Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33, 187–194 (1975)
© by Springer Verlag 1975

Charakterisierung universell zulässiger Entscheidungsverfahren*

Horst Bartenschlager

Institut für Angewandte Mathematik der Universität, D-6900 Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 5, Bundesrepublik Deutschland

Universell zulässige Entscheidungsverfahren sind Entscheidungsverfahren (Ev), die für alle Standardentscheidungsprobleme zulässig sind, bei denen Parameterraum, Entscheidungsraum und Verlustfunktion übereinstimmen.

Diese Arbeit charakterisiert die universell zulässigen Ev durch Zerlegungen des Stichprobenraums in Entscheidungsbereiche: Jeder a-priori-Verteilung wird eine „Bayeszerlegung" des Stichprobenraums zugeordnet. Die mit dieser Zerlegung „verträglichen" Ev sind universelle Bayesverfahren bez. der a-priori-Verteilung, also universell zulässig, wenn die a-priori-Verteilung strikt positiv ist. Eine Verallgemeinerung der Begriffe führt zu allen Zerlegungen, deren zugehörige Ev universell zulässig sind.

I. Einleitung und Definition

Ein *Standardexperiment* $\mathfrak{S}=(\Theta, Q)$ besteht aus einem Parameterraum Θ und einem *Standardmaß* Q, d.h. einem positiven Maß auf $(\Delta, \mathscr{B})$ mit der Eigenschaft $\int_\Delta x_\theta \, dQ(x)=1$ für alle $\theta\in\Theta$. Hier bezeichnet Δ das Einheitssimplex $\{x\in\mathbb{R}^\Theta: \sum_\Theta x_\theta=1,\ x_\theta\geqq 0$ für alle $\theta\in\Theta\}$ in $\mathbb{R}^\theta$ und $\mathscr{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen in Δ.

Die ausführliche Schreibweise $\mathfrak{S}=(\Delta, \mathscr{B}, \{\int_\cdot x_\theta \, dQ(x): \theta\in\Theta\})$ zeigt, daß jedes Standardexperiment ein Experiment $\mathfrak{E}=(\Omega, \mathscr{A}, \{P_\theta: \theta\in\Theta\})$ im üblichen Sinne ist.

Unter einem *Standardentscheidungsproblem* $(\mathfrak{S}, T, v)$ verstehen wir ein Standardexperiment $\mathfrak{S}$ zusammen mit einem Entscheidungsraum T und einer Verlustfunktion v, also ein Entscheidungsproblem, dem ein Standardexperiment zugrunde liegt.

$\Phi(\mathfrak{E}, T, v)$ (oder einfach Φ) bezeichnet die Menge der *Entscheidungsverfahren* im Entscheidungsproblem $(\mathfrak{E}, T, v)$, d.h. die Menge der stochastischen Kerne von $(\Omega, \mathscr{A})$ nach $(T, \mathscr{T})$, wobei $\mathscr{T}$ die von $\{v(\theta, \cdot): \theta\in\Theta\}$ erzeugte σ-Algebra in T ist.

---

* Dies ist ein Teil der Dissertation des Verfassers. Der Verfasser dankt Herrn Professor Dr. H. Dinges für die Anregung zu dieser Arbeit.

Mit Hilfe der jedem Entscheidungsverfahren ϕ in $\Phi(\mathfrak{E}, T, v)$ zugeordneten *Risikofunktion* $R_\phi: \Theta \to \mathbb{R}$,

$$R_\phi(\theta) = \int_\Omega \int_T v(\theta, t)\, \phi(\omega, dt)\, d P_\theta(\omega)$$

erhalten wir eine Ordnung in Φ: ϕ heißt *besser* als ψ, wenn $R_\phi \neq R_\psi$ und $R_\phi \leqq R_\psi$ gilt. Die minimalen Elemente bezüglich dieser Ordnung heißen *zulässig* (in Φ).

Für Standardentscheidungsprobleme hängt Φ nur von Θ und T ab, nicht aber vom speziellen Stichprobenraum. Dadurch bietet sich eine Verschärfung des Begriffs „zulässig" an: ϕ heißt *universell zulässig*, wenn ϕ für jedes Standardmaß Q auf $(\Delta, \mathscr{B})$ in $\Phi((\Theta, Q), T, v)$ zulässig ist. Die Klasse der universell zulässigen Entscheidungsverfahren zu Θ, T, v bezeichnen wir mit $\Xi(\Theta, T, v)$.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die universell zulässigen Entscheidungsverfahren in Standardentscheidungsproblemen mit endlichem Parameterraum und endlichem Entscheidungsraum durch Zerlegungen des Einheitssimplexes in Entscheidungsbereiche zu charakterisieren.

Bekanntlich gibt es zu jedem Entscheidungsproblem $(\mathfrak{E}, T, v)$ mit endlichem Parameterraum ein äquivalentes Standardentscheidungsproblem $(\mathfrak{S}, T, v)$. Da $\Xi(\Theta, T, v)$ eine wesentlich vollständige Klasse in $\Phi((\Theta, Q), T, v)$ unabhängig vom speziellen Standardmaß Q ist (Bem. 5) und jede wesentlich vollständige Klasse in $\Phi(\mathfrak{S}, T, v)$ über die Likelihoodtransformation eine wesentlich vollständige Klasse in $\Phi(\mathfrak{E}, T, v)$ liefert, charakterisieren wir mit den Entscheidungsverfahren aus $\Xi(\Theta, T, v)$ gleichzeitig in jedem Entscheidungsproblem der Form $(\Omega, \mathscr{A}, \{P_\theta: \theta \in \Theta\}, T, v)$ die Entscheidungsverfahren einer wesentlich vollständigen Klasse.

Die Beschränkung auf endlichen Parameterraum ist notwendig, da für den Beweis von Satz 3 die Kompaktheit der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf Θ benötigt wird. Die Endlichkeit des Entscheidungsraums ist nicht wesentlich. Wir benötigen nur, daß alle auftretenden Bayesrisiken endlich sind und daß gewisse Funktionen ihr Infimum auf dem Entscheidungsraum annehmen (z.B. T kompakt, v stetig).

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Definition eines im folgenden häufig gebrauchten Begriffs:

Λ sei die Menge der a-priori-Verteilungen auf Θ.

$\phi \in \Phi$ heißt *universelles Bayesverfahren* (in Φ) bezüglich $\lambda \in \Lambda$, wenn für jedes Standardmaß Q das Bayesrisiko $r_\cdot(\lambda) = \sum_\Theta \lambda_\theta R_\cdot(\theta)$ in ϕ sein Minimum in $\Phi((\Theta, Q), T, v)$ annimmt.

II. Bayeszerlegungen

Bekanntlich sind Bayesverfahren bezüglich strikt positiver a-priori-Verteilungen zulässig. Wir betrachten deshalb zuerst universelle Bayesverfahren.

Unter einer *Zerlegung* verstehen wir eine Zerlegung von Δ in disjunkte, mit den nichtleeren Teilmengen von T indizierte Teilmengen. Jeder Zerlegung $\mathscr{Z} = \{S_A: \emptyset \neq A \subset T\}$ ordnen wir die Klasse

$$\Phi(\mathscr{Z}) = \{\phi \in \Phi: x \in S_A \Rightarrow \phi(x, A) = 1 \text{ für alle } x \in \Delta, \emptyset \neq A \subset T\}$$

der mit $\mathscr{Z}$ *verträglichen* Entscheidungsverfahren zu.

Mit Hilfe der für festes $\lambda \in \Lambda$ auf $\Delta \times T$ definierten Funktion

$$w_\lambda(x, t) = \sum_{\Theta} \lambda_\theta x_\theta v(\theta, t)$$

läßt sich das Bayesrisiko eines Entscheidungsverfahrens ϕ bez. λ als

$$r_\phi(\lambda) = \int_{\Delta} \sum_{T} w_\lambda(x, t)\, \phi(x, \{t\})\, dQ(x)$$

schreiben. Das Infimum von $w_\lambda(x, \cdot)$ über T bezeichnen wir mit $\hat{w}_\lambda(x)$.

Zu $\lambda \in \Lambda$ sei für jede nichtleere Teilmenge A von T

$S_A^\lambda = \{x \in \Delta : t \in A \Leftrightarrow w_\lambda(x, t) = \hat{w}_\lambda(x)\}$.

$\mathscr{Z}^\lambda = \{S_A : \emptyset \neq A \subset T\}$ heißt *Bayeszerlegung* zu λ.

Man prüft leicht nach, daß $\mathscr{Z}^\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine Zerlegung ist.

Satz 1. *$\phi \in \Phi$ ist genau dann universelles Bayesverfahren bez. der a-priori-Verteilung λ, wenn ϕ mit $\mathscr{Z}^\lambda$ verträglich ist.*

Beweis. Sei $\phi \in \Phi(\mathscr{Z}^\lambda)$, also $\phi(x, A) = 1$ für alle $x \in S_A^\lambda$. $x \in S_A^\lambda$ impliziert außerdem: $w_\lambda(x, t) = \hat{w}_\lambda(x)$ für alle $t \in A$. Damit ergibt sich für alle $x \in \Delta$

$$\sum_{T} w_\lambda(x, t)\, \phi(x, \{t\}) = \hat{w}_\lambda(x). \tag{+}$$

Für $\psi \in \Phi$ und beliebiges Standardmaß Q erhalten wir

$$\begin{aligned} r_\psi(\lambda) &= \int_{\Delta} \sum_{T} w_\lambda(x, t)\, \psi(x, \{t\})\, dQ(x) \\ &\geqq \int_{\Delta} \hat{w}_\lambda(x)\, dQ(x) \\ &\overset{(+)}{=} \int_{\Delta} \sum_{T} w_\lambda(x, t)\, \phi(x, \{t\})\, dQ(x) = r_\phi(\lambda). \end{aligned}$$

Sei nun $\psi \notin \Phi(\mathscr{Z}^\lambda)$. In diesem Fall existiert eine nichtleere Teilmenge A von T und ein $x \in S_A^\lambda$, so daß $\psi(x, A) < 1$, d.h. $\psi(x, \{t\}) > 0$ für ein $t \in T \setminus A$. Dann ist $w_\lambda(x, t) > \hat{w}_\lambda(x)$ und für ein Standardmaß Q' mit positiver Masse in x auch $r_\psi(\lambda) > r_\phi(\lambda)$, also ψ nicht universelles Bayesverfahren bez. λ.

Da jedes Bayesverfahren bez. einer strikt positiven a-priori-Verteilung zulässig ist, haben wir als

Korollar 1. *Sei $\lambda \in \Lambda$ und $\lambda_\theta > 0$ für alle $\theta \in \Theta$. Jedes mit $\mathscr{Z}^\lambda$ verträgliche Entscheidungsverfahren ist universell zulässig.*

Die folgenden Bemerkungen und Beispiele lassen die Struktur der Bayeszerlegungen erkennen.

Bemerkung 1. Sei $\lambda \in \Lambda$ und $\emptyset \neq A \subset B \subset T$. Die Vereinigung aller Mengen S_C^λ, $A \subset C \subset B$, ist eine konvexe Teilmenge von Δ. Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der Bayeszerlegung.

Für Entscheidungsverfahren, die mit einer Bayeszerlegung verträglich sind, ist also der Bereich, in dem eine Entscheidung aus B getroffen werden muß und jede Entscheidung aus A getroffen werden kann, konvex. Insbesondere sind alle S_A^λ, $\emptyset \neq A \subset T$, konvex.

Bemerkung 2. Sei $\Theta' \subset \Theta$ und $t' \in A \subset T$. Für alle $\lambda \in \Lambda$, deren Träger in Θ' enthalten ist, gilt: $S_A^\lambda = \emptyset$ genau dann, wenn es eine konvexe Linearkombination der Funktionen $\{v(\cdot, t) - v(\cdot, t'): t \in T\}$ mit negativen Werten auf Θ' gibt. Diese Aussage folgt aus einem Dualitätssatz über lineare Ungleichungssysteme.

Entscheidungsverfahren, die eine Entscheidung mit der oben genannten Eigenschaft zulassen, sind also mit Bayeszerlegungen bez. a-priori-Verteilungen mit Träger in Θ' nicht verträglich. Ist insbesondere $\Theta' = \Theta$, so sind solche Entscheidungsverfahren mit keiner Bayeszerlegung verträglich und damit auch nicht universell zulässig, wie wir später sehen werden. Eine Reduzierung des Entscheidungsraums durch Weglassen dieser Entscheidungen spielt somit bei der Frage nach den universell zulässigen Entscheidungsverfahren keine Rolle.

Beispiel 1. Ein Klassifizierungsproblem ist ein Entscheidungsproblem mit identischem Parameter- und Entscheidungsraum (o.B.d.A. $\Theta = T = \{1, \dots, n\}$) und der Verlustfunktion $v(\theta, t) = 1 - \delta_{\theta t}$.

Wir fragen nach den Bayeszerlegungen.

Sei $\lambda \in \Lambda$ und $\emptyset \neq A \subset T$.

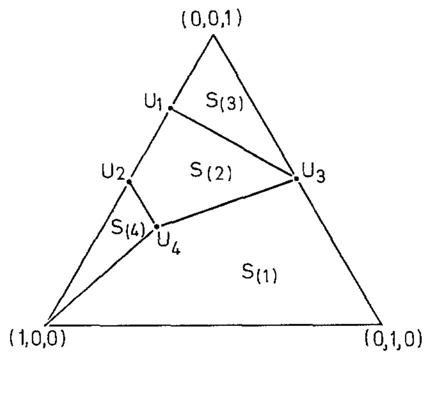
$$\begin{aligned} S_A^\lambda &= \left\{ x \in \Delta \colon k \in A \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i (1 - \delta_{ik}) = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i (1 - \delta_{ij}) \right\} \\ &= \left\{ x \in \Delta \colon k \in A \Leftrightarrow \lambda_k x_k = \max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j x_j \right\} \\ &= \{ x \in \Delta \colon \lambda_j x_j = \lambda_k x_k \text{ für } j, k \in A \text{ und } \lambda_j x_j < \lambda_k x_k \text{ für } j \notin A,\, k \in A \}. \end{aligned}$$

S_A^λ ist also der Durchschnitt von Δ, den Teilräumen $\{\{x \in \mathbb{R}^n \colon \lambda_i x_i = \lambda_k x_k\} \colon i, k \in A\}$ und den offenen Halbräumen $\{\{x \in \mathbb{R}^n \colon \lambda_i x_i > \lambda_k x_k\} \colon i \in A, k \notin A\}$.

Beispiel 2. Sei $\Theta = \{1, 2, 3\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir skizzieren die Bayeszerlegung für die Gleichverteilung auf Θ:



$U_1 = \frac{1}{4}(1, 0, 3)$

$U_2 = \frac{1}{2}(1, 0, 1)$

$U_3 = \frac{1}{2}(0, 1, 1)$

$U_4 = \frac{1}{6}(3, 1, 2)$

III. Verallgemeinerte Bayeszerlegungen

Durch Korollar 1 wird eine Klasse universell zulässiger Entscheidungsverfahren gegeben. Diese Klasse ist aber nicht vollständig. Um alle universell zulässigen Entscheidungsverfahren zu erfassen, ist es notwendig, die Begriffe „a-priori-Verteilung", „Bayesverfahren" und „Bayeszerlegung" zu verallgemeinern.

Eine *verallgemeinerte a-priori-Verteilung* ist ein Tupel von a-priori-Verteilungen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_i \in \Lambda$, mit der Eigenschaft: $\sum_{\Theta} \lambda_{i\theta} \lambda_{k\theta} = 0$ für $i \neq k$.

Wir bezeichnen die Menge der verallgemeinerten a-priori-Verteilungen mit $\bar{\Lambda}$.

Ein Entscheidungsverfahren $\phi \in \Phi$ heißt *Bayesverfahren* bez. der verallgemeinerten a-priori-Verteilung $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$, wenn gilt:

ϕ ist Bayesverfahren bez. λ_1 und

ϕ ist Bayesverfahren bez. λ_{k+1} für jedes $k = 1, \ldots, m-1$ in der Klasse der Bayesverfahren bez. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Sei nun $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ eine verallgemeinerte a-priori-Verteilung und $x \in \Delta$. Wir setzen $A_0(x) = T$ und für $i = 1, \ldots, m$:

$$A_i(x) = \{t \in A_{i-1}(x)\colon w_{\lambda_i}(x, t) \leqq w_{\lambda_i}(x, t') \text{ für alle } t' \in A_{i-1}(x)\}.$$

Zu $\emptyset \neq A \subset T$ sei $S_A^{\bar{\lambda}} = \{x\colon A_m(x) = A\}$.

$\mathscr{X}^{\bar{\lambda}} = \{S_A^{\bar{\lambda}}\colon \emptyset \neq A \subset T\}$ heißt *Bayeszerlegung* bez. $\bar{\lambda}$.

Die beiden letzten Definitionen sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Definitionen für gewöhnliche a-priori-Verteilungen. Wir müssen allerdings noch zeigen, daß diese verallgemeinerten Bayeszerlegungen auch wirklich Zerlegungen sind.

Bemerkung 3. Sei $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$. Für jedes $x \in \Delta$ ist $A_m(x)$ nicht leer, denn $A_0(x) = T \neq \emptyset$ und $A_i(x) \neq \emptyset$ impliziert $A_{i+1}(x) \neq \emptyset$, $i = 0, \ldots, m-1$. Da $A_m(x)$ durch x eindeutig bestimmt ist, liegt jedes $x \in \Delta$ in genau einer Menge $S_A^{\bar{\lambda}}$. Folglich ist $\mathscr{X}^{\bar{\lambda}}$ eine Zerlegung.

Bemerkung 4. Verallgemeinerte Bayeszerlegungen haben dieselben Konvexitätseigenschaften wie Bayeszerlegungen: Sei $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ und $\emptyset \neq A \subset B \subset T$. Die Vereinigung der Mengen $S_C^{\bar{\lambda}}$, $A \subset C \subset B$, ist konvex.

Wir verallgemeinern Satz 1 durch

Satz 2. *$\phi \in \Phi$ ist genau dann universelles Bayesverfahren bez. der verallgemeinerten a-priori-Verteilung $\bar{\lambda}$, wenn ϕ mit $\mathscr{X}^{\bar{\lambda}}$ verträglich ist.*

Beweis. Wir schreiben λ^i für $(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Nach Satz 1 ist ϕ genau dann universelles Bayesverfahren bez. λ^1, wenn ϕ mit $\mathscr{X}^{\lambda^1}$ verträglich ist.

Die Aussage des Satzes gelte für alle λ^j, $j < k$.

Sei $\phi \in \Phi(\mathscr{X}^{\lambda^k})$ und $x \in \Delta$.

Da $\mathscr{X}^{\lambda^k}$ eine Zerlegung ist, gibt es eine nichtleere Teilmenge A von T, so daß x in $S_A^{\lambda^k}$ liegt.

Ersetzen wir nun im Beweis von Satz 1 λ durch λ_k und $\hat{w}_\lambda(x)$ durch $\inf_{t \in A} w_{\lambda_k}(x, t)$, so erhalten wir für jedes Standardmaß: $r_\phi(\lambda_k) \leqq r_\psi(\lambda_k)$ für alle $\psi \in \Phi(\mathscr{X}^{\lambda^{k-1}})$, d.h. ϕ ist universelles Bayesverfahren bez. λ^k.

Ist $\psi \in \Phi(\mathscr{X}^{\lambda^{k-1}})$, aber $\psi \notin \Phi(\mathscr{X}^{\lambda^k})$, so existiert ein $x \in \Delta$ und eine Entscheidung $t \notin A_k(x)$ mit $\psi(x, \{t\}) > 0$, und für ein Standardmaß Q mit positiver Masse in x erhalten wir $r_\phi(\lambda_k) < r_\psi(\lambda_k)$, d.h. ψ ist nicht universelles Bayesverfahren bez. λ^k.

Eine verallgemeinerte a-priori-Verteilung $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ heißt *vollständig*, wenn zu jedem $\theta \in \Theta$ ein k, $1 \leqq k \leqq m$, existiert, so daß $\lambda_{k\theta}$ positiv ist.

Korollar 2. *Sei $\bar{\lambda}$ eine vollständige verallgemeinerte a-priori-Verteilung. Jedes mit $\mathscr{X}^{\bar{\lambda}}$ verträgliche Entscheidungsverfahren ist universell zulässig.*

Beweis. Sei $\phi \in \Phi(\mathscr{X}^{\bar{\lambda}})$ und L_i der Träger von λ_i, $1 \leqq i \leqq m$. Nach Satz 2 ist ϕ universelles Bayesverfahren bez. $\bar{\lambda}$, also insbesondere universelles Bayesverfahren bez. λ_1 und somit nach Korollar 1 L_1-universell zulässig, d.h. für alle $\psi \in \Phi$ mit $R_\psi(\theta) \leqq R_\phi(\theta)$, $\theta \in L_1$, gilt $R_\psi(\theta) = R_\phi(\theta)$, $\theta \in L_1$, wobei R die Risikofunktion bez. des zugrunde liegenden Standardmaßes bezeichnet.

Sei L^k die Vereinigung der L_j, $j \leqq k$, und ϕ L^k-universell zulässig. In der Klasse der universellen Bayesverfahren bez. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, deren Risikofunktion für alle $\theta \in L^k$ mit der Risikofunktion von ϕ übereinstimmt, ist ϕ universelles Bayesverfahren bez. λ_{k+1} und somit L^{k+1}-universell zulässig. Nun ist $\bar{\lambda}$ als vollständig vorausgesetzt, also $L^m = \Theta$ und folglich ϕ universell zulässig.

Wir haben nun die Klasse der universell zulässigen Entscheidungsverfahren auf alle bez. einer vollständigen verallgemeinerten a-priori-Verteilung universellen Bayesverfahren erweitert. Daß diese Erweiterung hinreichend ist, bestätigt

Satz 3. *Jedes universell zulässige Entscheidungsverfahren ist universelles Bayesverfahren bez. einer vollständigen verallgemeinerten a-priori-Verteilung.*

Beweis. Für jedes Standardmaß Q sei $\Lambda_Q(\phi)$ die Menge der a-priori-Verteilungen, bez. denen das universell zulässige Entscheidungsverfahren ϕ Bayesverfahren zu Q ist.

1. $\Lambda_Q(\phi)$ ist nicht leer, denn ϕ ist in der Klasse der zulässigen Entscheidungsverfahren zu Q und diese in der Klasse der Bayesverfahren zu Q enthalten.

2. $\Lambda_Q(\phi)$ ist bezüglich der von der gewöhnlichen Topologie auf $\mathbb{R}^\Theta$ in Λ induzierten Topologie abgeschlossen:

Für eine konvergente Folge $\mu_k \in \Lambda$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim_{k \to \infty} \mu_k = \mu$, folgt aus $r_\phi(\mu_k) \leqq r_\psi(\mu_k)$ für alle k und $\psi \in \Phi$:

$$r_\phi(\mu) \leqq r_\psi(\mu) \quad \text{für jedes } \psi \in \Phi.$$

3. Für jede endliche Familie von Standardmaßen $Q_1, \ldots, Q_k$ ist der Durchschnitt der $\Lambda_{Q_i}(\phi)$, $i = 1, \ldots, k$, nicht leer: $Q = \frac{1}{k} \sum Q_i$ ist Standardmaß und nach 1. $\Lambda_Q(\phi) \neq \emptyset$.

Für $\lambda \in \Lambda_Q(\phi)$ ist ϕ Q-f.s. verträglich mit $\mathscr{X}^\lambda$, also auch Q_i-f.s. verträglich mit $\mathscr{X}^\lambda$, $i = 1, \ldots, k$. Das bedeutet aber, daß der Durchschnitt der $\Lambda_{Q_i}(\phi)$ die nichtleere Menge $\Lambda_Q(\phi)$ enthält, also selbst nicht leer ist.

Da Λ kompakt ist, folgt aus 1.–3.: Der Durchschnitt aller Mengen in $\{\Lambda_Q(\phi)$: Q Standardmaß auf $\Delta\}$ ist nicht leer. λ_1 liege in diesem Durchschnitt. Dann ist ϕ universelles Bayesverfahren bez. λ_1.

Sei nun ϕ universelles Bayesverfahren bez. $\lambda^k = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Ist λ^k nicht vollständig, so betrachten wir die Klasse der universellen Bayesverfahren bez. λ^k. ϕ ist in dieser Klasse universell zulässig, und wir finden wie im ersten Teil dieses Beweises unter Einschränkung von Λ auf die zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ orthogonalen a-priori-Verteilungen eine a-priori-Verteilung λ_{k+1}, bezüglich der ϕ universelles Bayesverfahren in dieser Klasse ist.

Wir erhalten schließlich eine vollständige verallgemeinerte a-priori-Verteilung, bez. der ϕ universelles Bayesverfahren ist.

Die Zusammenfassung der beiden letzten Aussagen ergibt den

Satz 4. *Ein Entscheidungsverfahren ϕ ist genau dann universell zulässig, wenn es eine vollständige verallgemeinerte a-priori-Verteilung $\bar{\lambda}$ gibt, so daß ϕ mit der Bayeszerlegung zu $\bar{\lambda}$ verträglich ist.*

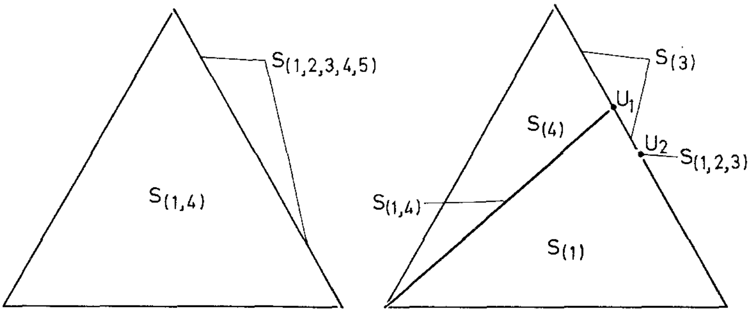
Damit sind alle universell zulässigen Entscheidungsverfahren charakterisiert. Es bleibt nun noch zu bemerken, daß die Klasse der universell zulässigen Entscheidungsverfahren wesentlich vollständig ist.

Bemerkung 5. Zu jedem zulässigen Entscheidungsverfahren (zu einem Standardmaß Q) gibt es ein universell zulässiges Entscheidungsverfahren mit derselben Risikofunktion:

$\psi \in \Phi$ sei zulässig bez. Q. Dann existiert eine vollständige verallgemeinerte a-priori-Verteilung $\bar{\lambda}$, bez. der ψ Bayesverfahren zu Q ist, und ψ ist Q-f.s. verträglich mit $\mathscr{Z}^{\bar{\lambda}}$, d.h. es existiert ein $\phi \in \Phi(\mathscr{Z}^{\bar{\lambda}})$, so daß $\psi = \phi$ Q-f.s. und $R_\psi(\theta) = R_\phi(\theta)$ für alle $\theta \in \Theta$. Dieses ϕ ist aber universell zulässig.

Beispiel 3. Wir wollen im Entscheidungsproblem aus Beispiel 2 die Bayeszerlegungen zu folgenden verallgemeinerten a-priori-Verteilungen skizzieren:

$\bar{\lambda} = ((1, 0, 0))$ $\qquad\qquad$ $\bar{\lambda} = ((1, 0, 0), \frac{1}{2}(0, 1, 1))$.



Die Koordinaten der Punkte U_1 bzw. U_2 sind $\frac{1}{3}(0, 1, 2)$ bzw. $\frac{1}{2}(0, 1, 1)$.

Zum Abschluß wollen wir die bekannte Aussage (s. (2)), daß die Klasse der zulässigen Entscheidungsverfahren eine echte Unterklasse der Klasse der punktweisen Limiten von Bayesverfahren bez. strikt positiver a-priori-Verteilungen ist, mit Hilfe von Zerlegungen formulieren.

Die Zerlegungsfolge $\mathscr{Z}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ heißt *konvergent*, wenn zu jedem $x \in \Delta$ eine nichtleere Teilmenge A von T und eine natürliche Zahl N existieren, so daß

$x \in S_A^k$ für alle $k \in N$. Den Limes einer konvergenten Folge von Bayeszerlegungen bez. strikt positiver a-priori-Verteilungen nennen wir *Grenzzerlegung.*

Sei $\bar{\lambda}$ eine vollständige verallgemeinerte a-priori-Verteilung. Die zugehörige Bayeszerlegung $\mathscr{X}^{\bar{\lambda}}$ ist Grenzzerlegung. Zum Beweis dieser Aussage ist einfach zu zeigen, daß die Zerlegungsfolge $\mathscr{X}^{\mu^n}$, $n=1, 2, \ldots$, gegen $\mathscr{X}^{\bar{\lambda}}$ konvergiert, wenn man für μ^n die strikt positive a-priori-Verteilung

$$\sum_{i=1}^{m} n^{1-i} \lambda_i \left(\sum_{\Theta} \sum_{k=1}^{m} n^{1-k} \lambda_{k\theta} \right)^{-1}$$

wählt.

Daß die Umkehrung der Aussage nicht gilt, ergibt sich leicht durch ein Gegenspiel.

Literaturverzeichnis

1. Bahadur, R.R.: Sufficiency and statistical decision functions. Ann. Math. Statist. **25**, 423–462 (1954)
2. Blackwell, D., Girshick, M.A.: Theory of games and statistical decisions. New York: Wiley 1954
3. Hodes, B.: Über eine Monotonieeigenschaft zulässiger Entscheidungsverfahren. Diplomarbeit, Frankfurt 1968
4. Müller, D.W.: Statistische Entscheidungstheorie, Ausarbeitung einer Vorlesung im WS 70/71 in Göttingen
5. Neumann, J.v., Morgenstern, O.: Theory of games and economic behavior, 2. Aufl. Princeton: University Press 1947

Eingegangen am 30. August 1974; in revidierter Form am 25. September 1975