséquent

$$1_{\llbracket T, \infty \rrbracket}(s) = 1_{(T < \zeta)} \circ k_s \quad (0 < s \leq \zeta).$$

Cette égalité peut s'écrire

$$(s > \bar{T}(\omega, \lambda)) \quad (\bar{T}(\omega, \lambda \wedge s) < \lambda \wedge s) \quad \forall s, \lambda \text{ tels que } s \leq \lambda.$$

Ecrivons cette équivalence pour $\lambda = \infty$, il vient

$$\llbracket T, \infty \rrbracket = \{(\omega, s) \mid \bar{T}(\omega, s) < s\} = \{\bar{T} < \zeta\}$$

ce qui montre la deuxième partie de (29); il en résulte que $\llbracket T, \infty \rrbracket$ est $\bar{\mathbf{F}}^*$ -mesurable; il est donc P -prévisible d'après (28), et T est un P -temps d'arrêt.

Munissons maintenant $\bar{\Omega}$ de la probabilité \bar{P} , image de P par l'application $\omega \rightarrow (\omega, \infty)$. Si (X_t) est une surmartingale de la classe (D) sur Ω on peut lui associer une mesure sur la tribu des ensembles aléatoires P -prévisibles: c'est la mesure de Doléans associée à cette surmartingale; elle vérifie $\mu \llbracket T, \infty \rrbracket = E[X_T; T < \infty]$ quelque soit le temps d'arrêt T .

Posons maintenant

$$\bar{X}_t(\omega, \lambda) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{si } t < \lambda \\ 0 & \text{si } t \geq \lambda. \end{cases}$$

On a la proposition suivante:

(30) **Proposition.** (\bar{X}_t) est une surmartingale sur $\bar{\Omega}$ admettant μ comme mesure de sortie.

On a en effet $\bar{E}[\bar{X}_T; \bar{T} < \zeta] = E[X_T; T < \infty] = \mu(\llbracket T, \infty \rrbracket)$.

Cette dernière quantité s'écrit aussi $\mu\{\bar{T} < \zeta\}$ d'après (29); on retrouve alors la définition d'une mesure de sortie.

Venons en à la définition d'un processus multiplicatif (continu à droite).

(31) *Définition.* Soit $(C_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ un processus compris entre 0 et 1. On dit que (C_t) est un *processus multiplicatif* s'il existe un processus $(C_{st})_{\substack{0 \leq s \leq \infty \\ 0 < t \leq \infty}}$ tel que C_t

$= C_{t\infty}$ et ayant les propriétés suivantes:

- a) $\forall t \ 0 < t \leq \infty \ s \rightarrow C_{st}$ est continu à droite compris entre 0 et 1.
- b) $\forall s \ 0 \leq s \leq \infty \ t \rightarrow C_{st}$ est P -prévisible.
- c) $C_{st} = 1$ si $s \geq t$.
- d) $C_{su} = C_{st} \times C_{tu}$ si $s \leq t \leq u$.

Regardons ce que deviennent les exemples déjà vus. Le processus (γ_t) défini au § 6 est un processus multiplicatif avec

$$\gamma_{st} = \exp \left(- \int_{[s,t]} \frac{dB_s^c}{1 - \bar{X}_s} \right) \prod_{s < u \leq t} \left(1 - \frac{\Delta B_u}{1 - \bar{X}_u} \right).$$

D'autre part si Γ est un ensemble aléatoire P -prévisible de $\llbracket 0, \infty \rrbracket$ et si 1 est la fin de Γ , on définit $1_t(\omega) = \sup \{s; s \leq t \ (\omega, s) \in \Gamma\}$. Le processus $C_t = 1_{\llbracket 1, \infty \rrbracket}(t)$ est multiplicatif, avec $C_{st} = 1_{\{s \geq 1_t\}}$.

Le théorème de représentation s'énonce alors pratiquement sans modification. Seules les hypothèses où intervient ζ sont supprimées: on remarquera que dans notre construction on a $P\{\zeta = \infty\} = 1$. Il nous faut donc simplement convenir que $X_\infty = 0$.

(32) **Théorème.** Soit $(X_t)_{0 \leq t < \infty}$ une surmartingale positive continue à droite bornée par 1. (γ_t) est l'unique processus multiplicatif engendrant (X_t) .

La démonstration du théorème (16) reste valable dans ce cadre et montre que (γ_t) engendre (X_t) . Il reste à étudier l'unicité. Soient (\bar{C}_t^i) ($i=1, 2$) deux processus multiplicatifs engendrant (X_t) ; plaçons nous sur $(\bar{\Omega}, \mathcal{P}, \bar{P})$ comme ci dessus, et posons, si $w = (\omega, \lambda) \in \bar{\Omega}$

$$\bar{C}_t^i(w) = C_{t,\lambda}^i(\omega).$$

Il n'est pas difficile de voir que \bar{C}_t^i est un processus multiplicatif au sens de (6). Soit z une variable aléatoire \bar{F}^* -mesurable bornée sur $\bar{\Omega}$; le processus (\mathcal{Z}_t) défini par $\mathcal{Z}_t(\omega) = z(\omega, t)$ est alors P -prévisible, et l'on peut écrire

$$\bar{E} \left[\int_0^\infty z \circ k_t d\bar{C}_t^1 \right] = E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_t dC_t^1 \right] = E \left[\int_0^\infty \mathcal{Z}_t dC_t^2 \right] = \bar{E} \left[\int_0^\infty z \circ k_t d\bar{C}_t^2 \right].$$

Les processus \bar{C}_t^1 et \bar{C}_t^2 ont donc même projection duale prévisible sur $\bar{\Omega}$; ils sont \bar{P} -indistinguables d'après (20); il en résulte que C^1 et C^2 sont P -indistinguables.

7. Décomposition multiplicative d'une sous martingale positive

Revenons à la situation du §2: la filtration est induite par une famille d'opérateurs de meurtre. Les techniques du paragraphe précédent montrent que le théorème qui suit est vrai sous les conditions habituelles (avec $\zeta = \infty$).

On se donne une sous martingale $(Y_t)_{0 \leq t \leq \infty}$, positive, constante après ζ , telle que $E[Y_\infty] < \infty$. (Si l'on dispose d'une sous martingale habituelle $(Y_t)_{0 \leq t < \infty}$ on peut évidemment compléter le processus à l'infini par n'importe quelle variable aléatoire intégrable supérieure ou égale à $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t$.) On pose

$$S = \inf \{t; t \geq 0 \ Y_t = 0\} \wedge \inf \{t; t > 0 \ Y_{t-} = 0\},$$

et l'on introduit l'ensemble aléatoire prévisible

$$\Sigma = \llbracket 0, S \rrbracket - \{(\omega, t) | t > 0 \ Y_{t-} = 0\}.$$

Σ n'est pas un intervalle stochastique: la coupe de Σ en ω est égale à $[0, S(\omega)]$ si $Y_{S-}(\omega) > 0$, et à $[0, S(\omega)[$ si $Y_{S-}(\omega) = 0$. On a le théorème suivant qui donne une nouvelle démonstration d'un théorème de Meyer et Yœurp [7] et le complète.

(33) **Théorème.** Posons $\mu_t = \exp \left(- \int_{]0,t]} \frac{dB_s^c}{\bar{Y}_s} \right) \prod_{0 < s \leq t} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{\bar{Y}_s} \right)$ où

* (B_t) est le processus croissant prévisible tel que $(Y_t - B_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ est une martingale

* \dot{Y}_t est la projection P -prévisible de (Y_t) (μ_t) possède les propriétés suivantes:

- (i) (μ_t) est positif décroissant; $\mu_0 = 1$; $\mu_t = \mu_\zeta$ si $t \geq \zeta$.
- (ii) (μ_t) est prévisible.
- (iii) (μ_t) est strictement positif sur Σ , continu à droite sur $\llbracket 0, S \rrbracket$.
- (iv) $(\mu_t Y_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ est une martingale continue à droite.

Tout autre processus vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) est indistinguable de (μ_t) sur Σ .

Il existe un processus (m_t) et un seul vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) et la propriété.

(v) (m_t) est nul sur Σ^c .

Démonstration. Il n'y a pas de difficultés à montrer que (μ_t) satisfait (i), (ii), (iii). Montrons maintenant (iv), et étudions d'abord le cas particulier suivant:

(34) On suppose que (Y_t) est comprise entre 0 et 1 et vérifie $Y_t = 1$ si $t \geq \zeta$. La surmartingale $(X_t) = 1 - (Y_t)$ satisfait aux hypothèses du § 6, et l'on a, si (γ_t) est le processus multiplicatif engendrant (X_t)

$$\gamma_0 = \gamma_0 \circ k_t \times \gamma_t = \mu_t \gamma_t.$$

Projetons cette égalité sur la tribu optionnelle, il vient $E(\gamma_0 | F_t) = \mu_t Y_t$, ce qui montre le résultat. Pour étudier le cas général, on pose $P' = Y_\infty P$, $Y'_t = \frac{Y_t}{E(Y_\infty | F_t)}$ $= \frac{Y_t}{M_t}$ (avec la convention $\% = 1$) de sorte que (Y'_t) est une P' -sous-martingale satisfaisant à (34). On pose alors

$$\mu'_t = \exp \left(- \int_{]0, t]} \frac{dB'_s{}^c}{\dot{Y}'_s} \right) \prod_{0 < s \leq t} \left(1 - \frac{\Delta B'_s}{\dot{Y}'_s} \right)$$

où (B'_t) et (\dot{Y}'_t) ont les significations de (33) quand P est remplacé par P' et (Y_t) par (Y'_t) . On sait que $\mu'_t Y'_t$ est une P' -martingale; $(\mu'_t Y_t)$ est donc une P -martingale. D'autre part, on montre facilement que les deux égalités suivantes ont lieu à une P -indistinguabilité près

$$B_t = \int_0^t M_{s-} dB'_s \quad \dot{Y}'_s M_{s-} = \dot{Y}_s.$$

Il en résulte que (μ_t) et (μ'_t) sont P -indistinguishables. Montrons maintenant l'existence d'un processus satisfaisant à (v). Cela résultera de la remarque facile suivante, que nous isolerons sous forme de lemme car nous en aurons encore besoin par la suite.

(35) **Lemme.** Si (m_t) vérifie les conditions (i) à (iv), il en est de même du processus $\bar{m}_t = m_t 1_{\Sigma}(t)$; de plus $m_t Y_t = \bar{m}_t \dot{Y}_t$.

Il suffit évidemment de montrer la dernière assertion pour la propriété (iv); désignons par (\mathcal{Z}_t) la martingale $(m_t Y_t)$ et par $(\bar{\mathcal{Z}}_t)$ le processus $\bar{m}_t \dot{Y}_t$; on a $S = \inf \{t; \mathcal{Z}_t \text{ ou } \bar{\mathcal{Z}}_t = 0\}$; comme (\mathcal{Z}_t) est une martingale positive, elle est, d'après

un résultat classique, constamment nulle après S . On remarque alors que $(\overline{\mathcal{X}}_t)$ est, lui aussi, nul après S (y compris en S), de sorte que (\mathcal{X}_t) et $(\overline{\mathcal{X}}_t)$ sont indistinguables.

Il nous reste à montrer l'unicité d'un processus vérifiant les conditions (i) à (v). Nous étudierons d'abord, là encore, un cas particulier: Supposons que (Y_t) satisfasse à (34) et qu'il existe un processus (m_t) strictement positif continu à droite prévisible tel que $(m_t Y_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ soit une martingale. Posons $C_t = \frac{m_t}{m_t} = \frac{m_t}{m_t}$; C_t est un processus multiplicatif et l'on a

$$E(1 - C_t | \mathbf{F}_t) = 1 - \frac{1}{m_t} E(m_\infty | \mathbf{F}_t) = 1 - Y_t.$$

(C_t) engendre $(X_t) = 1 - Y_t$; il est donc indistinguable de (γ_t) ; il en résulte que (m_t) et (μ_t) sont indistinguables.

Affaiblissons un peu les hypothèses: on suppose toujours (m_t) strictement positif, et continu à droite mais on ne suppose plus rien sur (Y_t) . Le processus $m_t Y_t'$ est une P -martingale. D'après le résultat précédent (m_t) et (μ_t) sont P' -indistinguables. Revenant à P , on a le résultat partiel suivant:

(36) (m_t) est P -indistinguable de (μ_t) sur l'évènement $(Y_\infty > 0)$.

Passons au cas général; soient (m_i^i) ($i=1, 2$) deux processus satisfaisant aux conditions (i) à (v). Effectuons une partition de $[[S]]$ en introduisant les deux temps d'arrêt S' et S'' vérifiant

$$\{S' < \infty^+\} = \{Y_{S'-} = 0\}, \quad \{S'' < \infty^+\} = \{Y_{S''-} > 0\}, \quad [[S]] = [[S']] + [[S'']].$$

On a $[[S']] = [[0, S]] - \Sigma$, de sorte que S' est prévisible; soit (T_n) une suite de temps d'arrêt annonçant S' , $S_n = S \wedge T_n = S'' \wedge T_n$. On pose $m_t^{i,n} = m_{t \wedge S_n}^i$, $Y_t^n = Y_{t \wedge S_n}$. Les processus $(m_t^{i,n})$ sont strictement positifs (rappelons que $m_{S''-}^i > 0$ par hypothèse) et continus à droite. On peut donc appliquer (36). Il en résulte que l'ensemble aléatoire $\{(\omega, t); m_t^1(\omega) \neq m_t^2(\omega)\}$ est contenu dans l'ensemble aléatoire $N = \{(\omega, t) | S''(\omega) < \infty^+; 0 < t \leq S''(\omega)\}$.

Posons alors $\tau = \sup \{t; Y_t \text{ ou } Y_{t-} = 0\}$; N est à gauche de τ . Appliquant alors le lemme qui suit, on voit que N est inclus dans $\{(\omega, t) | t > 0 \text{ } Y_{t-}(\omega) = 0\}$; mais sur cet ensemble on a par hypothèse $(m_t^1) = (m_t^2) = 0$; N est donc évanescent.

La fin de la démonstration repose sur le lemme suivant:

(37) **Lemme.** On pose $\tau = \sup \{t; Y_t \text{ ou } Y_{t-} = 0\}$ et $H = \{(\omega, t) | t > 0 \text{ } Y_{t-}(\omega) = 0\}$. H est le plus grand ensemble P -prévisible situé à gauche de τ .

Démonstration. Ce résultat est déjà connu (c'est la proposition (14).a)) quand (Y_t) satisfait à (34). Pour étudier le cas général, on relativise. Soit T un temps d'arrêt prévisible dont le graphe est à gauche de τ et dans H^c ; on a

$$0 = P\{T < \infty^+\} = E[Y_\infty; T < \infty^+] = E[M_{T-}; T < \infty^+].$$

Or on a $M_{T-} \geq Y_{T-} > 0$ sur $\{T < \infty^+\}$; il en résulte que $P\{T < \infty^+\} = 0$; on conclut à l'aide du théorème de section prévisible. (L'hypothèse « (Y_t) est bornée dans L^1 » est essentielle pour la validité de ce lemme.)

Si (Y_t) est nul à l'origine, le théorème (33) n'est pas, à première vue d'un intérêt fulgurant. On a $m_t=0$ pour tout $t>0$ et la décomposition $(Z_t)=(m_t, Y_t)$ devient

$$(38) \quad 0=0.$$

Pendant, on peut obtenir des résultats intéressants en effectuant la décomposition multiplicative des sous martingales $(Y_{t+h})_{t \geq 0}$ par rapport à la famille de tribus (F_{t+h}) . Au paragraphe suivant, en prenant comme sous martingale le module d'une martingale continue, on obtiendra sur le temps local d'une martingale, des résultats qui, sans être très difficiles, ne sont pas aussi triviaux que (38). Mais tout d'abord, on a le résultat suivant, qui donne une autre caractérisation du processus multiplicatif engendrant une surmartingale. Revenons aux notations du § 5.

(39) **Théorème.** Soient (X_t) une surmartingale satisfaisant aux hypothèses du § 5 et $(Y_t)=1-(X_t)$. Si (C_t) est un processus multiplicatif tel que

$$\forall h \geq 0 \quad (C_h \circ k_{t+h} Y_{t+h})_{0 \leq t \leq \infty}$$

est une martingale par rapport à la filtration $(F_{t+h})_{0 \leq t \leq \infty}$.

Alors (C_t) et (γ_t) sont indistinguables.

Démonstration. On pose $\tau = \sup \{t; Y_t \text{ ou } Y_{t-} = 0\}$, $\bar{C}_t = C_t 1_{\llbracket \tau, \infty \rrbracket}(t)$, $\bar{\gamma}_t = \gamma_t 1_{\llbracket \tau, \infty \rrbracket}(t)$; on sait déjà que $(\bar{\gamma}_t)$ est indistinguable de (γ_t) . Nous allons montrer que (C_t) et (\bar{C}_t) sont aussi indistinguables, puis qu'il en est de même de (\bar{C}_t) et $(\bar{\gamma}_t)$.

Posons pour cela $m_t^h = C_h \circ k_{t+h}$, $\bar{m}_t^h = \bar{C}_h \circ k_{t+h}$, $\mu_t^h = \gamma_h \circ k_{t+h}$, $\bar{\mu}_t^h = \bar{\gamma}_h \circ k_{t+h}$. On a $\bar{m}_t^0 = m_t^0 1_{\neq}(t)$; il résulte alors du lemme (35) que $(\bar{m}_t^0 Y_t) = (m_t^0 Y_t)$. Faisons $t = \infty$ dans cette égalité; il vient $C_0 = \bar{C}_0$ p.s. On fait le même raisonnement translaté de h et on trouva que $C_h = \bar{C}_h$ p.s.; par continuité à droite (C_t) et (\bar{C}_t) sont indistinguables. Terminons alors la démonstration: (\bar{m}_t^h) et $(\bar{\mu}_t^h)$ satisfaisant à ((33).V), ils sont donc indistinguables. Faisons, là encore, $t = \infty$; (\bar{C}_h) et $(\bar{\gamma}_h)$ sont indistinguables.

Si (Y_t) est seulement bornée dans L^1 , il faut relativiser et le théorème devient un peu moins agréable à énoncer; on a le résultat suivant qui deviendra plus parlant dans le cas du temps local.

(40) **Corollaire.** Soit $(Y_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ une sous martingale satisfaisant aux hypothèses du § 7. Si (C_t) est un processus multiplicatif tel que

$$\forall h \geq 0 \quad (C_h \circ k_{t+h} Y_{t+h})_{0 \leq t \leq \infty}$$

est une martingale par rapport à la filtration (F_{t+h}) .

Alors (B_t) est la projection duale prévisible du processus croissant $(Y_\infty \cdot C_t)$.

Démonstration. $(C_h \circ k_{t+h} Y_{t+h})_{0 \leq t \leq \infty}$ est une P' -martingale; d'après le théorème précédent (C_t) engendre $(X'_t)=1-Y'_t$ relativement à P' . On peut donc écrire, quelque soit le processus prévisible (Z_t)

$$E' \left[\int_0^\infty Z_s dC_s \right] = E' \left[\int_0^\infty Z_s dB'_s \right] = E \left[\int_0^\infty Z_s dB_s \right].$$

Ce qui s'écrit encore

$$E \left[\int_0^\infty Y_\infty Z_s dC_s \right] = E \left[\int_0^\infty Z_s dB_s \right]; \quad \text{c'est le résultat annoncé.}$$

8. Application a l'étude du temps local

Revenons aux conditions habituelles.

Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ une martingale continue uniformément intégrable; on prolonge la définition de (M_t) à l'infini en posant $M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$; Nous allons appliquer les résultats précédents à la sous martingale $(Y_t) = (|M_t|)$. On sait que le processus croissant prévisible associé à (Y_t) s'appelle le temps local en 0 de (M_t) ; nous le noterons (L_t) .

Posons $\tau = \sup \{t; t > 0, M_t = 0\}$, $D_h = \inf \{t; t \geq h, M_t = 0\}$, et considérons le processus multiplicatif $C_t = 1_{\llbracket \tau, \infty \rrbracket}(t)$; on lui associe $(C_{s,t})$ comme en (31) et l'on a

$$C_{h,t+h} = 1_{\llbracket h, D_h \rrbracket}(t+h).$$

Il est alors facile de voir que

$$(Z_t^h) = (C_{h,t+h} \cdot Y_{t+h})_{0 \leq t \leq \infty}$$

est une martingale par rapport à la filtration (F_{t+h}) : en effet on a $Z_t^h = 1_{\llbracket h, D_h \rrbracket}(t+h) |M_{t+h}|$; on utilise alors le fait que (M_t) ne change pas de signe sur $\llbracket h, D_h \rrbracket$.

Appliquons maintenant le corollaire (40): on obtient le résultat suivant:

(41) Théorème. (L_t) est la projection duale prévisible du processus croissant $|M_\infty| 1_{\llbracket \tau, \infty \rrbracket}(t)$.

L'intérêt de ce théorème est d'établir un lien entre la notion de temps local d'une martingale continue, et la notion de temps local d'un processus de Markov: Si (X_t) est un bon processus de Markov transient, et si a est un point régulier pour lui même, le temps local en a est en effet la projection duale prévisible de $1_{\llbracket \sigma, \infty \rrbracket}(t)$ où $\sigma = \sup \{t; x_t = a\}$. Le reste de ce paragraphe est une parenthèse dans cet article: il est consacré à exposer quelques conséquences faciles et amusantes du théorème (41).

Posons $\tau_t = \sup \{s; 0 < s \leq t, M_s = 0\}$, et soit (Z_s) un processus prévisible borné; on a d'après (41):

$$E \left[\int_0^\infty Z_t dL_t \right] = E [|M_\infty| Z_\tau].$$

Appliquons ce résultat à la martingale (M_t^T) arrêtée en T ; il vient

$$E \left[\int_0^T Z_s dL_s \right] = E [|M_T| Z_{\tau_T}].$$

Considérons alors le processus $N_t = \int_0^t Z_s dL_s - |M_t| Z_{\tau_t}$; il vérifie $E[N_T] = 0$ quel que soit le temps d'arrêt T ; c'est donc une martingale.

Nous allons énoncer ce résultat dans un cas particulier: on pose $Z_t = f'(L_t)$ où f est une fonction de classe C^1 bornée ainsi que sa première dérivée: on a la proposition:

(42) **Proposition.** $N_t = f(L_t) - \int_0^t |M_s| f'(L_s)$ est une martingale.

Si on ne suppose pas f et f' bornées N_t est une martingale locale qui est une vraie martingale si (M_t) et (L_t) sont bornés. Plaçons nous dans ce cas est appliquons (42) à $f(x) = x^p$ ($p > 1$); on voit que

$L_t^p - p \int_0^t |M_s| L_s^{p-1}$ est une martingale; on a donc

$$E[L_t^p] = p E[\int_0^t |M_s| L_s^{p-1}] \leq p \|L_t\|_p^{p-1} \|M_t\|_p,$$

d'où l'on tire l'inégalité suivante

$$\|L_t\|_p \leq p \|M_t\|_p.$$

On peut lever les restrictions sur (L_t) et (M_t) par localisation et l'on a ainsi montré.

(43) **Proposition.** Soit (M_t) une martingale continue, (L_t) son temps local en 0; on a l'inégalité $\|L_t\|_p \leq p \|M_t\|_p$.

Voici une autre conséquence de (41):

Soit f une fonction de classe C^2 ; $f(M_t)$ est une semi-martingale. Appelons (A_t) le processus prévisible à variation finie intervenant dans la décomposition de cette semi-martingale. Nous allons montrer que (A_t) est la projection duale prévisible d'un processus dont chaque trajectoire peut se déduire simplement de la trajectoire correspondante de (M_t) . Posons:

$$I_t = \sup_{s \geq t} M_s \quad J_t = \inf_{s \geq t} M_s.$$

I_t et J_t sont monotones et tendent quand $t \rightarrow \infty$ vers M_∞ ; on associe à (I_t) et (J_t) les deux processus croissants nuls à l'origine

$$\alpha_t = (I_0 - M_\infty)^2 - (I_t - M_\infty)^2 \quad \beta_t = (J_0 - M_\infty)^2 - (J_t - M_\infty)^2$$

et on a le résultat suivant:

(44) **Théorème.** A_t est la projection duale prévisible du processus croissant (K_t) défini par

$$dK_t = \frac{1}{4}(f''(I_t) d\alpha_t + f''(J_t) d\beta_t).$$

En particulier $\langle M, M \rangle_t$ est la projection duale prévisible du processus $\frac{1}{2}(\alpha_t + \beta_t)$

Démonstration. On suppose dans un premier temps f à support compact et on appelle (L_t^a) le temps local en a de (M_t) (i.e. le temps local en 0 de $(M_t - a)$). On a d'après (41), si $\tau^a = \sup \{t; t > 0 M_t = a\}$:

$$E \left[\int_0^\infty Z_t dL_t^a \right] = E[|M_\infty - a| Z_{\tau^a}].$$

Intégrons cette égalité sur \mathbb{R} par rapport à la mesure $f''(a) da$; il vient

$$2E \left[\int_0^\infty Z_t dA_t \right] = E \left[\int_{-\infty}^{M_\infty} f''(a)(a - M_\infty) Z_{\tau^a} da \right] + E \left[\int_{-M_\infty}^\infty f''(a)(M_\infty - a) Z_{\tau^a} da \right].$$

Considérons la première intégrale du membre de droite; puisque $(I_t > a) \Leftrightarrow (\tau^a > t)$, elle peut s'écrire par changement de variable:

$$-E \left[\int_0^\infty f''(I_t)(I_t - M_\infty) Z_t dI_t \right] = \frac{1}{2} E \left[\int_0^\infty f''(I_t) d\alpha_t \right].$$

En transformant de la même façon la seconde intégrale, on obtient le résultat. Si f n'est pas à support compact, on se débrouille.

Une dernière remarque: il résulte de (44) que:

$$E[f(M_\infty) - f(M_0)] = E[(K_\infty - K_0)].$$

En appliquant ce résultat à la martingale M^T arrêtée en T , on trouve que, quelque soit le temps d'arrêt:

$$E[f(S_T) + f(s_T) - f'(S_T)(S_T - M_T) + f'(s_T)(M_T - s_T)] = 0$$

où l'on a posé $S_t = \sup_{s \leq t} M_s$, $s_t = \inf_{s \leq t} M_s$; en choisissant astucieusement f , on trouve que, séparément, on a

$$E[f(S_T) + (M_T - S_T)f'(S_T)] = 0$$

$$E[f(s_T) + (M_T - s_T)f'(s_T)] = 0.$$

On a donc le résultat suivant:

(45) **Proposition.** $f(S_t) + (M_t - S_t)f'(S_t)$ est une martingale locale si est de classe C^1 .

Ce résultat ainsi que les précédents peuvent être déduits simplement de la formule d'Ito (cf. [4]); on peut même donner la forme explicite des martingales locales qui interviennent dans ces résultats.

9. Représentation de mesures

Peut-on se servir des théorèmes (16) et (20) pour obtenir une représentation de mesures? La réponse est simple, il suffit de remplacer les surmartingales par leur mesure de sortie. Voici comment on peut énoncer ces théorèmes sans parler explicitement de surmartingales:

(46) **Théorème.** Soit Q une probabilité sur (Ω, \mathbf{F}^*) vérifiant $Q\{T < \zeta\} \leq P\{T < \zeta\}$

quelque soit le temps d'arrêt T . Il existe un processus multiplicatif unique (γ_t) tel que

$$\int_{\Omega} z dQ = E \left[\int_0^{\infty} z \circ k_s d\gamma_s \right]$$

quelque soit z \mathbf{F}^* -mesurable bornée. On peut donner l'expression de (γ_t) : on a

$$\gamma_t = \exp \left(- \int_{]t, \zeta[} \frac{dB_s^c}{1 - \hat{X}_s} \right) \prod_{t < s \leq \zeta} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{1 - \hat{X}_s} \right)$$

où (B_t) est le processus croissant prévisible tel que

$$E \int_0^{\infty} z \circ k_t dB_t = \int_{\Omega} z dQ$$

et où (\hat{X}_t) est la projection prévisible de $(B_{\infty} - B_t)$.

Démonstration. On applique (16) et (20) à la surmartingale engendrée par (B_t) .

Voyons maintenant ce que donne ce théorème dans le langage des opérateurs de translation; on se donne, au lieu d'une famille d'opérateurs de meurtre, une famille $(\theta_t)_{0 \leq t < \infty}$ et une variable aléatoire ζ finie vérifiant

$$\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t} \quad \zeta \circ \theta_t = (\zeta - t)^+.$$

La famille $(\hat{\theta}_t) = (\theta_{(\zeta-t)^+})$ constitue une famille d'opérateurs de meurtre (cf. [1]), et l'on est dans la situation du §2. Mais on sait aussi qu'il est plus agréable de raisonner alors sur les «retournés à ζ » des objets de la théorie générale des processus: par exemple le retourné d'un temps d'arrêt devient un temps de retour, un processus prévisible devient un processus homogène, un processus croissant prévisible continu à droite devient une fonctionnelle additive continue à gauche. Regardons maintenant ce que devient le retourné d'un processus multiplicatif.

(47) **Proposition et Définition.** On dira qu'un processus $(N_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ compris entre 0 et 1 constant après ζ est une fonctionnelle multiplicative si

$$N_{t+s} = N_t \times N_s \circ \theta_t \quad \text{quelque soient } s \text{ et } t.$$

Alors, (C_t) est un processus multiplicatif continu à droite relativement à la famille $(\hat{\theta}_t)$ si et seulement si le processus $(N_t) = (C_{(\zeta-t)^+})$ est une fonctionnelle multiplicative continue à gauche relativement à (θ_t) .

La version «opérateurs de translation» du théorème (46) s'énonce alors ainsi:

(48) **Théorème.** Soit Q une probabilité sur Ω vérifiant $Q\{\tau > 0^-\} \leq P\{\tau > 0^-\}$ quelque soit le temps de retour τ .

Il existe une fonctionnelle multiplicative (N_t) continue à gauche et une seule vérifiant

$$\int_{\Omega} z dQ = - E \left[\int_0^{\infty} z \circ \theta_s dN_s \right].$$

De plus, on a

$$N_t = \exp\left(-\int_{[0,t]} \frac{dB_s^c}{1-\dot{Y}_s}\right) \prod_{0 \leq s < t} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{1-\dot{Y}_s}\right)$$

où (B_t) est la fonctionnelle additive continue à gauche vérifiant

$$\int_{\Omega} z dQ = E \left[\int_0^{\infty} z \circ \theta_s dB_s \right],$$

et où (\dot{Y}_t) désigne la projection coprévisible de (B_t) (i.e. le processus homogène vérifiant

$$E[\dot{Y}_\tau; \tau \geq 0] = E[B_\tau; \tau \geq 0]$$

quelque soit le temps de retour coprévisible τ).

Venons en au problème de Rost et Skorohod pour un processus de Markov. Soit $(\Omega, \mathbf{F}_t, P_x, X_t)$ la réalisation canonique d'un processus fortement markovien d'espace d'états E . On se donne deux lois initiales m et μ sur E telles que $\int_E f d\mu \leq \int_E f dm$ quel que soit la fonction excessive f ; on suppose que le processus est réalisable sur l'espace Ω des trajectoires à durée de vie finie.

Les considérations qui précèdent vont permettre de démontrer simplement le théorème de [3] dont la démonstration n'était compréhensible que pour les intimes.

(49) **Théorème.** *Il existe une fonctionnelle multiplicative adaptée continue à gauche (M_t) et une seule vérifiant*

$$(50) \quad \int_E f d\mu = -E_m \left[\int_0^{\infty} f(x_s) dM_s \right] \quad \text{quelque soit } f \text{ borélienne bornée}$$

Démonstration. a) *Existence:* Puisque la fonction $x \rightarrow P_x[\tau > 0^-]$ est excessive si τ est un temps de retour, on a $P_\mu\{\tau > 0^-\} \leq P_m\{\tau > 0^-\}$. Appelons (B_t) la fonctionnelle additive continue à gauche vérifiant

$$\int_E f d\mu = E_m \left[\int_0^{\infty} f(x_s) dB_s \right]$$

quelque soit f borélienne. On a alors

$$E_\mu(z) = \int_E \varphi(x) d\mu(x) = E_m \left[\int_0^{\infty} \varphi(x_s) dB_s \right] = E_m \left[\int_0^{\infty} z \circ \theta_s dB_s \right].$$

On peut donc appliquer le théorème (48) à $P = P_m$, $Q = Q_\mu$; il reste à voir ce que devient \dot{Y}_t ; D'après [1] il existe une fonction presque borélienne h telle que $(h(x_t))$ soit la projection coprévisible pour P_m de (B_t) . On pose donc

$$M_t = \exp\left(-\int_{[0,t]} \frac{dB_s^c}{1-h(x_s)}\right) \prod_{0 \leq s < t} \left(1 - \frac{\Delta B_s}{1-h(x_s)}\right)$$

et l'on a, d'après (48)

$$(51) \quad E_\mu(z) = -E_m \left[\int_0^\infty z \circ \theta_s dM_s \right].$$

La relation (50) s'obtient alors en prenant pour variable aléatoire z la variable aléatoire $f(X_0)$.

b) *Unicité*: Si (M_t^1) et (M_t^2) vérifient (50), et si z est une fonction \mathbf{F}^0 -mesurable bornée, on a

$$\begin{aligned} E_m \left[\int_0^\infty z \circ \theta_s dM_s^1 \right] &= E_m \left[\int_0^\infty \varphi(x_s) dM_s^1 \right] \\ &= E_m \left[\int_0^\infty \varphi(x_s) dM_s^2 \right] = E_m \left[\int_0^\infty z \circ \theta_s dM_s^2 \right] \end{aligned}$$

où $\varphi(x) = E_x[z]$; l'unicité résulte alors directement de (48).

Bibliographie

1. Azema, J.: Théorie générale des processus et retournement du temps. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4ème Série **6**, 459–519 (1973)
2. Azema, J., Jeulin, T.: Précisions sur la mesure de Föllmer. Ann. Inst. H. Poincaré **XIII**, **3**, 257–283 (1976)
3. Azema, J., Meyer, P.A.: Une nouvelle représentation du tape Skorohod. Séminaire de Probabilités VIII. Lecture notes in Math. N° 381, 1–10. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
4. Azema, J., Yor, M.: [A paraître dans «Astérisque»]
5. Gettoor, R.K.: Comultiplicative functionals and the birthing of a Markov process. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **32**, 245–259 (1975)
6. Meyer, P.A.: Une représentation de surmartingales. Séminaire de Probabilités VIII. Lecture notes in Math. N° 381, 310–315. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
7. Meyer, P.A., Yoeurp, C.: Sur la décomposition multiplicative des sous martingales positives. Séminaire de Proabalités X. Lecture notes in Math. N° 511, 501–504. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976

Reçu le 8 Février 1978