Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 7, 336–354 (1967)

Fortsetzung stationärer Prozesse

HANS G. KELLERER

Eingegangen am 4. Dezember 1966

Einleitung

Ist T die geordnete, bezüglich der Addition geschlossene Gesamtheit der ganzen (Z) bzw. rationalen (Q) bzw. reellen (R) Zahlen und T_0 ein Teilintervall von T, so läßt sich folgendes Problem formulieren:

Gegeben ist ein „relativ-stationärer" Prozeß a_t, $t \in T_0$, d. h. eine Familie von Zufallsvariablen a_t derart, daß

$$(1) \quad \begin{cases} a_t,\ t \in S, \text{ und } a_{t+h},\ t \in S, \text{ gleich verteilt für endliches } S \subset T_0, \\ \text{falls } h \in T \text{ und } \{t + h : t \in S\} \subset T_0; \end{cases}$$

gesucht ist eine „stationäre Fortsetzung" $\tilde{a}_t$, $t \in T$, d. h. eine Familie von Zufallsvariablen a_t derart, daß

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde{a}_t,\ t \in S, \text{ und } a_t,\ t \in S, \text{ gleich verteilt für endliches } S \subset T_0, \\ \tilde{a}_t,\ t \in T, \text{ stationär.} \end{cases}$$

Ist dabei T_0 ein unendliches Intervall, etwa $T_0 = \{t \in T : t \geqq 0\}$, so läßt sich diese Frage sofort beantworten: Zu jedem relativ-stationären Prozeß a_t, $t \in T_0$, existiert eine stationäre Fortsetzung $\tilde{a}_t$, $t \in T$, die zudem, was die zugehörigen Verteilungen betrifft, eindeutig ist. Das folgt ohne Schwierigkeit aus der Tatsache, daß sich jede endliche Teilmenge von T durch eine geeignete Translation in eine Teilmenge von T_0 überführen läßt.

Ist daher T_0 ein endliches Intervall, etwa $T_0 = \{t \in T : 0 \leqq t \leqq t_0\}$, so genügt eine Fortsetzung des Prozesses von T_0 auf $\{t \in T : t \geqq 0\}$. Dabei sind — den eingangs genannten Parameterbereichen entsprechend — drei Fälle zu unterscheiden.

1. $T = Z$. In diesem Fall ist T eine diskrete Menge und lediglich zu entscheiden, ob der Definitionsbereich eines relativ-stationären Prozesses stets um einen Parameterwert nach rechts erweitert werden kann; denn auf diese Weise lassen sich schrittweise alle zu einer stationären Fortsetzung gehörigen Verteilungen gewinnen.

Um das nachzuweisen, seien die Zufallsvariablen $a_0, \ldots, a_n$ relativ-stationär oder — was damit gleichwertig ist — $a_0, \ldots, a_{n-1}$ und $a_1, \ldots, a_n$ gleich verteilt. Mittels der gemeinsamen Verteilung $\mu(B) = p((a_0, \ldots, a_n) \in B)$ und der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(\cdot \mid a_0, \ldots, a_{n-1})$ werde nun folgende Verteilung in den Koordinaten $x_0, \ldots, x_{n+1}$ definiert:

$$\tilde{\mu}(\tilde{B}) := \int\limits_{x_0, \ldots, x_n} p((x_0, \ldots, x_n, a_n) \in \tilde{B} \mid a_0 = x_1, \ldots, a_{n-1} = x_n)\, d\mu\,.$$

Dann gilt für $(n+1)$-dimensionale Borelsche Mengen B stets

$$(3) \quad \tilde{\mu}(B \times R) = \int\limits_{x_0, \ldots, x_n} p((x_0, \ldots, x_n) \in B \mid a_0 = x_1, \ldots, a_{n-1} = x_n)\, d\mu = \mu(B)\,,$$

$$(4)\qquad \tilde{\mu}(R\times B) = \int\limits_{x_0,\ldots,x_n} p((x_1,\ldots,x_n,a_n)\in B\,|\,a_0=x_1,\ldots,a_{n-1}=x_n)\,d\mu$$
$$= \int\limits_{x_0,\ldots,x_n} p((x_0,\ldots,x_{n-1},a_n)\in B\,|\,a_0=x_0,\ldots,a_{n-1}=x_{n-1})\,d\mu$$
$$= \mu(B)\,,$$

wobei die vorletzte Gleichung aus der Übereinstimmung der zu $x_0,\ldots,x_{n-1}$ und $x_1,\ldots,x_n$ gehörigen n-dimensionalen Marginalverteilungen von μ folgt. Sind also $\tilde{a}_0,\ldots,\tilde{a}_{n+1}$ Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilung $\tilde{\mu}$, so sind $a_0,\ldots,a_n$ und $\tilde{a}_0,\ldots,\tilde{a}_n$ bzw. $\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{n+1}$ wegen (3) bzw. (4) gleich verteilt, d. h. der Definitionsbereich $\{0,\ldots,n\}$ läßt sich um den Parameterwert $n+1$ erweitern[1].

2. $T = Q$. In diesem Fall ist T als abzählbare Vereinigung der monotonen Folge diskreter Mengen $T_n := \left\{\frac{m}{n!} : 0 \leqq m \in Z\right\}$ darstellbar und daher zu erwarten, daß sich das Fortsetzungsproblem mittels des in Teil 1 erhaltenen Ergebnisses lösen läßt, wobei ohne Einschränkung $T_0 = \{t \in T : 0 \leqq t \leqq 1\}$ angenommen werden kann.

Um das nachzuweisen, seien die Zufallsvariablen a_t, $t\in T$, relativ-stationär, also insbesondere identisch verteilt. Dann existiert nach Teil 1 zu jeder natürlichen Zahl n ein Prozeß $\tilde{a}_t^n$, $t \in T_n$, mit den Eigenschaften

$$(5)\qquad \begin{cases} \tilde{a}_t^n,\ T_n \ni t \leqq 1, \text{ und } a_t,\ T_n \ni t \leqq 1, \text{ gleich verteilt,}\\ \tilde{a}_t^n,\ t \in T_n, \text{ stationär.}\end{cases}$$

Ist nun $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit aller nicht-leeren endlichen Mengen nicht-negativer rationaler Zahlen, so ist jedem $S \in \mathfrak{S}$ ein Index $n(S) := \min\{n : S \subset T_n\}$ zugeordnet. Mit diesen Bezeichnungen sei μ_S^n für $n \geqq n(S)$ die zu $\tilde{a}_t^n$, $t\in S$, gehörige und für $n < n(S)$ eine beliebige Verteilung in den Koordinaten x_t, $t \in S$. Dann besitzt μ_S^n für festes $S \in \mathfrak{S}$ und $t \in S$ als zu x_t gehörige eindimensionale Marginalverteilung für $n \geqq n(S)$ die von n unabhängige Verteilung $\mu_0(B) = p(a_0 \in B)$, so daß die Menge $\{\mu_S^n : 1 \leqq n \in Z\}$ bezüglich der schwachen Konvergenz relativ kompakt ist (vgl. hierzu etwa [2], Satz 2.3). Da die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ abzählbar ist, läßt sich also nach dem Cantorschen Diagonalverfahren eine Teilfolge $((n_i))$ finden derart, daß

$$(6)\qquad \mu_S^{n_i} \text{ für } i\to\infty \text{ schwach konvergent gegen } \mu_S \qquad (S\in\mathfrak{S} \text{ beliebig}).$$

Dabei sind die Grenzverteilungen μ_S, $S\in\mathfrak{S}$, verträglich, da die für $n \geqq n(S)$ bestehende Verträglichkeit von $\mu_{S_1}^n$ und $\mu_{S_2}^n$ beim Grenzübergang (6) erhalten bleibt. Daher existiert ein Prozeß $\tilde{a}_t$, $0 \leqq t \in T$, mit diesen Verteilungen sowie den Eigenschaften

$$(7)\qquad \begin{cases} \tilde{a}_t,\ t\in S, \text{ und } a_t,\ t \in S, \text{ gleich verteilt für endliches } S \subset T_0,\\ \tilde{a}_t,\ 0 \leqq t \in T, \text{ stationär,}\end{cases}$$

die sich beim Grenzübergang (6) aus den entsprechenden Eigenschaften der Pro-

---

[1] Am Rande sei die im folgenden nicht benötigte Tatsache erwähnt, daß die angegebene Konstruktion einen Markovschen Prozeß der Ordnung n ergibt, also insbesondere für $n = 0$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und für $n = 1$ einen gewöhnlichen Markovschen Prozeß.

zesse $\tilde{a}_t^n$, $t \in T_n$, ergeben, d. h. die an die gesuchte stationäre Fortsetzung des gegebenen relativ-stationären Prozesses gestellten Forderungen sind erfüllt.

3. $T = R$. Um diesen Fall auf den in Teil 2 untersuchten zurückführen zu können, werde zunächst eine zusätzliche Annahme gemacht: Der relativ-stationäre Prozeß a_t, $0 \leqq t \leqq 1$, sei stochastisch stetig, d. h. es gelte

$$(8) \qquad \lim_{s \to t} p(|a_s - a_t| > \varepsilon) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \quad \text{und beliebiges } \varepsilon > 0\,,$$

eine nur von den zweidimensionalen Verteilungen abhängige Beziehung.

Ist dann $\tilde{a}_t$, $0 \leqq t \in Q$, eine nach Teil 2 vorhandene stationäre Fortsetzung des auf rationale Parameterwerte beschränkten Prozesses a_t, $0 \leqq t \leqq 1$, so überträgt sich das Stetigkeitsverhalten wegen der Stationarität vom Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[0, \infty)$. Daher existieren für irrationale $t \geqq 0$ bezüglich der stochastischen Konvergenz die Grenzwerte $\tilde{a}_t := \lim_{Q \ni s \to t} \tilde{a}_s$, und der dadurch definierte Prozeß $\tilde{a}_t$, $t \geqq 0$, ist ebenfalls stochastisch stetig. Da die stochastische Konvergenz in den einzelnen Koordinaten die schwache Konvergenz endlich-dimensionaler Verteilungen nach sich zieht, folgt daraus die Übereinstimmung der zu $\tilde{a}_t$, $0 \leqq t \leqq 1$, und a_t, $0 \leqq t \leqq 1$, gehörigen Verteilungen sowie die Stationarität von $\tilde{a}_t$, $t \geqq 0$, im gesamten Parameterbereich.

Jeder stochastisch stetige relativ-stationäre Prozeß a_t, $0 \leqq t \leqq 1$, besitzt demnach eine stationäre Fortsetzung $\tilde{a}_t$, $t \geqq 0$ — ein Satz, der auf weniger elementarem Weg bereits 1964 von Parthasarathy und Varadhan ([5]) bewiesen wurde. Weder die dort verwendeten Methoden noch die hier durchgeführten Überlegungen gestatten jedoch eine Verallgemeinerung des Beweises für den Fall, daß auf die Stetigkeitsvoraussetzung (8) verzichtet wird. Zwar genügt, wie sofort aus Teil 3 hervorgeht, die Annahme einer einseitigen Stetigkeit, doch gibt es sehr einfache stationäre Prozesse, die überall beidseitig unstetig sind: Unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen a_t, $t \geqq 0$, definieren stets einen stationären Prozeß, während eine stochastische Konvergenz $\lim_{s \uparrow t} a_s = a_t$ oder $\lim_{s \downarrow t} a_s = a_t$ zur Folge hat, daß sie mit Wahrscheinlichkeit Eins gleich und somit konstant sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis, daß zu jedem relativ-stationären Prozeß a_t, $0 \leqq t \leqq 1$, eine stationäre Fortsetzung $\tilde{a}_t$, $t \geqq 0$, existiert. Das ergibt sich durch Kombination zweier Sätze, die unabhängig von diesem Resultat von Interesse sind und in § 4 in folgender Form Verwendung finden:

a) Ist $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit aller endlichen Mengen $S \neq \emptyset$ reeller Zahlen $t \geqq 0$ mit $\max S - \min S \leqq 1$, so existiert zu einer Familie verträglicher Verteilungen μ_S, $S \in \mathfrak{S}$, in den Koordinaten x_t, $t \in S$, stets ein stochastischer Prozeß a_t, $t \geqq 0$, derart, daß die Zufallsvariablen a_t, $t \in S$, für $S \in \mathfrak{S}$ die gemeinsame Verteilung μ_S besitzen (§ 2).

b) Ist a_t, $t \geqq 0$, ein stochastischer Prozeß mit identisch verteilten Zufallsvariablen a_t, so existiert ein stationärer Prozeß $\tilde{a}_t$, $t \geqq 0$, derart, daß

$$\varliminf_{h \to \infty} E(f(a_{t+h}, t \geqq 0)) \leqq E(f(\tilde{a}_t, t \geqq 0)) \leqq \varlimsup_{h \to \infty} E(f(a_{t+h}, t \geqq 0))$$

für alle beschränkten und bezüglich der Produkt-Topologie stetigen Funktionen $f(x_t, t \geqq 0)$ (§ 3).

Für eine allgemeinere Formulierung dieser beiden Sätze ist es zweckmäßig, an Stelle von stochastischen Prozessen die zugehörigen Verteilungen zu betrachten; für ihren Beweis empfiehlt es sich außerdem, statt dieser Verteilungen die ihnen entsprechenden linearen Funktionale zu verwenden. Zunächst werden daher in § 1 die in diesem Zusammenhang benötigten Hilfsmittel entwickelt.

§ 1. Lineare Funktionale stetiger Funktionen auf Produkträumen

Um die beiden Fälle mit einzuschließen, daß die zugrunde liegenden Zufallsvariablen a mehrdimensional oder nur abzählbar vieler diskreter Werte fähig sind, sei allgemeiner angenommen, daß es sich um meßbare Abbildungen in einen Raum X mit einer Topologie $\mathfrak{U}$ handelt[2]. Dabei genügt im folgenden die Voraussetzung

$$(1) \qquad (X, \mathfrak{U}) \text{ lokal-kompakt mit abzählbarer Basis,}$$

die insbesondere beinhaltet, daß $(X, \mathfrak{U})$ separiert ist. Topologische Räume mit der Eigenschaft (1) lassen sich dadurch charakterisieren, daß der durch Einführung eines „unendlich fernen" Punktes w kompaktifizierte Raum eine Metrik d besitzt (vgl. hierzu etwa [1], Anhang § 1.1).

Der lineare Raum der beschränkten und stetigen reellen Funktionen f auf $(X, \mathfrak{U})$ wird im folgenden kurz mit $\mathscr{C}(X)$ bezeichnet. Durch die Definitionen

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

$$f_1 \leqq f_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad f_1(x) \leqq f_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

wird $\mathscr{C}(X)$ zu einem normierten Vektor-Verband.

Beim Übergang von einer einzelnen Zufallsvariablen a zu einem stochastischen Prozeß a_t, $t \in T\,(\neq \emptyset)$, werden die folgenden Produktbildungen benötigt.

a) Sind X_t, $t \in T$, beliebige Mengen, so definiert

$$(2) \qquad \prod_{t \in T} X_t := \{(x_t, t \in T) : x_t \in X_t \quad \text{für} \quad t \in T\}$$

die zugehörige Produktmenge und die Abbildung

$$\prod_{t \in T} X_t \ni (x_t, t \in T) \underset{\pi_S}{\rightarrow} (x_t, t \in S) \in \prod_{t \in S} X_t$$

die zu einer nicht-leeren Teilmenge S von T gehörige und im Fall $S = \{t\}$ kurz mit π_t bezeichnete Projektion.

b) Sind über den Mengen X_t σ-Ringe $\mathfrak{A}_t$ gegeben und bezeichnet allgemein $\sigma(\cdot)$ den von einem Mengensystem erzeugten σ-Ring, so definiert

$$(3) \qquad \prod_{t \in T}^{\sigma} \mathfrak{A}_t := \sigma(\{\pi_t^{-1}(A_t) : t \in T, A_t \in \mathfrak{A}_t\})$$

den zugehörigen Produkt-σ-Ring, d. h. den kleinsten σ-Ring über $\prod_{t \in T} X_t$, bezüglich dessen die Abbildungen π_t, $t \in T$, meßbar sind.

---

[2] Ist also $\mathfrak{B}$ der von $\mathfrak{U}$ erzeugte σ-Ring der Borelschen Mengen in X, so ist die Wahrscheinlichkeit $p(a \in B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ definiert.

c) Sind über den Mengen X_t Topologien $\mathfrak{U}_t$ gegeben und bezeichnet allgemein $\tau(\cdot)$ die von einem Mengensystem erzeugte Topologie, so definiert

$$(4) \qquad \prod_{t\in T}^{\tau} \mathfrak{U}_t := \tau(\{\pi_t^{-1}(U_t): t\in T,\, U_t\in\mathfrak{U}_t\})$$

die zugehörige Produkt-Topologie, d. h. die gröbste Topologie über $\prod_{t\in T} X_t$, bezüglich derer die Abbildungen π_t, $t\in T$, stetig sind.

Im Fall $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$ finden für die in (2)—(4) definierten Gesamtheiten auch folgende Schreibweisen Verwendung:

$$X_{t_1}\times\cdots\times X_{t_n},\ \mathfrak{A}_{t_1}\underset{\sigma}{\times}\cdots\underset{\sigma}{\times}\mathfrak{A}_{t_n},\ \mathfrak{U}_{t_1}\underset{\tau}{\times}\cdots\underset{\tau}{\times}\mathfrak{U}_{t_n}.$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich das Ziel der folgenden Überlegungen angeben: die Ableitung von Beziehungen, die zwischen den W-Maßen (Wahrscheinlichkeitsmaßen) μ auf dem σ-Ring $\prod_{t\in T}^{\sigma}\sigma(\mathfrak{A}_t)$ einerseits und den — durch die Forderung $\Lambda(1)=1$ — normierten positiven linearen Funktionalen auf dem Vektor-Verband $\mathscr{C}\left(\prod_{t\in T} X_t\right)$ andererseits bestehen und in § 2 und § 3 Verwendung finden. Dabei ist es zweckmäßig, von der folgenden Verallgemeinerung des RIESZschen Satzes auszugehen, deren Beweis sich etwa in [4] (Proposition II. 7. 1) findet:

Es sei X eine beliebige Menge, $\mathscr{L}$ ein Vektor-Verband reeller Funktionen $f\,|\,X$, der alle Konstanten enthält, und $\mathfrak{A}$ der kleinste σ-Ring über X, bezüglich dessen alle Funktionen $f\in\mathscr{L}$ meßbar sind. Dann definiert die Relation

$$\Lambda(f)=\int f\,d\mu \quad \textit{für} \quad f\in\mathscr{L}$$

eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengen

$$\{\mu\,|\,\mathfrak{A}: \mu \ W\text{-}\textit{Maß} \quad \textit{mit} \quad \int|f|\,d\mu<\infty \quad \textit{für} \quad f\in\mathscr{L}\},$$

$\{\Lambda\,|\,\mathscr{L}: \Lambda$ *normiertes positives lineares Funktional und* σ*-stetig*$\}$.

Dabei heißt ein positives lineares Funktional Λ auf einem Vektor-Verband $\mathscr{L}$ σ-stetig, falls

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty}\Lambda(f_n)=0 \quad \text{für} \quad \mathscr{L}\ni f_n\downarrow 0.$$

Die Anwendung dieses Satzes auf den hier interessierenden Fall ergibt:

Satz 1. *Es sei $T\neq\emptyset$ eine beliebige Indexmenge, $(X,\mathfrak{U})$ das Produkt der lokalkompakten Räume mit abzählbarer Basis $(X_t,\mathfrak{U}_t)$, $t\in T$, und $\mathfrak{B}(X)$ das Produkt der σ-Ringe $\mathfrak{B}_t=\sigma(\mathfrak{U}_t)$, $t\in T$. Dann definiert die Relation*

$$\Lambda(f)=\int f\,d\mu \quad \textit{für} \quad f\in\mathscr{C}(X)$$

eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengen

$$\{\mu\,|\,\mathfrak{B}(X):\ \mu\, W\text{-}\textit{Maß}\},$$

$\{\Lambda\,|\,\mathscr{C}(X): \Lambda$ *normiertes positives lineares Funktional und* σ*-stetig*$\}$.

Beweis. 1. Auf Grund des vorausgehenden Satzes ist lediglich zu zeigen, daß $\mathfrak{B}(X)$ der kleinste σ-Ring ist, bezüglich dessen alle Funktionen $f\in\mathscr{C}(X)$ meßbar sind. Da die topologischen Räume $(X_t,\mathfrak{U}_t)$ separabel sind, hängt dabei jede Funktion $f \in \mathscr{C}(X)$ gemäß [3] nur von abzählbar vielen Variablen ab, d. h. T läßt sich ohne Einschränkung als abzählbar voraussetzen.

2. Ist $\mathfrak{B}_t$ eine abzählbare Basis von $\mathfrak{U}_t$, so ist die Gesamtheit

$$\{\bigcap_{t\in S} \pi_t^{-1}(V_t) \colon S \subset T \quad \text{endlich}, \quad V_t \in \mathfrak{B}_t\}$$

abzählbar, eine Basis von $\mathfrak{U}$ und in $\mathfrak{B}(X)$ enthalten. Daraus folgt $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}(X)$, so daß insbesondere jede Funktion $f \in \mathscr{C}(X)$ bezüglich $\mathfrak{B}(X)$ meßbar ist.

3. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{B}(X)$ der kleinste derartige σ-Ring ist; dazu genügt der Nachweis, daß zu jeder Menge $U_t \in \mathfrak{U}_t$ eine Funktion $f_t \in \mathscr{C}(X_t)$ mit $U_t = \{x_t \colon f_t(x_t) > 0\}$ existiert. Ist d_t die im Anschluß an (1) erwähnte Metrik zu $(X_t, \mathfrak{U}_t)$, so leistet dies die Funktion

$$f_t(x_t) := \inf(\{d_t(x_t, y_t) \colon \ y_t \in U_t\} \cup \{1\}) .$$

Bereits der Fall einer einelementigen Indexmenge T zeigt, daß die Beschränkung auf σ-stetige Funktionale in diesem Satz wesentlich ist; doch läßt sich die Bedingung (5) folgendermaßen abschwächen:

Satz 2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz* 1 *gegeben. Ferner sei $\mathscr{L}$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{C}(X)$, der alle nur von einer Variablen abhängigen Funktionen enthält, und $\Lambda \mid \mathscr{L}$ ein normiertes positives lineares Funktional mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(f_t^n \circ \pi_t) = 0 \quad \textit{für} \quad \mathscr{C}(X_t) \ni f_t^n \downarrow 0 \qquad (t \in T \textit{ beliebig}). \tag{6}$$

Dann existiert ein W-Maß $\mu \mid \mathfrak{B}(X)$ derart, daß

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathscr{L} .$$

Beweis. 1. Da sich Λ nach dem Satz von Hahn-Banach zu einem normierten positiven linearen Funktional auf $\mathscr{C}(X)$ fortsetzen läßt und die Eigenschaft (6) davon nicht beeinflußt wird, kann ohne Einschränkung $\mathscr{L} = \mathscr{C}(X)$ angenommen werden. Auf Grund von Satz 1 ist dann lediglich die σ-Stetigkeit von Λ nachzuweisen, wobei T wie im Beweis dieses Satzes als abzählbar — etwa $T = \{t \in Z \colon t \geqq 1\}$ — vorausgesetzt werden kann.

2. Mit den im Anschluß an (1) eingeführten Bezeichnungen werden dazu folgende Funktionen auf X_t definiert:

$$g_t^n(x_t) := \operatorname{med}\{0, \ 2 - n\, d_t(w_t, x_t), \ 2\} \quad \text{für} \quad 1 \leqq n \in Z . \tag{7}$$

Dann gilt, wie leicht einzusehen ist, $\mathscr{C}(X_t) \ni g_t^n \downarrow 0$; dabei sind die Mengen $\{x_t \colon g_t^n(x_t) \leqq 1\}$ abgeschlossen und im Komplement von $\{x_t \colon d_t(w_t, x_t) < 1/n\}$ enthalten und daher kompakt. Zusammen mit der Voraussetzung (6) ergibt das: zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existieren Funktionen $g_t \in \mathscr{C}(X_t)$ derart, daß

$$\Lambda(g_t \circ \pi_t) \leqq \frac{\varepsilon}{2^t} \quad \text{und} \quad K_t := \{x_t \colon g_t(x_t) \leqq 1\} \text{ kompakt.} \tag{8}$$

3. Nach diesen Vorbereitungen sei $((f_n))$ eine monoton gegen Null konvergente Folge aus $\mathscr{C}(X)$, wobei etwa $f_n \leqq 1$ gelte und zunächst zusätzlich angenommen werde, daß jede dieser Funktionen nur von endlich vielen Variablen abhängt. Da

die Menge $K := \prod_{t\in T} K_t$ nach dem Satz von TYCHONOV ebenfalls kompakt ist, ist die Konvergenz $f_n \downarrow 0$ nach dem Satz von DINI auf K gleichmäßig, d.h. es existiert ein Index m mit

$$f_m(x) < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in K.$$

Ist dabei f_m von den Variablen x_t, $t > s$, unabhängig, so gilt diese Ungleichung für alle $x \in \prod_{t \leqq s} K_t \times \prod_{t > s} X_t$. Unter Berücksichtigung von $f_m \leqq 1$ ergibt das

$$f_m(x) < \varepsilon + \sum_{t \leqq s} g_t(\pi_t x) \quad \text{für alle} \quad x \in X,$$

also wegen (8) schließlich die Abschätzung

$$\Lambda(f_n) \leqq \Lambda(f_m) \leqq \varepsilon + \sum_{t \leqq s} \frac{\varepsilon}{2^t} < 2\varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq m.$$

4. Zum Nachweis, daß die in Teil 3 gemachte Einschränkung nicht wesentlich ist, genügt es, folgende Behauptung zu beweisen:

(9) $\left\{\begin{array}{l}\text{Jede Funktion } f \in \mathscr{C}(X) \text{ ist Grenzwert einer monoton fallenden Folge von} \\ \text{Funktionen } f^s \in \mathscr{C}(X)\text{, die von den Variablen } x_t,\ t > s\text{, unabhängig sind.}\end{array}\right.$

Denn auf Grund dieses Hilfssatzes existieren zu einer monoton gegen Null konvergenten Folge $((f_n))$ aus $\mathscr{C}(X)$ zunächst Funktionen f_n^s mit den in (9) angegebenen Eigenschaften, aus denen sich durch die Definition

$$f^n := \min\{f_1^n, \ldots, f_n^n\} \quad \text{für} \quad 1 \leqq n \in Z$$

eine monoton fallende Folge von Funktionen $f^n \in \mathscr{C}(X)$ ableiten läßt, die jeweils nur von endlich vielen Variablen abhängen und für die

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} f^n \leqq \lim_{n\to\infty} f_k^n = f_k \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Gemäß Teil 3 gilt also

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} \Lambda(f_n) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(\min\{f_1, \ldots, f_n\}) \leqq \lim_{n\to\infty} \Lambda(f^n) = 0,$$

und das beweist die allgemeine σ-Stetigkeit von Λ.

5. Um die Richtigkeit von (9) nachzuweisen, werde definiert:

$$f^s(x) := \sup_{y\in X} g^s(x, y) \quad \text{mit} \quad g^s(x, y) := f(y) - s \max_{t \leqq s} d_t(x_t, y_t).$$

Das ergibt auf Grund der für jedes feste y gültigen Ungleichungen

$$g^s(x, y) \geqq g^{s+1}(x, y) \quad \text{und} \quad |g^s(x', y) - g^s(x'', y)| \leqq s \max_{t \leqq s} d_t(x', x'')$$

eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen f^s, die von den Variablen x_t, $t > s$, unabhängig und wegen

$$f(x) = g^s(x, x) \leqq f^s(x) \leqq \|f\|$$

beschränkt sind. Daher bleibt lediglich zu zeigen:

$$\lim_{s\to\infty} f^s(x) \leqq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Dazu werde für festes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein — wegen der Stetigkeit von f vorhandener — Index s gewählt derart, daß

$$f(y) < f(x) + \varepsilon \quad \text{für} \quad y \in U := \left\{y \colon \max_{t \leq s} d_t(x_t, y_t) < \frac{2\|f\|}{s}\right\}.$$

Das ergibt die Ungleichung

$$g^s(x, y) \leqq \begin{cases} f(y) < f(x) + \varepsilon & \text{für} \quad y \in U, \\ \|f\| - s\dfrac{2\|f\|}{s} \leqq f(x) & \text{für} \quad y \notin U, \end{cases}$$

also $f^s(x) \leqq f(x) + \varepsilon$, woraus schließlich die Behauptung folgt. $\square$

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich aus diesem Satz sofort der Satz von Kolmogorov ableiten läßt:

Zu einer Familie verträglicher W-Maße μ_S auf den σ-Ringen $\prod_{t \in S}^{\sigma} \mathfrak{B}_t$, $\emptyset \neq S \subset T$ endlich, existiert genau ein W-Maß μ auf $\mathfrak{B}(X)$ derart, daß

$$\mu \circ \pi_S^{-1} = \mu_S \quad \textit{für } \emptyset \neq S \subset T \quad \textit{endlich}^{3}.$$

§ 2. Komposition verträglicher stochastischer Prozesse

Die Problemstellung des Satzes von Kolmogorov läßt sich dahingehend verallgemeinern, daß die zu einem stochastischen Prozeß a_t, $t \in T$, gehörigen Verteilungen $\mu_S(B) = p((a_t, t \in S) \in B)$ nur für gewisse Teilmengen S von T als bekannt vorausgesetzt werden. Gegeben ist also ein System $\mathfrak{S}$ von — nicht notwendig endlichen — Mengen $\emptyset \neq S \subset T$ und gesucht sind die zwischen den W-Maßen μ_S auf den σ-Ringen $\prod_{t \in S}^{\sigma} \mathfrak{B}_t$, $S \in \mathfrak{S}$, bestehenden Beziehungen, d.h. jene Bedingungen, denen sie unterliegen, um Marginalmaße eines W-Maßes $\mu \mid \mathfrak{B}(X)$ zu sein.

Eine notwendige Bedingung ist die Verträglichkeit

$$\mu_{S_1} \circ \pi_{S_1 \cap S_2}^{-1} = \mu_{S_2} \circ \pi_{S_1 \cap S_2}^{-1} \quad \text{für} \quad S_1 \cap S_2 \neq \emptyset, \tag{1}$$

die in einem besonderen Fall auch hinreichend ist:

Satz 3. *Es sei $T \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge, $(X_t, \mathfrak{U}_t)$ ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis und $\mathfrak{B}_t = \sigma(\mathfrak{U}_t)$ sowie*

$$X_S := \prod_{t \in S} X_t, \quad \mathfrak{U}_S := \prod_{t \in S}^{\tau} \mathfrak{U}_t, \quad \mathfrak{B}_S := \prod_{t \in S}^{\sigma} \mathfrak{B}_t \quad \textit{für} \quad \emptyset \neq S \subset T.$$

Dann existiert zu verträglichen W-Maßen $\mu_{T_1} \mid \mathfrak{B}_{T_1}$ und $\mu_{T_2} \mid \mathfrak{B}_{T_2}$ stets ein W-Maß $\mu \mid \mathfrak{B}_T$ derart, daß

$$\mu \circ \pi_{T_i}^{-1} = \mu_{T_i} \quad \textit{für} \quad i = 1, 2.$$

Beweis. 1. Da ein W-Maß $\mu_S \mid \mathfrak{B}_S$ nach Multiplikation mit einem beliebigen W-Maß $\mu_{T-S} \mid \mathfrak{B}_{T-S}$ ein W-Maß $\mu \mid \mathfrak{B}_T$ mit $\mu \circ \pi_S^{-1} = \mu_S$ liefert, kann ohne Einschränkung angenommen werden:

$$T_1 \cup T_2 = T \quad \text{und} \quad D := T_1 \cap T_2 \neq \emptyset \;^{4}.$$

---

[3] $\mu \circ \pi_S^{-1}$ ist das aus μ durch die Projektion π_S entstehende Marginalmaß.

[4] An dieser Stelle wird $X_t \neq \emptyset$ für $t \in T$ vorausgesetzt.

2. Für Funktionen $f_i | X_{T_i}$ $(i = 1, 2)$ werde nun definiert:

$$(f_i)_D(z) := \inf\{f_i(y) : \pi_D y = z\} \quad \text{für} \quad z \in X_D .$$

Mit f_i ist also auch $(f_i)_D$ beschränkt; daneben gilt:

$$(2) \qquad (f_i)_D \ \mathfrak{B}_D\text{-meßbar, falls } f_i \in \mathscr{C}(X_{T_i}) .$$

Denn gemäß [3] ist f_i nur von abzählbar vielen Variablen x_t mit $t \notin D$ abhängig und daher mit X_t auch der entsprechende Produktraum separabel, d.h. $(f_i)_D$ ist das Infimum abzählbar vieler in $\mathscr{C}(X_D)$ enthaltener und damit insbesondere $\mathfrak{B}_D$-meßbarer Funktionen.

3. Nach diesen Vorbereitungen sei

$$K(f_1, f_2) := \sum_{i=1,2} \int f_i \, d\mu_{T_i} \quad \text{für} \quad f_i \in \mathscr{C}(X_{T_i}) .$$

Dieses Funktional hat folgende Eigenschaft:

$$(3) \qquad K(f_1, f_2) \geqq 0 , \quad \text{falls} \sum_{i=1,2} f_i \circ \pi_{T_i} \geqq 0 .$$

Denn unter Verwendung von (2) und dem wegen der Verträglichkeit eindeutig definierten W-Maß $\mu_D = \mu_{T_i} \circ \pi_D^{-1}$ folgt in diesem Fall

$$\begin{aligned} K(f_1, f_2) &\geqq \sum_{i=1,2} \int (f_i)_D \, d(\mu_{T_i} \circ \pi_D^{-1}) \\ &= \int \sum_{i=1,2} (f_i)_D \, d\mu_D \\ &\geqq \inf_{z \in X_D} \sum_{i=1,2} (f_i)_D(z) \\ &= \inf_{x \in X_T} \sum_{i=1,2} (f_i \circ \pi_{T_i})(x) \geqq 0 . \end{aligned}$$

4. Wegen (3) ist die Definition

$$\Lambda\Big(\sum_{i=1,2} f_i \circ \pi_{T_i}\Big) := \sum_{i=1,2} \int f_i \, d\mu_{T_i} \quad \text{für} \quad f_i \in \mathscr{C}(X_{T_i})$$

eindeutig, da aus einer Identität $\sum_{i=1,2} f_i \circ \pi_{T_i} = \sum_{i=1,2} f_i' \circ \pi_{T_i}$ zunächst die Relation $\sum_{i=1,2} (f_i - f_i') \circ \pi_{T_i} \gtreqless 0$ und somit $K(f_1, f_2) \gtreqless K(f_1', f_2')$ folgt. Daher ist Λ ein lineares Funktional auf dem linearen Teilraum

$$\mathscr{L} := \Big\{ \sum_{i=1,2} f_i \circ \pi_{T_i} : \ f_i \in \mathscr{C}(X_{T_i}) \Big\} ,$$

der wegen $T_1 \cup T_2 = T$ alle nur von einer Variablen abhängigen Funktionen aus $\mathscr{C}(X_T)$ enthält. Λ ist dabei wegen $\mu_{T_i}(X_{T_i}) = 1$ normiert, wegen (3) positiv und genügt der Bedingung (6) in Satz 2, da

$$\Lambda(f_t \circ \pi_t) = \int f_t \, d(\mu_{T_i} \circ \pi_t^{-1}) \quad \text{für} \quad f_t \in \mathscr{C}(X_t) \qquad (t \in T_i \text{ beliebig}) .$$

5. Folglich ist dieser Satz anwendbar, d.h. es gilt

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{L}$$

mit einem geeignet gewählten W-Maß $\mu \mid \mathfrak{B}_T$. Das ergibt insbesondere

$$\int f_i \, d(\mu \circ \pi_{T_i}^{-1}) = \Lambda(f_i \circ \pi_{T_i}) = \int f_i \, d\mu_{T_i} \quad \text{für} \quad f_i \in \mathscr{C}(X_{T_i}),$$

also mittels der in Satz 1 enthaltenen Eindeutigkeitsaussage

$$\mu \circ \pi_{T_i}^{-1} = \mu_{T_i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2. \qquad \rfloor$$

Auf Grund dieses Satzes existiert also zu zwei Prozessen a_t^1, $t \in T_1$, und a_t^2, $t \in T_2$, die im gemeinsamen Parameterbereich $T_1 \cap T_2$ gleich verteilt sind, stets ein Prozeß a_t, $t \in T_1 \cup T_2$, derart, daß für $i = 1, 2$ die Zufallsvariablen a_t, $t \in T_i$, und a_t^i, $t \in T_i$, gleich verteilt sind. Daß eine derartige „Komposition" im allgemeinen nicht eindeutig ist, zeigt sofort der Fall $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

In diesem Zusammenhang sind zwei Ergebnisse aus [2] von Interesse:

a) Ist $T = \{1, 2, 3\}$ und $T_i = T - \{i\}$, so existiert zu verträglichen W-Maßen $\mu_{T_i} \mid \mathfrak{B}_{T_i}$, $1 \leqq i \leqq 3$, nicht notwendig ein W-Maß $\mu \mid \mathfrak{B}_T$ mit diesen Marginalmaßen.

b) Ist $\mathfrak{A}_i$ ein beliebiger σ-Ring über X_i, so existiert zu verträglichen W-Maßen $\mu_1 \mid \mathfrak{A}_1 \underset{\sigma}{\times} \mathfrak{A}_2$ und $\mu_3 \mid \mathfrak{A}_2 \underset{\sigma}{\times} \mathfrak{A}_3$ nicht notwendig ein W-Maß auf $\prod\limits_{1 \leqq i \leqq 3}^{\sigma} \mathfrak{A}_i$ mit diesen Marginalmaßen.

Das zeigt einerseits, daß die topologischen Voraussetzungen in Satz 3 wesentlich sind, und andererseits, daß dieser Satz nur unter zusätzlichen Annahmen über die Mengen T_i auf mehrere vorgegebene W-Maße $\mu_{T_i} \mid \mathfrak{B}_{T_i}$ verallgemeinert werden kann.

Dabei genügt es, von den Eigenschaften der in der Einleitung betrachteten Parameterbereiche T und T_0 die folgenden zu verwenden:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} T \text{ ist eine teilweise geordnete kommutative Gruppe, d.h.} \\ \text{mit } t_1 \leqq t_2 \text{ gilt für alle } t \in T \text{ auch } t_1 + t \leqq t_2 + t; \end{cases}$$

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} T_0 \text{ ist lückenlos, d.h.} \\ \text{mit } t_1 \text{ und } t_2 \text{ enthält } T_0 \text{ auch alle } t \text{ mit } t_1 \leqq t \leqq t_2. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet die erste zur Lösung des Fortsetzungsproblems benötigte Aussage:

Satz 4. *Für eine teilweise geordnete kommutative Gruppe T seien die Voraussetzungen von Satz 3 gegeben. Ferner sei*

$$\text{(6)} \qquad T_0 \subset T \textit{ lückenlos}, \; H \subset T \textit{ vollständig geordnet}$$

und $T(h) := \{t + h : t \in T_0\}$ für $h \in H$. Dann existiert zu verträglichen W-Maßen $\mu_{T(h)} \mid \mathfrak{B}_{T(h)}$, $h \in H$, stets ein W-Maß $\mu \mid \mathfrak{B}_T$ derart, daß

$$\mu \circ \pi_{T(h)}^{-1} = \mu_{T(h)} \quad \textit{für alle} \quad h \in H.$$

Beweis. 1. Ist $T(H) := \bigcup\limits_{h \in H} T(h)$, so genügt wie im Beweis von Satz 3 die Konstruktion eines W-Maßes $\mu_{T(h)} \mid \mathfrak{B}_{T(h)}$ mit

$$\mu_{T(h)} \circ \pi_{T(h)}^{-1} = \mu_{T(h)} \quad \text{für alle} \quad h \in H.$$

2. Dabei sei H zunächst als endlich angenommen, wegen (6) also

$$H = \{h_1, \ldots, h_n\} \quad \text{mit} \quad h_1 < \cdots < h_n.$$

Dann gilt für $n > 1$ stets

$$\Big(\bigcup_{m<n} T(h_m)\Big) \cap T(h_n) = T(h_{n-1}) \cap T(h_n). \tag{7}$$

Um das nachzuweisen, sei $t \in T(h_m) \cap T(h_n)$ mit $m < n$, d.h.

$$t_1 + h_m = t = t_2 + h_n \quad \text{mit} \quad t_1, t_2 \in T_0.$$

Das ergibt die Ungleichung

$$t_2 \leqq t_2 + (h_n - h_{n-1}) \leqq t_2 + (h_n - h_m) = t_1,$$

wegen (6) also $t_2 + (h_n - h_{n-1}) \in T_0$ und somit

$$t = (t_2 + (h_n - h_{n-1})) + h_{n-1} \in T(h_{n-1}).$$

3. Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die — für $n = 1$ triviale — Behauptung durch vollständige Induktion beweisen. Mit der Abkürzung $G = \{h_1, \ldots, h_{n-1}\}$ sei also $\mu_{T(G)} \,|\, \mathfrak{B}_{T(G)}$ ein W-Maß derart, daß

$$\mu_{T(G)} \circ \pi_{T(h)}^{-1} = \mu_{T(h)} \quad \text{für} \quad h \in G. \tag{8}$$

Dann überträgt sich wegen (7) die Verträglichkeit von $\mu_{T(h_{n-1})}$ und $\mu_{T(h_n)}$ auf $\mu_{T(G)}$ und $\mu_{T(h_n)}$, so daß nach Satz 3 ein W-Maß $\mu_{T(H)} \,|\, \mathfrak{B}_{T(H)}$ existiert derart, daß

$$\mu_{T(H)} \circ \pi_{T(G)}^{-1} = \pi_{T(G)} \quad \text{und} \quad \mu_{T(H)} \circ \pi_{T(h_n)}^{-1} = \mu_{T(h_n)}. \tag{9}$$

Die Relationen (8) und (9) ergeben zusammen $\mu_{T(H)} \circ \pi_{T(h)}^{-1} = \mu_{T(h)}$ für alle $h \in H$ und damit die Richtigkeit der Behauptung für endliches H.

4. Im allgemeinen Fall sei zunächst G eine endliche Teilmenge von H; ferner werde angenommen:

$$\sum_{h \in G} f_h \circ \pi_{T(h)} \geqq 0 \quad \text{mit} \quad f_h \in \mathscr{C}(X_{T(h)}).$$

Ist dann $\mu_{G,H}$ ein nach Teil 3 vorhandenes W-Maß auf $\mathfrak{B}_{T(H)}$ mit den Marginalmaßen $\mu_{T(h)}$ für $h \in G$, so folgt daraus

$$\sum_{h \in G} \int f_h \, d\mu_{T(h)} = \int \Big(\sum_{h \in G} f_h \circ \pi_{T(h)}\Big) d\mu_{G,H} \geqq 0.$$

Das ergibt wie im Beweis zu Satz 3 die Eindeutigkeit der Definition

$$\Lambda\Big(\sum_{h \in G} f_h \circ \pi_{T(h)}\Big) := \sum_{h \in G} \int f_h \, d\mu_{T(h)}$$

für Funktionen aus

$$\mathscr{L} := \Big\{\sum_{h \in G} f_h \circ \pi_{T(h)} : G \subset H \text{ endlich und } f_h \in \mathscr{C}(X_{T(h)})\Big\}.$$

5. Gleichfalls wie im Beweis zu Satz 3 folgt nun, daß $\mathscr{L}$ und Λ (mit $T(H)$ statt T) alle erforderlichen Voraussetzungen erfüllen und demnach ein W-Maß mit den vorgegebenen Marginalmaßen existiert.

Aus diesem Satz folgt insbesondere für $T = R$, $T_0 = [0, 1]$ und $H = R$ der bereits in der Einleitung formulierte Satz a), also die Tatsache, daß die zu den Parameterbereichen S mit $\max S - \min S \leqq 1$ gehörigen Verteilungen eines Prozesses a_t, $t \in T$, abgesehen von der Verträglichkeit unabhängig sind.

Abschließend sei an einem Gegenbeispiel gezeigt, daß beide Voraussetzungen in (6) wesentlich sind. Zu diesem Zweck liege einer der folgenden Fälle vor:

a) $T = Z,\ T_0 = \{-1, 0, 2\} = H$,

d.h. H ist vollständig geordnet, jedoch T_0 nicht lückenlos;

b) $T = Z \times Z,\ T_0 = \{(0, 1), (0, 0), (1, 0)\} = H$,

d.h. T_0 ist lückenlos, jedoch H nicht vollständig geordnet.

Da die Abbildung $Z \times Z \ni (t_1, t_2) \to 2t_1 - t_2 \in Z$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den zu a) und b) gehörenden Mengen T_h herstellt, kann sich die weitere Untersuchung auf den ersten Fall beschränken. Hier werde mit zwei nicht vertauschbaren Permutationen φ und ψ von $X = \{1, \ldots, n\}$ und einer über X gleichverteilten Zufallsvariablen a definiert:

$$(a^h_{-1+h}, a^h_{0+h}, a^h_{2+h}) = (a, \varphi(a), \psi(a)) \quad \text{für} \quad h \in H.$$

Dann sind die zugehörigen W-Maße $\mu_{T(h)}$ verträglich, da die zu a, $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ gehörigen Verteilungen übereinstimmen. Unter der Annahme, es existiere eine Komposition a_t, $t \in T$, der Prozesse a^h_t, $t \in T_h$, gilt jedoch mit Wahrscheinlichkeit Eins

$$a_{-1} = \varphi(a_{-2}) \quad (h = -1) \quad \text{und} \quad a_{+2} = \psi(a_{-1}) \quad (h = 0),$$
$$a_{+1} = \psi(a_{-2}) \quad (h = -1) \quad \text{und} \quad a_{+2} = \varphi(a_{+1}) \quad (h = 2),$$

was durch Einsetzen

$$\psi(\varphi(a_{-2})) = a_{+2} = \varphi(\psi(a_{-2}))$$

und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung $\psi\varphi \neq \varphi\psi$ liefert.

§ 3. Stationärer Ausgleich stochastischer Prozesse

Für die weitere Untersuchung wird ein Hilfssatz aus der Funktionalanalysis benötigt. Darin findet der zu einer kommutativen Halbgruppe $\mathscr{A}$ mit der Richtungsrelation

$$A' \prec A'' \text{ genau dann, wenn } A' = A'' \text{ oder } AA' = A'' \text{ mit } A \in \mathscr{A}$$

gehörende Konvergenzbegriff Verwendung, d.h. es ist

$$(1) \qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{A \in \mathscr{A}} \varphi(A) := \sup_{A' \in \mathscr{A}} \inf_{A \in \mathscr{A}} \varphi(AA'),\ \overline{\lim}_{A \in \mathscr{A}} \varphi(A) := \inf_{A' \in \mathscr{A}} \sup_{A \in \mathscr{A}} \varphi(AA') \\ \text{für beliebige Abbildungen } \mathscr{A} \in A \to \varphi(A) \in R. \end{cases}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Satz 5. *Es sei Λ ein lineares Funktional auf dem linearen Raum $\mathscr{L}$ und $\mathscr{A}$ eine kommutative Halbgruppe linearer Transformationen A von $\mathscr{L}$ in sich. Dann existiert unter der Voraussetzung*

$$(2) \qquad \overline{\lim}_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(Af) < \infty \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathscr{L}$$

ein bezüglich $\mathscr{A}$ invariantes lineares Funktional $\tilde{\Lambda} \mid \mathscr{L}$ derart, daß

$$\tilde{\Lambda}(f) \leq \overline{\lim}_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(Af) \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathscr{L}.$$

Beweis. 1. Offenbar definiert

$$\mathscr{K} := \left\{ \sum_{1 \leqq i \leqq n} (A_i f_i - f_i) : 1 \leqq n \in Z,\ f_i \in \mathscr{L} \text{ und } A_i \in \mathscr{A} \right\}$$

einen linearen Teilraum von $\mathscr{L}$ und

$$\Gamma(f) := \overline{\lim_{A \in \mathscr{A}}}\, \Lambda(A f)$$

ein positiv-homogenes und subadditives Funktional auf $\mathscr{L}$. Mit diesen Abkürzungen lauten die Forderungen an das gesuchte lineare Funktional:

$$\tilde{\Lambda}(f) = 0 \qquad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{K},$$
$$\tilde{\Lambda}(f) \leqq \Gamma(f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{L}.$$

Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus dem Satz von Hahn-Banach, wenn nachgewiesen wird:

$$\Gamma(f) \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{K}.$$

2. Es sei also $f = \sum_{1 \leqq i \leqq n} (A_i f_i - f_i)$ mit $f_i \in \mathscr{L}$ und $A_i \in \mathscr{A}$. Dabei werde zunächst angenommen:

$$\gamma(f) := \sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A f) < \infty \quad \text{für} \quad f = \pm f_i \quad (1 \leqq i \leqq n). \tag{3}$$

Dann gilt für natürliches k stets

$$\begin{aligned} k^n \sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A f) &\geqq \sum_{1 \leqq k_j \leqq k} \Lambda(A_1^{k_1} \cdots A_n^{k_n} f) \\ &= \sum_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{1 \leqq k_j \leqq k} \Lambda(A_1^{k_1} \cdots (A_i^{k_i+1} - A_i^{k_i}) \cdots A_n^{k_n} f_i) \\ &= \sum_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{1 \leqq k_j \leqq k \text{ für } j \neq i} \Lambda(A_1^{k_1} \cdots (A_i^{k+1} - A_i) \cdots A_n^{k_n} f_i) \\ &\geqq - \sum_{1 \leqq i \leqq n} k^{n-1} (\gamma(-f_i) + \gamma(+f_i)), \end{aligned}$$

und das ergibt

$$\sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A f) \geqq -\frac{1}{k} \sum_{1 \leqq i \leqq n} (\gamma(-f_i) + \gamma(+f_i)) \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

3. Ist die Annahme (3) nicht erfüllt, so existieren gemäß Voraussetzung (2) zu $i = 1, \ldots, n$ Transformationen $A_i^-, A_i^+ \in \mathscr{A}$ mit

$$\sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A A_i^- (-f_i)) < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A A_i^+ (+f_i)) < \infty.$$

Für beliebiges $A' \in \mathscr{A}$ werde nun definiert:

$$f_i' := A' A^- A^+ f_i \quad \text{mit} \quad A^{\pm} := A_1^{\pm} \cdots A_n^{\pm}.$$

Dann genügen $f_1', \ldots, f_n'$ der Forderung (3), so daß

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A A' f) &\geqq \sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda(A A^- A^+ A' f) \\ &= \sup_{A \in \mathscr{A}} \Lambda\Big(A \sum_{1 \leqq i \leqq n} (A_i f_i' - f_i')\Big) \\ &\geqq 0 \quad \text{für beliebiges} \quad A' \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Ungleichung $\Gamma(f) \geqq 0$. $\blacksquare$

Die Voraussetzung (2) in diesem Satz ist wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\mathscr{L} = R^2,\ \Lambda((x_1, x_2)) = x_1,\ \mathscr{A} = \{A^n\colon\ n \in Z\} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\mathscr{A}$ kommutativ, und es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{A \in \mathscr{A}}}\, \Lambda(Af) &= \sup_{n \in Z}(x_1 + n x_2) \\ &= x_1, \quad \text{falls} \quad x_2 = 0 \qquad (= \infty \text{ sonst}); \end{aligned}$$

die Annahme, Λ besitze die in Satz 5 angegebenen Eigenschaften, führt jedoch zu folgendem Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\Lambda}((0,1)) - \tilde{\Lambda}(A(0,1)) \\ &= \tilde{\Lambda}((0,1)) - \tilde{\Lambda}((1,1)) \\ &= \tilde{\Lambda}((-1,0)) \leqq -1\,. \end{aligned}$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich Satz 5 noch ergänzen:

a) Ist $\mathscr{L}$ ein normierter Raum und sind die Transformationen $A \in \mathscr{A}$ normtreu, so ist mit Λ auch $\tilde{\Lambda}$ stetig, da

$$|\tilde{\Lambda}(f)| \leqq \overline{\lim_{A \in \mathscr{A}}}\, |\Lambda(Af)| \leqq \|\Lambda\| \quad \text{für} \quad \|f\| \leqq 1\,.$$

b) Ist $\mathscr{L}$ ein Vektorverband und sind die Transformationen $A \in \mathscr{A}$ ordnungstreu, so ist mit Λ auch $\tilde{\Lambda}$ positiv, da

$$\tilde{\Lambda}(f) \leqq \overline{\lim_{A \in \mathscr{A}}}\, \Lambda(Af) \leqq 0 \quad \text{für} \quad f \leqq 0\,.$$

Für die Anwendung von Satz 5 auf die in § 1 betrachteten linearen Funktionale ist zunächst eine Abkürzung zweckmäßig: Ist $X_t = X$ für $t \in T$ mit einer beliebigen Menge X und einer Gruppe T sowie $\emptyset \neq T_0 \subset T$, so definiert die Abbildung

$$\prod_{t \in T_0} X_t \ni (x_t, t \in T_0) \underset{\tau_h}{\to} (x_{t+h}, t \in T_0) \in \prod_{t \in T_0} X_t$$

die zu einem Element h von T mit $\{t + h : t \in T_0\} \subset T_0$ gehörige Verschiebung. Ferner wird folgender Begriff benötigt:

Definition. Es sei $(X, \mathfrak{U})$ ein topologischer Raum, $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{U})$ und H eine gerichtete Indexmenge. Dann heißt eine Gesamtheit von W-Maßen $\mu_h \mid \mathfrak{B}$, $h \in H$, „asymptotisch gleichmäßig straff", falls zu beliebigem $\varepsilon > 0$ stets eine kompakte Menge K mit $\overline{\lim_{h \in H}}\, \mu_h(X - K) < \varepsilon$ existiert.

Mit diesen Bezeichnungen lautet die zweite zur Lösung des Fortsetzungsproblems benötigte Aussage:

Satz 6. *Es sei T eine kommutative Gruppe, $H \subset T$ eine Halbgruppe und $T_0 \subset T$ eine Menge mit $t + h \in T_0$ für alle $t \in T_0$ und $h \in H$. Ferner sei $(X, \mathfrak{U})$ ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis und $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{U})$ sowie*

$$X^S := \prod_{t \in S} X,\ \mathfrak{U}^S := \prod_{t \in S}{}^{\tau}\, \mathfrak{U},\ \mathfrak{B}^S := \prod_{t \in S}{}^{\sigma}\, \mathfrak{B} \quad \textit{für} \quad \emptyset \neq S \subset T\,.$$

Dann existiert zu einem W-Maß $\mu\,|\,\mathfrak{B}^{T_0}$ mit der Eigenschaft

$$\mu \circ \pi_{t+h}^{-1},\ h \in H\,, \quad \textit{asymptotisch gleichmäßig straff für} \quad t \in T_0 \tag{4}$$

stets ein W-Maß $\tilde{\mu}\,|\,\mathfrak{B}^{T_0}$ derart, daß

$$\tilde{\mu} \circ \tau_h^{-1} = \tilde{\mu} \quad \textit{für alle} \quad h \in H\,, \tag{5}$$

$$\underline{\lim}_{h\in H} \int (f \circ \tau_h)\, d\mu \leqq \int f\, d\tilde{\mu} \leqq \overline{\lim}_{h\in H} \int (f \circ \tau_h)\, d\mu \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathscr{C}(X^{T_0})\,. \tag{6}$$

Beweis. 1. Die Abbildungen $f \to f \circ \tau_h$, $h \in H$, definieren eine kommutative Halbgruppe $\mathscr{A}$ linearer Transformationen A des linearen Raumes $\mathscr{C}(X^{T_0})$ in sich, wobei für das dem W-Maß $\mu\,|\,\mathfrak{B}^{T_0}$ entsprechende lineare Funktional $\Lambda\,|\,\mathscr{C}(X^{T_0})$ gilt:

$$\overline{\lim}_{A\in\mathscr{A}} \Lambda(Af) \leqq \|f\| < \infty \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{C}(X^{T_0})\,.$$

Gemäß Satz 5 existiert also ein bezüglich $\mathscr{A}$ invariantes lineares Funktional $\tilde{\Lambda}\,|\,\mathscr{C}(X^{T_0})$ derart, daß

$$\tilde{\Lambda}(f) \leqq \overline{\lim}_{A\in\mathscr{A}} \Lambda(Af) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{C}(X^{T_0})\,.$$

Zusammen mit der entsprechenden Ungleichung für $-f$ liefert das:

$$\underline{\lim}_{h\in H} \int (f \circ \tau_h)\, d\mu \leqq \tilde{\Lambda}(f) \leqq \overline{\lim}_{h\in H} \int (f \circ \tau_h)\, d\mu \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{C}(X^{T_0})\,.$$

2. Aus dieser Relation folgt neben $\tilde{\Lambda}(1) = 1$ die Positivität von $\tilde{\Lambda}$. Um nachzuweisen, daß $\tilde{\Lambda}$ außerdem der Bedingung (6) in Satz 2 genügt, gelte $\mathscr{C}(X) \ni f_n \downarrow 0$, wobei ohne Einschränkung $f_n \leqq 1$ angenommen werden kann. Nach Voraussetzung existiert dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $t \in T_0$ eine kompakte Menge K_t mit

$$\overline{\lim}_{h\in H} \mu_{t+h}(X - K_t) < \varepsilon$$

und dazu, da die Konvergenz $f_n \downarrow 0$ nach dem Satz von DINI auf K_t gleichmäßig ist, ein Index m_t mit

$$f_{m_t}(x) < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in K_t\,.$$

Das ergibt zusammen

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(f_n \circ \pi_t) &\leqq \overline{\lim}_{h\in H} \int_{K_t} (f_n \circ \pi_{t+h})\, d\mu + \overline{\lim}_{h\in H} \int_{X-K_t} (f_n \circ \pi_{t+h})\, d\mu \\ &\leqq \varepsilon + \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq m_t\,. \end{aligned}$$

3. Gemäß Satz 2 existiert demnach ein W-Maß $\tilde{\mu}\,|\,\mathfrak{B}^{T_0}$ derart, daß

$$\tilde{\Lambda}(f) = \int f\, d\tilde{\mu} \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{C}(X^{T_0})\,,$$

das also gemäß Teil 1 der geforderten Ungleichung sowie wegen der Invarianz von $\tilde{\Lambda}$ und auf Grund der in Satz 1 enthaltenen Eindeutigkeitsaussage der Bedingung $\tilde{\mu} \circ \tau_h^{-1} = \tilde{\mu}$ für $h \in H$ genügt. $\rfloor$

Aus diesem Satz folgt insbesondere für $T = R$, $T_0 = [0, \infty)$ und $H = R$ der bereits in der Einleitung formulierte Satz b), also die Tatsache, daß sich ein stochastischer Prozeß a_t, $t \in T_0$, mit identisch verteilten Zufallsvariablen a_t stets in dem dort angegebenen Sinn zu einem stationären Prozeß $\tilde{a}_t$, $t \in T_0$, „ausgleichen" läßt. Weiter ist im Anschluß an Satz 6 zu bemerken:

1. Die Voraussetzung (4) ist wesentlich. Das zeigt beispielsweise ein abzählbarer diskreter Raum X mit den Elementen z_n und die Folge der konstanten Zufallsvariablen $a_n = z_n$, $n \geqq 1$, die diese Voraussetzung offenbar nicht erfüllt. Da $\mathscr{C}(X)$ in diesem Fall jede beschränkte Funktion — also insbesondere jede Indikatorfunktion — enthält, müßte für einen zugehörigen stationären Prozeß $\tilde{a}_n$, $n \geqq 1$, zunächst

$$p(\tilde{a}_n = x) \leqq \overline{\lim_{h\to\infty}}\, p(a_{n+h} = x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

und somit $p(\tilde{a}_n \in X) = 0$ gelten.

2. Eine hinreichende Bedingung für die Voraussetzung (4) ist jedenfalls die Kompaktheit des zugrunde liegenden Raumes, d. h. Satz 6 gilt uneingeschränkt, wenn X endlich ist. Eine weniger triviale hinreichende Bedingung ist die schwache Konvergenz der zu a_{t+h}, $h \in H$, gehörigen Verteilungen für jedes feste $t \in T_0$. Das läßt sich — mit Hilfe der im Beweis zu Satz 2 unter (7) definierten Funktionen g_t^n — leicht aus den topologischen Eigenschaften von X ableiten.

3. Die Ungleichung (6) läßt sich weder auf unstetige noch auf unbeschränkte Funktionen $f \mid X^{T_0}$ ausdehnen. Das zeigt beispielsweise eine Folge von Zufallsvariablen a_n, $n \geqq 1$, mit

$$p\left(a_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad p(a_n = n) = \frac{1}{n+1},$$

die die Voraussetzung (4) gemäß Bemerkung 2 erfüllt. Für einen zugehörigen stationären Prozeß $\tilde{a}_n$, $n \geqq 1$, gilt in diesem Fall

$$E(f(\tilde{a}_n)) = f(0) \qquad \text{für alle } f \in \mathscr{C}(R) \text{ mit kompaktem Träger,}$$

und das ergibt

$$\left.\begin{array}{lll} p(a_n = 0) = 0 & \text{und} & E(a_n) = 1 \\ p(\tilde{a}_n = 0) = 1 & \text{und} & E(\tilde{a}_n) = 0 \end{array}\right\} \text{für alle } n.$$

4. Dagegen ist eine teilweise Verallgemeinerung der Ungleichung (6) auf nach oben bzw. unten halbstetige Funktionen $f \mid X^{T_0}$ möglich. Da eine meßbare derartige Funktion nur von abzählbar vielen Variablen abhängig und daher mit X auch der entsprechende Produktraum metrisierbar ist, ist f nach einem bekannten Satz Grenzwert einer monoton fallenden bzw. wachsenden Folge stetiger Funktionen. Daraus folgt mittels des Satzes von der Integration bei monotoner Konvergenz ohne Schwierigkeit:

$$\int f\, d\tilde{\mu} \geqq \underline{\lim_{h\in H}} \int (f \circ \tau_h)\, d\mu$$

für beschränkte, nach oben halbstetige, $\mathfrak{B}^{T_0}$-meßbare Funktionen $f \mid X^{T_0}$,

$$\int f\, d\mu \leqq \overline{\lim_{h\in H}} \int (f \circ \tau_h)\, d\mu$$

für beschränkte, nach unten halbstetige, $\mathfrak{B}^{T_0}$-meßbare Funktionen $f \mid X^{T_0}$.

5. Aus diesen Beziehungen folgt insbesondere

$$(7)\quad \begin{cases} \tilde{\mu}(F) \geqq \varliminf\limits_{h\in H} \mu(\tau_h^{-1}(F)) & \text{für abgeschlossenes } F \in \mathfrak{B}^{T_0}, \\ \tilde{\mu}(G) \leqq \varlimsup\limits_{h\in H} \mu(\tau_h^{-1}(G)) & \text{für offenes } G \in \mathfrak{B}^{T_0}. \end{cases}$$

Das führt im Fall eines abzählbaren diskreten Raumes zu der Ungleichung

$$(8)\quad \begin{cases} \varliminf\limits_{h\in H} \mu(\tau_h^{-1}(B)) \leqq \tilde{\mu}(B) \leqq \varlimsup\limits_{h\in H} \mu(\tau_h^{-1}(B)) \\ \text{für alle Mengen } B \in \mathfrak{B}^{T_0} \text{ mit endlich-dimensionaler Basis.} \end{cases}$$

Ferner ergibt sich im Fall konstanter Zufallsvariablen $a_t = z_t$, $t \in T_0$, für einen zugehörigen stationären Prozeß $\tilde{a}_t$, $t \in T_0$, stets

$$(9)\quad \begin{cases} p((\tilde{a}_t, t \in S) \in F_S) = 1 \quad \text{mit} \quad F_S := \overline{\{(z_{t+h}, t \in S) : h \in H\}}^{\,5} \\ \text{für alle abzählbaren Mengen } \emptyset \neq S \subset T_0. \end{cases}$$

6. Das folgende Beispiel zeigt, daß vorhandene Unabhängigkeiten beim stationären Ausgleich nicht notwendig erhalten bleiben. Es sei $T_0 = \{n \in Z : n \geqq 1\}$ und $\mu \mid \mathfrak{B}^{T_0}$ ein „periodisches" W-Maß, d. h. es gelte $\mu \circ \tau_k^{-1} = \mu$ für eine geeignet gewählte natürliche Zahl k. Dann ist die Voraussetzung (4) erfüllt und wegen der Periodizität

$$\int \left(\left(\frac{1}{k} \sum_{1\leqq i\leqq k} f \circ \tau_i\right) \circ \tau_h\right) d\mu \quad \text{unabhängig von } h.$$

Für ein zugehöriges W-Maß $\tilde{\mu} \mid \mathfrak{B}^{T_0}$ gilt also wegen der Invarianz

$$\begin{aligned} \int f\, d\tilde{\mu} &= \int \left(\frac{1}{k} \sum_{1\leqq i\leqq k} f \circ \tau_i\right) d\tilde{\mu} \\ &= \int \left(\frac{1}{k} \sum_{1\leqq i\leqq k} f \circ \tau_i\right) d\mu = \int f\, d\left(\frac{1}{k} \sum_{1\leqq i\leqq k} \mu \circ \tau_i^{-1}\right) \quad \text{für} \quad f \in \mathscr{C}(X^{T_0}), \end{aligned}$$

d. h. $\tilde{\mu}$ ist eindeutig bestimmt und gleich $\frac{1}{k} \sum_{1\leqq i\leqq k} \mu \circ \tau_i^{-1}$. Ist daher a_n, $n \geqq 1$, eine periodische Folge konstanter und damit unabhängiger Zufallsvariablen mit einer primitiven Periode $k \neq 1$, so sind die Zufallsvariablen der zugehörigen Folge $\tilde{a}_n$, $n \geqq 1$, abhängig.

7. Eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit des W-Maßes $\tilde{\mu} \mid \mathfrak{B}^{T_0}$ ist neben einer derartigen Periodizität von $\mu \mid \mathfrak{B}^{T_0}$ die „asymptotische Stationarität" des entsprechenden stochastischen Prozesses, d. h. die schwache Konvergenz der zu $(a_{t+h}, t \in S)$, $h \in H$, gehörigen Verteilungen für alle endlichen Mengen $\emptyset \neq S \subset T_0$. In diesem Fall ist gemäß Bemerkung 2 die Voraussetzung (4) erfüllt. Ferner konvergieren die Erwartungswerte $E(f(a_{t+h}, t \in T_0))$, $h \in H$, für jede nur von endlich vielen Variablen abhängige Funktion $f \in \mathscr{C}(X^{T_0})$, d. h. die zu $(a_t, t \in S)$ gehörigen Verteilungen sind für alle endlichen Mengen $\emptyset \neq S \subset T_0$ eindeutig bestimmt.

8. Im allgemeinen besteht dagegen keine Eindeutigkeit; das folgende Beispiel zeigt das mögliche Ausmaß der Mehrdeutigkeit. Es sei X endlich und $((z_n))$ eine Folge, die — in beliebiger Reihenfolge — alle k-Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $k \geqq 1$ und

---

[5] Der Querstrich über einer Menge bezeichnet den Übergang zur abgeschlossenen Hülle.

$x_i \in X$ enthält. Dann erfüllen die konstanten Zufallsvariablen $a_n = z_n$, $n \geqq 1$, die Voraussetzung (4) und genügen nach Konstruktion der Folge $((z_n))$ den Gleichungen

$$\varliminf_{h\to\infty} E(f(a_{n+h}, n \geqq 1)) = \min_{x_n \in X} f(x_n, n \geqq 1)\,,$$
$$\varlimsup_{h\to\infty} E(f(a_{n+h}, n \geqq 1)) = \max_{x_n \in X} f(x_n, n \geqq 1)$$

für jede nur von endlich vielen Variablen abhängige Funktion. Ein beliebiger stationärer Prozeß $\tilde{a}_n$, $n \geqq 1$, erfüllt also für derartige Funktionen die geforderte Ungleichung, woraus sich — wie im Beweis zu Satz 2 — mittels monotoner Approximation leicht die Richtigkeit von (6) für alle zugelassenen Funktionen ableiten läßt.

§ 4. Lösung des Fortsetzungsproblems

Mit Hilfe der in § 2 und § 3 erhaltenen Ergebnisse läßt sich nun folgender Hauptsatz beweisen:

Satz 7. *Es sei T eine vollständig geordnete kommutative Gruppe und $\emptyset \neq T_0 \subset T$ lückenlos; ferner sei $(X, \mathfrak{U})$ ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis und $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{U})$ sowie*

$$X^S := \prod_{t\in S} X, \quad \mathfrak{U}^S := \prod_{t\in S}{}^{\tau} \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{B}^S := \prod_{t\in S}{}^{\sigma} \mathfrak{B} \quad \textit{für} \quad \emptyset \neq S \subset T\,.$$

Dann existiert zu einem W-Maß $\mu^{T_0} \,|\, \mathfrak{B}^{T_0}$ mit der Eigenschaft

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu_{T_0}\left(\bigcap\limits_{t\in S} \pi_{t+h}^{-1}(B_t)\right) = \mu_{T_0}\left(\bigcap\limits_{t\in S} \pi_t^{-1}(B_t)\right) & \textit{für alle} \quad B_t \in \mathfrak{B}\,, \\ \textit{falls} \quad S \subset T_0 \quad \textit{endlich und} \quad h \in T \quad \textit{mit} \quad \{t+h\colon\, t \in S\} \subset T_0 \end{cases}$$

stets ein W-Maß $\tilde{\mu} \,|\, \mathfrak{B}^T$ derart, daß

$$\tilde{\mu} \circ \pi_{T_0}^{-1} = \mu_{T_0}\,,$$
$$\tilde{\mu} \circ \tau_h^{-1} = \tilde{\mu} \quad \textit{für alle} \quad h \in T\,.$$

Beweis. Es sei $T(h) := \{t + h\colon t \in T_0\}$ und $\mu_{T(h)}$ jenes W-Maß auf $\mathfrak{B}^{T(h)}$, das aus $\mu_{T_0} \,|\, \mathfrak{B}^{T_0}$ durch die Abbildung $(x_t, t \in T_0) \to (x_{t-h}, t \in T(h))$ entsteht. Dann sind die W-Maße $\mu_{T(h)} \,|\, \mathfrak{B}^{T(h)}$, $h \in T$, wegen (1) verträglich, gemäß Satz 4 existiert also ein W-Maß $\mu \,|\, \mathfrak{B}^T$ mit

$$\mu \circ \pi_{T(h)}^{-1} = \mu_{T(h)} \quad \text{für alle} \quad h \in T\,.$$

Dabei sind die W-Maße $\mu \circ \pi_t^{-1}$, $t \in T$, auf Grund der Definition von $\mu_{T(h)}$ und wegen (1) identisch und somit gleichmäßig straff. Gemäß Satz 6 existiert also ein W-Maß $\tilde{\mu} \,|\, \mathfrak{B}^T$ mit

$$\tilde{\mu} \circ \tau_h^{-1} = \tilde{\mu} \qquad \text{für alle } h \in T\,,$$

das der dort angegebenen Ungleichung (6) genügt. Das führt auf Grund der Übereinstimmung der W-Maße $\mu_{T(h)}$, $h \in T$, schließlich zu

$$\tilde{\mu} \circ \pi_{T_0}^{-1} = \mu \circ \pi_{T_0}^{-1} = \mu_{T_0}\,,$$

d. h. $\tilde{\mu}$ besitzt alle geforderten Eigenschaften. $\lrcorner$

Mit diesem Satz ist insbesondere das eingangs formulierte Problem gelöst: jeder relativ-stationäre Prozeß a_t, $0 \leqq t \leqq 1$, besitzt eine stationäre Fortsetzung

$\tilde{a}_t$, $t \geqq 0$. Zum Abschluß sei an einem Beispiel gezeigt, daß diese Fortsetzung auch unter starken Stetigkeitsvoraussetzungen nicht eindeutig ist.

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, p)$ das durch das Lebesguesche Maß auf den Borelschen Mengen des Intervalls $(0, 1]$ definierte W-Feld und $a(\omega)$ die zum Intervall $(0, \frac{1}{2}]$ gehörige Indikatorfunktion. Ferner werde für $t \geqq 0$ und $0 < \alpha < 1$ folgende meßbare Abbildung von Ω in sich definiert:

$$\varrho_t^\alpha(\omega) := \begin{cases} \omega - t \;\; [\mathrm{mod}\, \alpha] & \text{für} \quad \omega \leqq \alpha\,, \\ \alpha + (\omega - \alpha - t \;\; [\mathrm{mod}\, 1 - \alpha]) & \text{für} \quad \omega > \alpha\,; \end{cases} \tag{2}$$

ϱ_t^α bewirkt also in den durch α definierten Teilintervallen von Ω eine zyklische Translation um $-t$, d. h. die Gesamtheit dieser Abbildungen bildet eine einparametrige Halbgruppe maßtreuer Transformationen.

Mit diesen Bezeichnungen sei

$$a_t^\alpha(\omega) := a(\varrho_t^\alpha(\omega)) \quad \text{für} \quad t \geqq 0 \quad \text{und} \quad 0 < \alpha < 1\,.$$

Die so definierten Zufallsvariablen besitzen folgende Eigenschaften:

$$a_t^\alpha, t \geqq 0\,, \quad \text{stationär für festes } \alpha, \tag{3}$$

$$p\left(\lim_{n \to \infty} a_{t_n}^\alpha = a_{t_0}^\alpha\right) = 1\,, \quad \text{falls} \quad \lim_{n \to \infty} t_n = t_0\,, \tag{4}$$

$$a_t^{\alpha_1} = a_t^{\alpha_2} \quad \text{für} \quad \alpha_i > \tfrac{1}{2} + t\,, \tag{5}$$

$$p(a_t^\alpha = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \in Q) = 1 - \alpha \quad \text{für} \quad \alpha > \tfrac{1}{2}\,. \tag{6}$$

Die zu den Parameterwerten $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha_0 > \frac{1}{2}$ beliebig) gehörigen stochastischen Prozesse a_t^α, $t \geqq 0$, sind also gemäß (3) stationär, wegen (4) überall fast sicher stetig und gemäß (5) für $t \leqq \alpha_0 - \frac{1}{2}$ identisch, stimmen jedoch wegen (6) in ihren Verteilungen nicht überein.

Literatur

1. DYNKIN, E. B.: Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1961.
2. KELLERER, H. G.: Verteilungsfunktionen mit gegebenen Marginalverteilungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **3**, 247–270 (1964).
3. — Stetige Funktionen auf Produkträumen. Arch. der Math. (erscheint demnächst).
4. NEVEU, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris: Masson 1964.
5. PARTHASARATHY, K. R., and S. R. VARADHAN: Extension of stationary stochastic processes. Theor. Probab. Appl. **9**, 65–71 (1964).

Mathematisches Institut
Ruhr-Universität
4630 Bochum, Friederikastr. 11