Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 50—60 (1963)

Die Mittelwertfunktionen schwach stationärer Zufallsprozesse*

Von

FRIEDHELM EICKER

1. Einleitung und Zusammenfassung

Es werden komplexwertige, schwach stationäre Zufallsprozesse $\{x(t)\}$, $t \in T$, betrachtet, deren Parameterbereich T die reelle Achse R^1 oder der Ring Γ der ganzen Zahlen ist. Die Kovarianzfunktionen $E(x(s)\,\overline{x(t)}) = R(s-t)$, $s,\ t \in T$, werden im Fall $T = R^1$ als stetig vorausgesetzt (ein Querstrich bezeichnet das konjugiert Komplexe der überstrichenen Zahl). Es wird *nicht* gefordert, daß die Mittelwertfunktionen $\xi(t) = E(x(t))$ konstant sind. Wie vielfach üblich, verstehen wir unter der *eigentlichen Kovarianz* eines Prozesses die Funktion

$$(1)\qquad r(s,t) = \operatorname{cov}(x(s), \overline{x(t)}) = R(s-t) - \xi(s)\overline{\xi(t)}, \qquad s,\ t \in T.$$

Mit $M_{r(s,t)}$ sei die Klasse derjenigen Mittelwertfunktionen $\xi(t)$ bezeichnet, die mit einer gegebenen eigentlichen Kovarianz $r(s,t)$ verträglich sind. Die Funktionen $r(s,t)$ und $\xi(t)$ heißen *miteinander verträglich,* wenn es einen schwach stationären Prozeß mit der eigentlichen Kovarianz $r(s,t)$ und der Mittelwertfunktion $\xi(t)$ gibt.

In der vorliegenden Arbeit werden die Klassen $M_{r(s,t)}$ in Abhängigkeit von $r(s,t)$ analysiert. Die Gesamtheiten der eigentlichen Kovarianzen und der Mittelwertfunktionen werden in der Weise in einander eineindeutig zugeordnete Äquivalenzklassen zerlegt, daß die eigentlichen Kovarianzen einer gegebenen Klasse nur mit den Mittelwertfunktionen der zugeordneten Klasse verträglich sind und umgekehrt. Die Klassen sind durch einfache analytische Eigenschaften ihrer Elemente gekennzeichnet. Die Mittelwertfunktionen aller *reellen* Prozesse mit einer vorgegebenen eigentlichen Kovarianz, die nicht nur von der Differenz der Argumente abhängt, unterscheiden sich höchstens durch das Vorzeichen, d. h. es sind dies genau die trivialerweise möglichen Funktionen. Eine mögliche Anwendung der Ergebnisse auf die Regressionstheorie wird in Abschnitt 3 besprochen.

Die Zuordnung der Äquivalenzklassen läßt sich als Abbildung der Mittelwertfunktionen $\xi(t)$ auf Mengen von eigentlichen Kovarianzen $r(s,t)$ (nämlich auf gewisse Äquivalenzklassen) und vermöge (1) auch auf Mengen von Kovarianzen $R(s-t)$ auffassen. Eine Abbildung, die als hierzu invers angesehen werden kann, ordnet jeder Kovarianz $R(s-t)$ die Menge der damit verträglichen Mittelwert-

---

* Die vorliegende Arbeit ist teilweise in dem Bericht des Verf. „A note on linear regressions with weakly stationary errors having unknown means" enthalten, welcher unter Förderung durch die National Science Foundation 1961 an der Stanford University, Kalifornien (GRANT DA ARO (D) 31—124—G 91), als Technical Report No. 10 der Applied Mathematics and Statistics Laboratories geschrieben wurde. Reproduction is permitted for any purpose of the US Goverment.

funktionen zu. Diese inverse Abbildung ist von BALAKRISHNAN [1] und in allgemeinerer Form von YLVISAKER [6] untersucht worden. Nach YLVISAKER ist die Gesamtheit der mit einem nicht notwendig stationären Kovarianzkern $R(s, t)$ verträglichen Mittelwertfunktionen $\xi(t)$ durch $\|\xi\| < 1$ gegeben, wobei $\|\xi\|$ die Norm von $\xi(t)$ in der Metrik des durch $R(s, t)$ als reproduzierendem Kern erzeugten Hilbertraumes ist. Schreibt man $\xi(t)$ mit geeigneten Folgen von Konstanten a_j und t_j in der Form

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j R(t, t_j),$$

so folgt, daß $\xi(t)$ genau dann eine mit $R(s, t)$ verträgliche Mittelwertfunktion ist, wenn

$$\sum_{j,k} \bar{a}_k R(t_k, t_j) a_j < 1.$$

2. Die mit mindestens zwei linear unabhängigen Mittelwertfunktionen verträglichen eigentlichen Kovarianzen

Zwei Funktionen $\xi(t)$, $\xi^*(t)$, $t \in T$, heißen linear unabhängig, wenn $c\xi(t) + c^*\xi^*(t) \neq 0$ für mindestens einen ganzzahligen t-Wert im Falle $T = \Gamma$ bzw. auf einer t-Menge von positivem L-Maß (Lebesguemaß) im Falle $T = R^1$ gilt, wobei die Konstanten c und c^* mit $|c|^2 + |c^*|^2 \neq 0$ beliebig gewählt werden können. Wir bezeichnen mit G die Gesamtheit aller eigentlichen Kovarianzfunktionen zu schwach stationären Zufallsprozessen und mit $S_{r(s,t)}$, $r(s, t) \in G$, die Gesamtheit aller schwach stationären Prozesse mit der eigentlichen Kovarianz $r(s, t)$. Dann gilt

Satz 1. *Es sei $r(s, t) \in G$ und b eine komplexe Zahl $\neq 0$; φ_1, φ_2 $(\neq \varphi_1)$ seien reell. Im Fall $T = \Gamma$ gelte $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:*

(i) *Es gibt mindestens zwei Zufallsprozesse in $S_{r(s,t)}$ mit linear unabhängigen Mittelwertfunktionen.*

(ii) *Es gibt Zahlen b, φ_1, φ_2 derart, daß $r(s, t)$ die Summe einer nur von $s - t$ abhängigen Funktion und von*

$$b e^{i(\varphi_1 s - \varphi_2 t)} + \bar{b} e^{i(\varphi_2 s - \varphi_1 t)} \tag{2}$$

ist.

(iii) *Es gibt Zahlen b, φ_1, φ_2 derart, daß die Menge $M_{r(s,t)}$ der mit $r(s, t)$ verträglichen Mittelwertfunktionen gleich der Schar*

$$\xi(t) = c e^{i\varphi_1 t} - \frac{\bar{b}}{\bar{c}} e^{i\varphi_2 t}, \tag{3}$$

c beliebig komplex $\neq 0$, ist.

b, φ_1, φ_2 sind identisch in (ii) und (iii). Die Äquivalenz der Aussagen bedeutet, daß aus jeder Aussage die beiden übrigen folgen. — Der Beweis ist in Abschnitt 4 wiedergegeben.

Außer den oben durch (ii) und (iii) gegebenen Charakterisierungen der in (i) beschriebenen Klassen $S_{r(s,t)}$ gelten noch die im folgenden Satz enthaltenen äquivalenten Kennzeichnungen.

Satz 2. *Es sei* $r(s,t) \in G$, *und die Zahlen* b, φ_1, φ_2 *mögen die in Satz 1 angegebenen Bedingungen erfüllen;* a_1 *und* a_2 *seien positive Zahlen mit der Eigenschaft*

$$a_1 a_2 \geqq |b|^2. \tag{4}$$

Die folgenden Aussagen (iv)—(vi) *sind dann untereinander und mit den Aussagen* (i)—(iii) *des Satzes 1 äquivalent:*

(iv) *Die Menge* $S_{r(s,t)}$ *besteht aus den Zufallsprozessen*

$$x(t) = e^{i\varphi_1 t} z_1 + e^{i\varphi_2 t} z_2, \qquad t \in T, \tag{5}$$

in welchen z_1 *und* z_2 *zwei beliebige orthogonale Zufallsveränderliche sind mit*

$$E(z_1) = c_1, \quad E(|z_1|^2) = a_1 + |c_1|^2, \quad c_1 \text{ beliebig } \neq 0, \tag{6}$$

und

$$E(z_2) = c_2, \quad E(|z_2|^2) = a_2 + |c_2|^2, \quad \bar{c}_2 = -b/c_1. \tag{7}$$

(v) *Die Spektralverteilungsfunktionen* $F(\zeta)$ *(siehe Abschnitt 4) der Prozesse aus* $S_{r(s,t)}$ *bilden eine einparametrige Schar reiner Sprungfunktionen mit Sprüngen von der Höhe* $a_1 + |c_1|^2$ *und* $a_2 + |c_2|^2$ *an den zwei Stellen* $\zeta_1 = \varphi_1/2$ *und* $\zeta_2 = \varphi_2/2$, c_1 *beliebig* $\neq 0$.

(vi) *Die eigentliche Kovarianzfunktion* $r(s,t)$ *ist von der Gestalt*

$$r(s,t) = a_1 e^{i\varphi_1(s-t)} + a_2 e^{i\varphi_2(s-t)} + b\, e^{i(\varphi_1 s - \varphi_2 t)} + \bar{b}\, e^{i(\varphi_2 s - \varphi_1 t)} \quad s, t \in T. \tag{8}$$

Die Zahlen a_1 und a_2 sind durch $r(s,t)$ eindeutig bestimmt. Die Ungleichung (4) und die Positivität der a_k ist mit der positiven Definitheit von $r(s,t) \in G$ gleichbedeutend: sind nämlich $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ irgendwelche Zahlen aus T und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beliebige komplexe Zahlen, so gilt mit (8) und der Abkürzung

$$\Sigma_k = \sum_{j=1}^{n} e^{i\varphi_k t_j} \alpha_j, \qquad k = 1, 2,$$

die Beziehung

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \bar{\alpha}_k r(t_j, t_k) = a_1 \Sigma_1 \bar{\Sigma}_1 + a_2 \Sigma_2 \bar{\Sigma}_2 + b\, \Sigma_1 \bar{\Sigma}_2 + \bar{b}\, \bar{\Sigma}_1 \Sigma_2 \geqq 0$$

genau dann, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & \bar{b} \\ b & a_2 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

Beweis. 1. (i) ist hinreichend für (iv) bis (vi): unter Verwendung der Bezeichnungen des Beweises von Satz 1 (siehe Abschnitt 4) sei

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i l_k t} \{y(l_k+) - y(l_k-)\} + \int_{Z'} e^{2\pi i \zeta t} dy(\zeta)$$

die Aufspaltung eines beliebigen Prozesses $\{x(t)\} \in S_{r(s,t)}$ mit der Spektralverteilungsfunktion $F(\zeta)$ in zwei orthogonale Komponenten: $\{x_1(t)\}$ entspreche der in $F(\zeta)$ enthaltenen Sprungfunktion, deren Sprungstellen $l_1, l_2, \ldots$ seien, und $\{x_2(t)\}$ entspreche dem stetigen Anteil von $F(\zeta)$. Z' besteht aus der Menge Z außer den Punkten $l_1, l_2, \ldots$. Für die Erwartungswerte gilt nach (iii) von Satz 1

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i l_k t} E\{y(l_k+) - y(l_k-)\} + \int_{Z'} e^{2\pi i \zeta t} d\eta(\zeta) = c_1 e^{i\varphi_1 t} + c_2 e^{i\varphi_2 t}. \tag{9}$$

Nach Abschnitt 1 des Beweises von Satz 1 ist $\eta'(\zeta) = 0$ auf Z', so daß das Integral verschwindet. Daher hat $F(\zeta)$ genau zwei Sprungstellen, die mit ζ_1 und ζ_2 bezeichnet seien ($\zeta_1 = \varphi_1/2$, $\zeta_2 = \varphi_2/2$). Setzt man $z_k = y(\zeta_k+) - y(\zeta_k-)$, $k = 1, 2$, so gilt wegen der Orthogonalität der Zuwächse des Prozesses $\{y(\zeta)\}$ $E(z_1\bar{z}_2) = 0$. Aus (9) folgen weiter die ersten Gleichungen in (6) und (7). Wegen

$$R(s-t) = E(x(s)\overline{x(t)}) = E(|z_1|^2)\, e^{i\varphi_1(s-t)} + E(|z_2|^2)\, e^{i\varphi_2(s-t)}$$

und wegen (20) gelten schließlich die Gleichung (8) und die zweiten Gleichungen in (6), (7). Damit sind die Aussagen (iv)—(vi) aus (i) gewonnen.

2. Die Notwendigkeit von (i) und die Äquivalenz von (iv), (v) und (vi) kann man folgendermaßen zeigen: aus (v) folgt für zwei verschiedene Funktionen $F(\zeta)$ und $F^*(\zeta)$ der Schar auf Grund von Abschnitt 2 und 3 des Beweises von Satz 1 die Aussage (i). Daraus folgt (iv), wie oben gezeigt. Aus der Spektraldarstellung schwach stationärer Prozesse folgt unmittelbar die Äquivalenz von (iv) mit (v). Nach (1) folgt aus (iv) schließlich (vi) und daraus nacheinander (ii), (i) und (iv).

3. Die Definition der Äquivalenzklassen und ihre Abbildung aufeinander

Die beiden vorstehenden Sätze erlauben eine Zerlegung der Gesamtheit G der eigentlichen Kovarianzen und der Gesamtheit der Mittelwertfunktionen von schwach stationären Prozessen $\bigcup\limits_{r(s,t)\in G} M_{r(s,t)}$ in einander eineindeutig zugeordnete Äquivalenzklassen. Zu diesem Zweck definieren wir für $r(s,t) \in G$:

k_0: die Klasse aller $r(s,t)$, die nur von $s-t$ abhängen;

$k(b, \varphi_1, \varphi_2)$: für die in Satz 1 definierten Tripel b, φ_1, φ_2 die Klasse aller $r(s,t)$ von der Gestalt (8) mit variablem $a_1 > 0, a_2 > 0$, so daß $a_1 a_2 \geqq |b|^2$;

$k\{r(s,t)\}$: für $r(s,t) \notin k_0$, $\notin \bigcup\limits_{b,\varphi_1,\varphi_2} k(b, \varphi_1, \varphi_2)$ die Klasse mit der Eigenschaft, daß die Differenz je zweier in ihr enthaltener eigentlichen Kovarianzen nur von $s-t$ abhängt.

Aus jeder Klasse kann man ein beliebiges Element als Repräsentanten herausgreifen. (Man erkennt jedoch leicht, daß die angegebene Klasseneinteilung keine Restklassenzerlegung von G modulo einer Menge von Funktionen darstellt, die nur von $s-t$ abhängen.) Die dritte der vorstehenden Kategorien von Klassen läßt sich dann etwas deutlicher schreiben, wenn man eine Indexmenge B einführt derart, daß die Gesamtheit der Repräsentanten dieser Kategorie gleich $r_\beta(s,t)$, $\beta \in B$ ist. Die Klassen selbst sind dann $k\{r_\beta(s,t)\}$, $\beta \in B$.

Die Gesamtheit der Mittelwertfunktion wird entsprechend zerlegt in die Klassen

$\varkappa_0$: die Klasse der Funktionen $c e^{i\varphi t}$, $t \in T$, in welcher c alle komplexen und φ alle reellen Zahlen durchläuft;

$\varkappa(b, \varphi_1, \varphi_2)$: für die in Satz 1 definierten Tripel b, φ_1, φ_2 die Klasse der Funktionen $c e^{i\varphi_1 t} - \bar{b}\, \bar{c}^{-1} e^{i\varphi_2 t}$, $t \in T$, mit $c \neq 0$ beliebig komplex;

$\varkappa\{r_\beta(s,t)\}$, $\beta \in B$: die Klasse der Funktionen $e^{i\varphi}\xi_\beta(t)$, $t \in T$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ derart, daß $r_\beta(s,t) + \xi_\beta(s)\overline{\xi_\beta(t)}$ nur von $s-t$ abhängt.

Es gilt dann

Satz 3. *Die k- und $\varkappa$-Klassen sind einander eineindeutig zugeordnete Äquivalenzklassen: es entsprechen sich k_0 und $\varkappa_0$, $k(b, \varphi_1, \varphi_2)$ und $\varkappa(b, \varphi_1, \varphi_2)$ für jedes erlaubte Tripel b, φ_1, φ_2, ferner $k\{r_\beta(s,t)\}$ und $\varkappa\{r_\beta(s,t)\}$ für jedes $\beta \in B$.*

Die Äquivalenz von Klassen war in der Einleitung definiert worden. Aus dem Satz folgt, daß die Mengen $M_{r(s,t)}$ für die eigentlichen Kovarianzen einer bestimmten k-Klasse identisch und der zugeordneten $\varkappa$-Klasse gleich sind. — Bevor wir den Satz beweisen, vermerken wir eine einfache Folgerung.

Unter den eigentlichen Kovarianzen bzw. den Mittelwertfunktionen lassen sich drei Typen (oder Kategorien) in der folgenden Weise unterscheiden:

1. die nur von $s - t$ abhängigen Funktionen (d. h. die Klasse k_0);
2. $\bigcup\limits_{b,\varphi_1,\varphi_2} k(b, \varphi_1, \varphi_2)$, wo b, φ_1, φ_2 ihre Definitionsbereiche durchlaufen;
3. $\bigcup\limits_{\beta \in B} k\{r_\beta(s,t)\} = G - (k_0 \cup \bigcup\limits_{b,\varphi_1,\varphi_2} k(b, \varphi_1, \varphi_2))$.

Entsprechend faßt man Familien von $\varkappa$-Klassen zusammen. Aus Satz 3 folgt dann unmittelbar das Korollar:

Korollar. *Unter den eigentlichen Kovarianzen und den Mittelwertfunktionen sind die folgenden drei Typen einander eineindeutig zugeordnet:*

1. *$r(s,t)$ ist genau dann eine nur von $s - t$ abhängige Funktion, wenn die Mittelwertfunktion die Gestalt*

$$\xi(t) = c\, e^{i\varphi t}, \qquad t \in T,$$

hat, wobei c eine komplexe und φ eine reelle Zahl ist.

2. *$r(s,t) = a_1 e^{i\varphi_1(s-t)} + a_2 e^{i\varphi_2(s-t)} + b\, e^{i(\varphi_1 s - \varphi_2 t)} + \bar{b}\, e^{i(\varphi_2 s - \varphi_1 t)}$, $s, t \in T$, wobei die Zahlen $b\,(\neq 0)$ komplex, a_1, a_2 positiv mit $a_1 a_2 \geqq |b|^2$, $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ (T diskret), $< \infty$ (T kontinuierlich) sind, genau dann, wenn die Mittelwertfunktion die Gestalt*

$$\xi(t) = c\, e^{i\varphi_1 t} - \bar{b}\, \bar{c}^{-1} e^{i\varphi_2 t}$$

hat mit komplexem $c \neq 0$.

3. *$r(s,t)$ ist genau dann nicht von einem der ersten beiden Typen, wenn die Mittelwertfunktion nicht von einem der dort beschriebenen Typen ist.*

Beweis von Satz 3. 1. Für $r(s,t) \in k_0$ hängt $\xi(s)\,\overline{\xi(t)}$ nur von $s - t$ ab. Für $s = t$ folgt $|\xi(t)| = \text{const}$, d. h. $\xi(t) = c\, e^{i\varphi(t)}$ mit einer komplexen Zahl c und einer reellen Funktion $\varphi(t)$. Für ein beliebiges $\delta > 0$ im kontinuierlichen, $\delta = 1$ im diskreten Fall folgt ferner

$$\varphi(t+\delta) - \varphi(t) = \text{const} \pmod{2\pi} \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann daher im diskreten Fall $\varphi(t) = \varphi t$ gewählt werden mit einem $\varphi \in [0, 2\pi)$. Im kontinuierlichen Fall gilt, daß $\xi(t)$ und damit $\varphi(t)$ stetig sind; die Stetigkeit von $\xi(t)$ folgt aus (10) (siehe Abschnitt 4) nach bekannten Sätzen (vgl. BOCHNER [2], p. 81). Es folgt wieder $\varphi(t) = \varphi t$, wobei φ eine Konstante ist mit $-\infty < \varphi < \infty$. Damit ist gezeigt, daß zu jedem Element aus k_0 jedes beliebige Element aus $\varkappa_0$ gehören kann. Die Umkehrung ist offensichtlich ebenfalls richtig.

2. Die Zuordnung von $k(b, \varphi_1, \varphi_2)$ und $\varkappa(b, \varphi_1, \varphi_2)$ folgt aus der Äquivalenz der Aussagen (iii) und (vi) in den Sätzen 1 und 2.

3. Wenn $r(s, t) \in k\{r_\beta(s, t)\}$, $\beta \in B$, so kann $M_{r(s,t)}$ nach Satz 1 nur aus Vielfachen $c\xi(t)$ einer einzigen Funktion $\xi(t)$ bestehen, für die außerdem $r(s, t) + \xi(s)\overline{\xi(t)}$ nur von $s - t$ abhängt. Da nun aber $r(s, t)$ keine Funktion von $s - t$ allein ist, gilt dies auch für $\xi(s)\overline{\xi(t)}$. Daher muß $|c| = 1$ sein, d. h. $c = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Offenbar gilt diese Betrachtung für jedes $r(s, t) \in k\{r_\beta(s, t)\}$ (β fest) mit derselben Funktion $\xi(t)$, so daß diese mit $\xi_\beta(t)$ bezeichnet werden kann; insbesondere hängt $r_\beta(s, t) + \xi_\beta(s)\overline{\xi_\beta(t)}$ nur von $s - t$ ab.

Bemerkungen: 1. Aus dem in der Einleitung erwähnten Satz von Ylvisaker folgt, daß $\xi_\beta(t)$ bei gegebener eigentlicher Kovarianz $r_\beta(s, t)$ von der Gestalt

$$\xi_\beta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j r_\beta(t, s_j)$$

sein muß. Die Zahlenfolgen $\{a_j\}$ und $\{s_j\}$ ergeben sich aus dem Ylvisakerschen Satz.

2. Betrachtet man nur *reelle*, schwach stationäre Zufallsprozesse und schränkt die Mengen G und $M_{r(s,t)}$ entsprechend ein, so werden in den Sätzen 1 und 2 und bei der Klasseneinteilung in Satz 3 geringfügige Änderungen notwendig; Satz 3 und das Korollar bleiben dann wörtlich bestehen.

Für beliebiges komplexes $b \neq 0$ und beliebiges φ aus $[0, 2\pi)$ (wenn $T = \Gamma$) oder aus $(-\infty, +\infty)$ (wenn $T = R^1$) ist

$k(b, \varphi)$ die Klasse aller $r(s, t)$ von der Gestalt

$$r(s, t) = a \cos \varphi(s - t) + 2 \operatorname{Re}\{b\, e^{i\varphi(s+t)}\} \text{ mit } a \geqq 2\,|b|\,;$$

die Klassen k_0 und $k\{r_\beta(s, t)\}$ bleiben sinngemäß wie früher erhalten.

$\varkappa_0$ ist die Klasse der konstanten Funktionen (t kontinuierlich) bzw. der Funktionen $\xi(t) = c\,\varepsilon^t$ ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), worin c reell und $\varepsilon = +1$ oder -1 ist.

$\varkappa(b, \varphi)$ besteht aus dem Funktionenpaar $\pm 2 \operatorname{Re}(\sqrt{-b}\, e^{i\varphi t})$; b und φ liegen in den oben angegebenen Bereichen;

$\varkappa\{r_\beta(s, t)\}$, $\beta \in B$, besteht aus den zwei eindeutig bestimmten Funktionen $\pm\xi_\beta(t)$, für die $r_\beta(s, t) + \xi_\beta(s)\overline{\xi_\beta(t)}$ nur von $s - t$ abhängt.

In Satz 1 bzw. in Satz 2 ist $\varphi_2 = -\varphi_1$, $b = -c_1^2$, $a_1 = a_2$ und $z_1 = \overline{z_2}$ zu setzen. Zusammenfassend ergibt sich, daß die Mittelwertfunktionen zu vorgegebener, nicht von $s - t$ allein abhängiger eigentlicher Kovarianzfunktion $r(s, t)$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind.

Anwendung: Ein Zufallsprozeß $\{z(t)\}$, $t \in T$, erlaube eine lineare Dekomposition von der Gestalt

$$z(t) = m(t) + x(t)\,, \qquad t \in T\,,$$

wo die Fehlerterme $x(t)$ einem schwach stationären Prozeß mit nicht notwendig verschwindender Mittelwertfunktion und die Regressionsfunktion $m(t)$ einem linearen, endlich dimensionalen Raum U angehören. (Es ist klar, daß eine solche Zerlegung mit schwach stationären Fehlern nicht mehr zu bestehen braucht, wenn $E\,x(t) \equiv 0$ verlangt wird.) Es erhebt sich die Frage, ob die Zerlegung eindeutig ist. Offenbar ist dies genau dann der Fall, wenn $M_{r(s,t)} \cap U$ leer ist, wo $r(s, t) = \operatorname{cov}(z(s), \overline{z(t)}) = \operatorname{cov}(x(s), \overline{x(t)})$. Ist $r(s, t)$ bekannt, so läßt sich eine verträgliche

Mittelwertfunktion $\xi(t)$ und daraus $M_{r(s,t)}$ bestimmen. Damit ist auch $M_{r(s,t)} \cap U$ bekannt. Ist $r(s, t)$ nicht bekannt, so wird man im allgemeinen deswegen mit Eindeutigkeit rechnen dürfen, weil $\bigcup_{r(s,t)\in G} M_{r(s,t)}$ mindestens abzählbar unendlich viele Dimensionen hat gegenüber endlich vielen Dimensionen von U. Handelt es sich um eine reelle Regressionsaufgabe, so ist die eventuelle Mehrdeutigkeit der Zerlegung auf die zwei Möglichkeiten

$$m(t) \quad \text{und} \quad m(t) + 2\xi(t)$$

beschränkt, außer in dem Sonderfall, daß $r(s, t)$ nur von $s - t$ abhängt.

4. Beweis von Satz 1

Bezeichnungen: Für schwach stationäre Prozesse gilt die Spektraldarstellung (DOOB [4])

$$R(t) = \int_Z e^{2\pi i \zeta t} dF(\zeta), \qquad t \in T,$$
$$x(t) = \int_Z e^{2\pi i \zeta t} dy(\zeta);$$

der Integrationsbereich Z ist die reelle Achse im Falle $T = R^1$ und das Intervall $[-1/2, 1/2]$ im Falle $T = \Gamma$, $F(\zeta)$ ist die Spektralverteilungsfunktion und $\{y(\zeta)\}$, $\zeta \in Z$, ein Zufallsprozeß mit orthogonalen Zuwächsen, für den

$$E(|dy(\zeta)|^2) = dF(\zeta)$$

gilt.

Die Funktion

$$\eta(\zeta) = E(y(\zeta))$$

ist für $\zeta \in Z$ definiert und endlich, denn $y(\zeta)$, $\zeta \in Z$, ist ein Element eines Raumes L_p^2 von Funktionen, die auf dem dem Prozeß $\{x(t)\}$ zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum mit Maß p quadratisch integrierbar sind; diese Funktionen sind deshalb auch p-integrierbar.

Sind $\zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_{n+1}$ beliebige Punkte aus Z, so gilt mit geeigneten komplexen Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vom Betrage Eins

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta(\zeta_{k+1}) - \eta(\zeta_k)| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(y(\zeta_{k+1}) - y(\zeta_k)) = E\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \{y(\zeta_{k+1}) - y(\zeta_k)\}\Big).$$

Das Quadrat hiervon ist auf Grund der Schwarzschen Ungleichung nicht größer als

$$E\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \{y(\zeta_{k+1}) - y(\zeta_k)\}\Big|^2\Big) = \sum_{k=1}^{n} E(|y(\zeta_{k+1}) - y(\zeta_k)|^2) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (F(\zeta_{k+1}) - F(\zeta_k)) \leqq R(0) < \infty.$$

Es folgt, daß $\eta(\zeta)$ von beschränkter Schwankung und, wenn $F(\zeta)$ absolut stetig ist, ebenfalls absolut stetig ist; $\eta(\zeta)$ erzeugt daher auf Z ein komplexwertiges Lebesgue-Stieltjes-Maß. In bezug auf dieses Maß sind die Funktionen $e^{2\pi i \zeta t}$, $\zeta \in Z$, $t \in T$, meßbar, und es gilt

$$\xi(t) = \int_Z e^{2\pi i t \zeta} d\eta(\zeta), \qquad t \in T, \tag{10}$$

denn für eine beliebige Zerlegung $\zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_n$, $\zeta_k \in Z$, ist

$$\begin{aligned}&\Big|\xi(t) - \sum_{r=0}^{n-1} e^{2\pi i t \zeta_r}\{\eta(\zeta_{r+1}) - \eta(\zeta_r)\}\Big| \\ &\quad = \Big|E[x(t) - \sum_{r=0}^{n-1} e^{2\pi i t \zeta_r}\{y(\zeta_{r+1}) - y(\zeta_r)\}]\Big| \leqq \\ &\quad \leqq (E\,\Big|x(t) - \sum_{r=0}^{n-1} e^{2\pi i t \zeta_r}\{y(\zeta_{r+1}) - y(\zeta_r)\}\Big|^2)^{1/2};\end{aligned}$$

dieser Ausdruck kann aber wegen der Konvergenz von $\int\limits_Z e^{2\pi i \zeta t}\, dy(\zeta)$ im quadratischen Mittel durch Wahl der ζ-Zerlegung beliebig klein gemacht werden.

Wir kommen nun zum eigentlichen *Beweis von Satz 1* und zeigen:

Aussage (i) impliziert Aussage (ii): 1. Wir beweisen zunächst, daß die Differenz der Spektralverteilungsfunktionen $F(\zeta) - F^*(\zeta)$ zweier Prozesse $\{x(t)\}$, $\{x^*(t)\}$, $t \in T$ aus $S_{r(s,t)}$ eine reine Sprungfunktion ist; $\xi(t)$, $\xi^*(t)$ seien die zugehörigen linear unabhängigen Mittelwertfunktionen. Aus

$$R(t) - R^*(t) = \xi(t+s)\overline{\xi(s)} - \xi^*(t+s)\overline{\xi^*(s)} \tag{11}$$

folgt

$$\int\limits_Z e^{2\pi i t \zeta}\, d\{F(\zeta) - F^*(\zeta)\} = \overline{\xi(s)} \int\limits_Z e^{2\pi i (t+s)\zeta}\, d\eta(\zeta) - \overline{\xi^*(s)} \int\limits_Z e^{2\pi i (t+s)\zeta}\, d\eta^*(\zeta) \tag{12}$$

(die gesternten Größen beziehen sich auf den Prozeß $\{x^*(t)\}$).

Es seien

$$\Phi_n(t, \zeta') = \int\limits_Z e^{-2\pi i \zeta t} f_n(\zeta, \zeta')\, d\zeta\,, \qquad t \in T, \tag{13}$$

die Fouriertransformierte bzw. die Folge der Fourierkoeffizienten des Féjer-Kernes

$$f_n(\zeta, \zeta') = \frac{1}{\pi n}\left(\frac{\sin n(\zeta - \zeta')}{\zeta - \zeta'}\right)^2, \qquad \zeta, \zeta' \in Z,$$

wo n eine natürliche Zahl und ζ' ein Parameter ist; die Existenz von $\Phi_n(t, \zeta')$ folgt aus $f_n(\zeta, \zeta') = O(|\zeta|^{-2})$. Die Funktionen $f_n(\zeta, \zeta')$ sind in bezug auf ζ analytisch, und alle Ableitungen haben die Ordnung $O(\zeta^{-2})$. Daher ist $f_n(\zeta, \zeta') \in L^1$ (= Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen) und $\Phi_n(t, \zeta') = O(|t|^{-N})$, $N = 1, 2, \ldots$, als Funktion von t (Bochner [2], p. 13). Da für $t \in R^1$ $\Phi_n(t, \zeta')$ außerdem stetig ist und somit in L^1 liegt, gilt schließlich auch die Umkehrung von (13)

$$f_n(\zeta, \zeta') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \zeta}\, \Phi_n(t, \zeta')\, dt\,, \qquad \zeta, \zeta' \in Z \tag{14}$$

(vgl. etwa Bochner-Chandrasekharan [3], p. 1 und 21); bei diskretem t ist das Integral durch eine Summe zu ersetzen, oder aber das Lebesguemaß ist durch ein von einer Sprungfunktion erzeugtes Lebesgue-Stieltjes-Maß zu ersetzen und die Definition von $\Phi(t, \zeta')$ ist geeignet zu erweitern.

Wir multiplizieren nun Gleichung (12) mit $\Phi_n(t, \zeta')$ und integrieren (summieren) bezüglich t über T. Nach dem Fubinischen Satz dürfen die Integrationen über t und ζ vertauscht werden, denn die Funktionen $e^{2\pi i t\zeta}$ bzw. $e^{2\pi i(t+s)\zeta}$ sind auf dem Produktraum $Z \times T$ beschränkt und bezüglich der auftretenden Lebesgue-Stieltjesschen Produktmaße meßbar; folglich ist der ganze Integrand auf $Z \times T$ integrierbar, denn der zweite Faktor, $\Phi_n(t, \zeta')$, ist Element eines L^1 und integrierbar auf $Z \times T$ (HALMOS [5], *p.* 81).

Wir zerlegen nun die Maße auf Z in ihre absolut stetigen Komponenten

$$\{f(\zeta) - f^*(\zeta)\}\, d\zeta\,, \quad \eta'(\zeta)\, d\zeta\,, \quad \eta^{*\prime}(\zeta)\, d\zeta$$

und in die in ihnen enthaltenen Sprungfunktionen mit den Sprüngen

$$D_k = F(\zeta_k+) - F(\zeta_k-) - F^*(\zeta_k+) + F^*(\zeta_k-)\,,$$
$$m_k = \eta(\zeta_k+) - \eta(\zeta_k-)\,, \quad m_k^* = \eta^*(\zeta_k+) - \eta^*(\zeta_k-)$$

an den abzählbar vielen Sprungstellen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ von $F(\zeta) - F^*(\zeta)$ ($f(\zeta)$, $f^*(\zeta)$ sind die Spektraldichten von $F(\zeta)$, $F^*(\zeta)$, $\zeta \neq \zeta_1, \zeta_2, \ldots$). Man erhält so schließlich mit (14)

$$\begin{aligned} &\int_Z f_n(\zeta,\zeta')\{f(\zeta) - f^*(\zeta)\}\, d\zeta + \sum_k f_n(\zeta_k,\zeta')\, D_k \\ &= \overline{\xi(s)}\Big\{\int_Z f_n(\zeta,\zeta')\, e^{2\pi i s\zeta}\, \eta'(\zeta)\, d\zeta + \sum_k f_n(\zeta_k,\zeta')\, e^{2\pi i s\zeta_k} m_k\Big\} - \\ &- \overline{\xi^*(s)}\Big\{\int_Z f_n(\zeta,\zeta')\, e^{2\pi i s\zeta}\, \eta^{*\prime}(\zeta)\, d\zeta + \sum_k f_n(\zeta_k,\zeta')\, e^{2\pi i s\zeta_k} m_k^*\Big\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Nun gilt für fast alle (L-Maß) $\zeta' \in Z$ mit einer beliebigen L-integrierbaren Funktion $g(\zeta)$, $\zeta \in Z$, die Féjersche Integraldarstellung (BOCHNER [2], p. 27)

$$g(\zeta') = \lim_{n\to\infty} \int_Z g(\zeta)\, f_n(\zeta,\zeta')\, d\zeta\,. \tag{16}$$

Läßt man in (15) für einen beliebigen Wert $\zeta' \neq \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $n \to \infty$ gehen, so verschwinden alle Summen und es bleibt nach (16) (wir ersetzen ζ' durch ζ)

$$f(\zeta) - f^*(\zeta) = \{\overline{\xi(s)}\, \eta'(\zeta) - \overline{\xi^*(s)}\, \eta^{*\prime}(\zeta)\}\, e^{2\pi i s\zeta} \tag{17}$$

für fast alle (L-Maß) $\zeta \in Z$ und alle $s \in T$.

Nimmt man an, daß $F(\zeta) - F^*(\zeta)$ keine reine Sprungfunktion ist, so gilt $\delta(\zeta) \equiv f(\zeta) - f^*(\zeta) \neq 0$ auf einer Menge D von positivem L-Maß. Zu einem beliebigen Wertepaar $s_1, s_2 \in T$ gibt es daher Punktepaare $\zeta', \zeta'' \in D$ derart, daß alle Matrizen in der Gleichung

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{-2\pi i s_1\zeta'} & e^{-2\pi i s_1\zeta''} \\ e^{-2\pi i s_2\zeta'} & e^{-2\pi i s_2\zeta''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(\zeta') & 0 \\ 0 & \delta(\zeta'') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi(s_1) & \xi^*(s_1) \\ \xi(s_2) & \xi^*(s_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta'(\zeta') & \eta'(\zeta'') \\ -\eta^{*\prime}(\zeta') & -\eta^{*\prime}(\zeta'') \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

nicht singulär sind. Diese Matrizengleichung erhält man durch Anschreiben von (17) für die vier Punktepaare ζ', s_1; ζ', s_2; ζ'', s_1; ζ'', s_2. Auf Grund von (18) lassen sich $\xi(s_1)$ und $\xi^*(s_1)$ als Linearkombinationen von $e^{2\pi i\zeta' s_1}$ und $e^{2\pi i\zeta'' s_1}$ ausdrücken. Da diese Darstellung eindeutig sein muß, ζ' und ζ'' jedoch beliebig dicht beieinander gewählt werden können, erhält man einen Widerspruch. Daher muß

$F(\zeta) - F^*(\zeta)$ eine reine Sprungfunktion sein. Außerdem ist nach (17) $\eta'(\zeta) = \eta^{*\prime}(\zeta) = 0$ außer an Sprungstellen von $F(\zeta) - F^*(\zeta)$.

2. Wir zeigen weiter, daß die Sprungfunktion $F(\zeta) - F^*(\zeta)$ mehr als eine Sprungstelle besitzen muß. Es seien $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ die Sprungstellen. Das Gesetz der großen Zahlen für schwach stationäre Prozesse (Doob [4], p. 491 und p. 530), angewandt auf (11) bei festgehaltenem s, ergibt dann

$$D_k = e^{2\pi i \zeta_k s}\{m_k \overline{\xi(s)} - m_k^* \overline{\xi^*(s)}\} \tag{19}$$

für $k = 1, 2, \ldots$.

Die Annahme, $F(\zeta) - F^*(\zeta)$ habe nur eine Sprungstelle ζ_1, führt zum Widerspruch: aus der zu Gleichung (19) analogen Beziehung für ein $\zeta \neq \zeta_1$ folgt zunächst wegen der linearen Unabhängigkeit von $\xi(s)$ und $\xi^*(s)$, daß $\eta(\zeta)$ und $\eta^*(\zeta)$ stetig sind an Stetigkeitsstellen von $F(\zeta) - F^*(\zeta)$. Wegen $\eta'(\zeta) = \eta^{*\prime}(\zeta) = 0$ sind sie sogar auf Z konstant außer an ζ_1. Nach (10) hätte man dann aber $\xi(t) = e^{2\pi i t \zeta_1} m_1$, $\xi^*(t) = e^{2\pi i t \zeta_1} m_1^*$, also lineare Abhängigkeit.

3. Es bleibt der Fall zu betrachten, daß $F(\zeta) - F^*(\zeta)$ zwei oder mehr Sprungstellen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ hat. Wir schreiben die Gleichung (19) für die vier Wertepaare (ζ_1, s_1), (ζ_1, s_2), (ζ_2, s_1), (ζ_2, s_2), s_1, $s_2 \in T$, wie folgt in Matrixform an:

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i s_1 \zeta_1} & e^{2\pi i s_1 \zeta_2} \\ e^{2\pi i s_2 \zeta_1} & e^{2\pi i s_2 \zeta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\xi(s_1)} & \overline{\xi^*(s_1)} \\ \overline{\xi(s_2)} & \overline{\xi^*(s_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -m_1^* & -m_2^* \end{pmatrix}.$$

Da $D_1 D_2 \neq 0$ und da für geeignete Zahlen s_1, s_2 die erste Matrix nichtsingulär ist, ist auch die vierte nichtsingulär. Wählt man $s_2 = s$ frei veränderlich in T, so folgt daraus, daß $\xi(s)$ und $\xi^*(s)$ als Linearkombinationen von $e^{2\pi i \zeta_1 s}$ und $e^{2\pi i \zeta_2 s}$ dargestellt werden können. Wegen der Eindeutigkeit einer solchen Darstellung gibt es dann aber nur genau zwei Sprungpunkte. (Im diskreten Fall können $F(\zeta)$ und $F^*(\zeta)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Punkte $\zeta = -1/2$ rechtsstetig angenommen werden.) Die Mittelwerte sind also von der Gestalt

$$\xi(s) = c_1\, e^{i\varphi_1 s} + c_2\, e^{i\varphi_2 s}$$
$$\xi^*(s) = c_1^*\, e^{i\varphi_1 s} + c_2^*\, e^{i\varphi_2 s},$$

wo $\varphi_k = 2\pi i \zeta_k$, $k = 1, 2$, ist. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} r(s,t) &= R(s-t) - |c_1|^2 e^{i\varphi_1(s-t)} - |c_2|^2 e^{i\varphi_2(s-t)} + \\ &\quad + b\, e^{i(\varphi_1 s - \varphi_2 t)} + \bar{b}\, e^{i(\varphi_2 s - \varphi_1 t)}, \quad b = -c_1 \overline{c_2} = -c_1^* \overline{c_2^*}. \end{aligned} \tag{20}$$

Damit ist (ii) bewiesen.

Aus (ii) folgt (iii): Da $r(s, t)$ als Element aus G positiv definit und jede Funktion $\xi(t)$ der Schar (3) beschränkt ist, existiert stets ein Zufallsprozeß zweiter Ordnung mit der eigentlichen Kovarianz $r(s, t)$ und der Mittelwertfunktion $\xi(t)$. Hat $r(s, t)$ die in (ii) beschriebene Gestalt, wo φ_1, φ_2 und b die gleichen Zahlen wie in (3) sind, so ergibt eine kurze Rechnung, daß jener Prozeß stationär ist. Die Menge $M_{r(s,t)}$ enthält also die Schar (3). Sie ist ferner genau gleich dieser Schar, denn wenn $M_{r(s,t)}$ noch eine scharfremde Funktion $\xi^*(t)$ enthielte, so ließe sich in der Schar eine von $\xi^*(t)$ linear unabhängige Funktion $\xi(t)$ finden. Nach dem obigen Absatz 3 müßte dann jedoch $\xi^*(t)$ ein Element der Schar sein entgegen der Annahme.

Aus (iii) folgt (i), denn die Schar (3) enthält zwei linear unabhängige Funktionen. — Damit ist Satz 1 bewiesen.

Man kann diesen Satz im diskreten Fall auch kürzer mit Hilfe einfacher Matrizenrechnung beweisen (vgl. dazu den eingangs zitierten Bericht). Die Einbeziehung des kontinuierlichen Falles erweist sich dann jedoch als sehr umständlich.

Für verschiedene kritische Bemerkungen bin ich den Herren Professor H. WITTING, J. GOTTSCHEWSKI und G. HEXT zu besonderem Dank verpflichtet.

Literatur

[1] BALAKRISHNAN, A. V.: On a characterization of covariances. Ann. math. Statistics **30**, 670—675 (1959).
[2] BOCHNER, S.: Lectures on Fourier Integrals. Ann. Math. Studies 42. Princeton: Princeton University Press 1953.
[3] —, and K. CHANDRASEKHARAN: Fourier Transforms. Ann. Math. Studies 19. Princeton: Princeton University Press 1949.
[4] DOOB, J. L.: Stochastic Processes. New York: Wiley 1953.
[5] HALMOS, P. R.: Measure Theory. Princeton: Van Nostrand 1950.
[6] YLVISAKER, N. D.: A generalisation of a theorem of Balakrishnan. Ann. math. Statistics **32**, 1337—1339 (1961).

Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Freiburg/Breisgau
78 Freiburg i. Br., Hebelstr. 40

(Eingegangen am 10. November 1962)