Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 16, 181–194 (1970)

Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales

C. DOLÉANS-DADE

Maisonneuve a montré dans [5] qu'il existe une et une seule martingale continue Z_t satisfaisant à l'équation

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s, \tag{1}$$

où (X_s) est une martingale continue donnée. Nous étendons ici ce théorème et nous montrons que, (X_s) étant une semimartingale locale quelconque, il existe une et une seule semimartingale locale (Z_s) satisfaisant à (1).

Nous en déduisons un théorème de décomposition multiplicative des martingales locales qui généralise le théorème de factorisation donné par Kunita et Watanabe pour les processus qui sont à la fois, des martingales locales, et des fonctionnelles multiplicatives ([4], § 6).

0. Notations

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ est un espace probabilisé, complet, muni d'une famille $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathsf{R}_+}$ de sous-tribus de $\mathscr{F}$, croissante et continue à droite. Nous supposons que $\mathscr{F}_0$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathscr{F}$.

Nous identifierons toujours deux processus X et Y *indistinguables* (c'est-à-dire tels que pour presque tout ω, on ait $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout t). C'est en ce sens qu'il faudra comprendre les énoncés d'unicité ci-dessous.

Une *martingale locale* à valeurs réelles est un processus stochastique adapté $(M_t)_{t \in \mathsf{R}_+}$ à valeurs dans R, à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche, et ayant la propriété suivante: il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n tels que $\lim_n T_n = +\infty$, et que les processus arrêtés $(M_{t \wedge T_n} I_{\{T_n > 0\}})_{t \in \mathsf{R}_+}$ soient des martingales uniformément intégrables. Nous désignerons par $\mathscr{L}$ l'ensemble des martingales locales à valeurs réelles, *nulles à l'instant zéro*, et par $\mathscr{L}_{\mathsf{C}} = \mathscr{L} + i\,\mathscr{L}$ l'ensemble des martingales locales à valeurs complexes nulles à l'instant zéro. Toute martingale locale $M \in \mathscr{L}_{\mathsf{C}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$M = M^c + M^d$$

où M^c et M^d sont des éléments de $\mathscr{L}_{\mathsf{C}}$, M^c est à trajectoires continues, et la martingale locale M^d est orthogonale à toute martingale locale à trajectoires continues (c'est-à-dire si $N \in \mathscr{L}_{\mathsf{C}}$ est à trajectoires continues, le processus $(M_t^d N_t)$ appartient à $\mathscr{L}_{\mathsf{C}}$). On dit que M^c est la *partie continue* de la martingale locale M, et que M^d est la *somme compensée des sauts de M* ([1], théorème 4).

Nous désignerons par $\mathscr{V}^+$ l'ensemble des processus adaptés, à valeurs dans R, dont les trajectoires sont des fonctions croissantes, continues à droite et nulles à l'instant zéro. Nous désignerons par $\mathscr{V}$ l'espace $\mathscr{V}^+ - \mathscr{V}^+$ et par $\mathscr{V}_\mathsf{C}$ l'espace $\mathscr{V} + i\mathscr{V}$.

Une *semimartingale locale* $(X_t)_{t\in\mathsf{R}_+}$ est un processus stochastique adapté, à valeurs complexes, admettant une décomposition de la forme

$$X = X_0 + M + A$$

où X_0 est une variable aléatoire à valeurs complexes $\mathscr{F}_0$-mesurable, $M \in \mathscr{L}_\mathsf{C}$ et $A \in \mathscr{V}_\mathsf{C}$. Une telle décomposition n'est pas unique.

Nous utiliserons les résultats de [1] sur les intégrales stochastiques par rapport aux semimartingales locales. Ceux-ci sont énoncés dans [1] pour des processus à valeurs réelles, mais se généralisent de manière évidente au cas complexe. En particulier, si (X_t) est une semimartingale (resp. une martingale) locale, et si (U_t) est un processus stochastique adapté, à valeurs complexes, dont les trajectoires sont pourvues de limites à gauche, on peut définir la semimartingale locale (resp. la martingale locale) $W_t = \int_0^t U_{s-}\, dX_s$. Cette intégrale stochastique a les propriétés suivantes:

(0.1) Si (X_s) est une martingale locale à trajectoires continues, $W_s = \int_0^s U_{t-}\, dX_t$ est aussi une martingale locale à trajectoires continues. De plus

$$\langle W, W\rangle_s = \int_0^s U_{t-}^2\, d\langle X, X\rangle_t,$$

(rappelons que si X est une martingale locale continue appartenant à $\mathscr{L}_\mathsf{C}$, $\langle X, X\rangle$ est l'unique élément à trajectoires continues de $\mathscr{V}_\mathsf{C}$ tel que $X^2 - \langle X, X\rangle$ soit une martingale locale).

(0.2) Si (X_s) est une martingale locale, somme compensée de sauts, alors $W_s = \int_0^s U_{t-}\, dX_t$ est aussi une martingale locale, somme compensée de sauts; et l'on a pour presque tout ω, $\Delta W_t = U_{t-}\, \Delta X_t$ pour tout t [1].

Soit X une semimartingale locale, admettant la décomposition

$$X = X_0 + M + A, \qquad M \in \mathscr{L}_\mathsf{C}, \ A \in \mathscr{V}_\mathsf{C}.$$

On désigne par (X_s^c) la partie continue de la martingale locale (M_s); c'est une martingale locale continue, indépendante de la décomposition de X utilisée. Si X et Y sont deux semimartingales locales, on désigne par $\langle X^c, Y^c\rangle$ l'unique processus à trajectoires continues de $\mathscr{V}_\mathsf{C}$ tel que le processus $X^c Y^c - \langle X^c, Y^c\rangle$ soit une martingale locale.

Nous utiliserons constamment la formule de changement de variables suivante ([1] théorème 8). Soit X une semimartingale locale à valeurs dans R^n (c'est-à-dire un processus stochastique dont les composantes X^i sont des semimartingales locales à valeurs dans R) et soit F une fonction deux fois continument

---

[1] ΔW_t désigne le saut du processus W à l'instant t.

différentiable de R^n dans C. On a alors pour tout t fini, en notant par D^i l'opérateur de dérivation par rapport à la i-ème coordonnée

$$F\circ X_t = F\circ X_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^n D^i F\circ X_{s-}\, dX_s^i + \tfrac{1}{2}\int_0^t \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^n D^i D^j F\circ X_{s-}\, d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$
$$+\sum_{s\leq t}\Big[F\circ X_s - F\circ X_{s-} - \sum_{i=1} D^i F\circ X_{s-}(X_s^i - X_{s-}^i)\Big];$$

où la somme $\sum_{s\leq t}(\;)$ intervenant au second membre converge p.s. pour tout t.

1. Résolution de l'équation $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s$

Théorème 1. *Soit (X_s) une semimartingale locale telle que $X_0 = 0$*

a) *il existe une et une seule semimartingale locale (Z_t) vérifiant*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s. \tag{1}$$

b) *Z_t est donnée par*

$$Z_t = \exp\big(X_t - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\big)\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}$$

où le produit intervenant au second membre converge presque sûrement pour tout t.

Nous utiliserons dans la suite la notation $Z = \mathscr{E}(X)$ pour désigner ce processus.

Démonstration. 1) Montrons que le processus

$$Z_t = \exp\big(X_t - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\big)\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}$$

est solution de l'équation $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s$.

Dans l'intervalle $[0, t]$ la fonction $s \to X_s(\omega)$ n'a qu'un nombre fini de sauts tels que $|\Delta X_s(\omega)| \geq 1$. La série $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s(\omega)|^2$ étant convergente pour presque tout ω, ([1], théorème 4), il en est de même de la série $\sum_{s\leq t} |e^{-\Delta X_s(\omega)} - 1 + \Delta X_s(\omega)\, e^{-\Delta X_s(\omega)}|$. Il existe donc un ensemble de mesure nulle $N \subset \Omega$ tel que pour $\omega \notin N$ le produit $R_t = \prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}$ soit uniformément convergent sur tout compact; on définit ainsi un processus stochastique adapté (R_t) dont les trajectoires sont évidemment continues à droite et pourvues de limites à gauche.

On voit de même que la série

$$\sum_{s\leq t} |\Delta R_s| = \sum |R_{s-}|\, |e^{-\Delta X_s} - 1 + \Delta X_s\, e^{-\Delta X_s}|$$

converge presque sûrement pour tout t; le processus (R_t) appartient donc à $\mathscr{V}_{\mathsf{C}}$.

Appliquons maintenant la formule du changement de variables ([1] théorème 8) à la fonction $F(x, y) = y\, e^x$ et aux deux semimartingales locales $K_t = X_t - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t$

et R_t. Nous obtenons

$$\begin{aligned}Z_t &= F(K_t, R_t)\\ &= Z_0 + \int_0^t Z_{s-}\,dX_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}\,d\langle X^c, X^c\rangle_s + \sum_{s\leq t} e^{K_{s-}}\,\Delta R_s\\ &\quad + \tfrac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}\,d\langle X^c, X^c\rangle_s + \sum_{s\leq t}(Z_s - Z_{s-} - Z_{s-}\,\Delta X_s - e^{K_{s-}}\,\Delta R_s)\end{aligned}$$

ou en simplifiant

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\,dX_s.$$

Le processus (Z_s) est donc bien une semimartingale locale solution de l'équation (1).

2) *Unicité de la solution*

a) Supposons d'abord que la semimartingale locale (X_s) appartienne à $\mathscr{V}$ et désignons par (A_s) le processus croissant à valeurs finies défini par

$$A_s = \int_{[0,s]} |dX_u|.$$

Si (Z_s) et (Z'_s) sont deux solutions de l'équation

$$Z_s = 1 + \int_{[0,t]} Z_{t-}\,dX_t,$$

leur différence H_s vérifie l'équation

$$H_s = Z_s - Z'_s = \int_{[0,s]} H_{t-}\,dX_t,$$

donc

$$H_{s-} = \int_{[0,s[} H_{t-}\,dX_t.$$

Ce qui donne en itérant

$$H_{s-} = \int_{[0,s[} dX_{s_1} \int_{[0,s_1[} dX_{s_2} \dots \int_{[0,s_{n-2}[} dX_{s_{n-1}} \int_{[0,s_{n-1}[} H_{s_{\bar{n}}}\,dX_{s_n}\ \forall n,$$

et

$$|H_{s-}(\omega)| \leq M_s(\omega) \int_{[0,s[} dA_{s_1} \dots \int_{[0,s_{n-1}[} dA_{s_n}$$

p.s. pour tout n et tout s, où $M_s(\omega)$ désigne la quantité finie $M_s(\omega) = \sup_{0\leq t\leq s} |H_{t-}(\omega)|$. Le processus (H_s) satisfait alors aux inégalités [2]

$$|H_{s-}(\omega)| \leq M_s(\omega)\,\frac{A_s^n(\omega)}{n!}$$

p.s. pour tout n et tout s, et est indistinguable du processus nul. C.Q.F.D.

[2] L'égalité (22.2), chapitre VII, [6]

$$d(A_s^n) = A_{s-}^{n-1}\,dA_s + A_s\,d(A_s^{n-1})$$

permet de montrer facilement par récurrence l'inégalité $d(A_s^n) \geq n\,A_{s-}^{n-1}\,d(A_s)$. On voit alors, toujours par récurrence, que l'inégalité

$$\int_{[0,s[} dA_{s_1} \int_{[0,s_1[} dA_{s_2} \dots \int_{[0,s_{n-1}[} dA_{s_n} \leq \frac{A_s^n}{n!}$$

vraie pour $n=1$ est valable pour tout n.

b) Considérons maintenant le cas d'une semimartingale locale nulle à l'instant zéro, et admettant la décomposition

$$X = M + A, \qquad M \in \mathscr{L}_{\mathrm{C}},\ A \in \mathscr{V}_{\mathrm{C}},$$

et soit (N_s) une solution de l'équation

$$N_s = 1 + \int_0^s N_{t-}\, dX_t.$$

Nous voulons montrer que les processus N_s et

$$Z_s = \exp(X_s - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_s) \prod_{t \leqq s} (1 + \Delta X_t)\, e^{-\Delta X_t}$$

sont indistinguables.

Soit T_n la suite croissante de temps d'arrêt définie ainsi:

T_1 est le premier instant auquel le processus X_t saute d'une valeur $|\Delta X_t| \geqq \frac{1}{2}$ (ou $+\infty$ s'il n'y a pas de tel saut)...

T_n est le premier instant après T_{n-1} auquel le processus X_t saute d'une valeur $|\Delta X_t| \geqq \frac{1}{2}$ (ou $+\infty$ s'il n'y a pas de tel saut après l'instant T_{n-1}). ...

La suite T_n tend p.s. en croissant vers $+\infty$, et le processus

$$V_t = \sum_n \Delta X_{T_n} I_{\{t \geqq T_n\}}$$

appartient à $\mathscr{V}_{\mathrm{C}}$. Considérons la semimartingale locale $Y = X - V$; les semimartingales locales Y et V n'ont pas de discontinuités communes; les sauts du processus Y sont à valeurs dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, le processus

$$H_s = \exp(Y_s - \tfrac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_s) \prod_{t \leqq s} (1 + \Delta Y_t)\, e^{-\Delta Y_t}$$

est donc une semimartingale locale qui ne s'annule jamais et qui est solution de l'équation

$$H_s = 1 + \int_0^s H_{t-}\, dY_t$$

(ceci parce que $X^c = Y^c$, [1] §5). Le processus (H_{s-}) ne prend jamais la valeur zéro. Il existe donc une suite croissante de temps d'arrêt (S_n) tels que

$$\lim_n S_n = +\infty$$

et

$$|H_{s-}| \geqq \frac{1}{n} \qquad \text{pour } s \leqq S_n.$$

Ceci entraîne l'inégalité $|H_s| = |H_{s-}|\,|1 + \Delta Y_s| \geqq 1/2n$ pour $s \leqq S_n$. Appliquons maintenant la formule de changement de variables à une fonction F_n de classe C^2 définie sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ et telle que $F_n(x, y) = x/y$ si $|y| \geqq 1/2n$; nous obtenons une expression de

$$F_n(N_{s \wedge S_n}, H_{s \wedge S_n}) = \frac{N_{s \wedge S_n}}{H_{s \wedge S_n}}$$

qui devient, après avoir fait tendre n vers $+\infty$:

$$\alpha_t = \frac{N_t}{H_t} = 1 + \int_0^t \alpha_{s-}\, d(X_s - Y_s) - \int_0^t \alpha_{s-}\, d\langle X^c, X^c\rangle_s$$
$$+ \int_0^t \alpha_{s-}\, d\langle X^c, X^c\rangle_s$$
$$+ \sum_{s \leq t} \alpha_s - \alpha_{s-} - \alpha_{s-}(\Delta X_s - \Delta Y_s)$$

ou en simplifiant

$$\alpha_t = 1 + \int_0^t \alpha_{s-}\, d(X_s - Y_s)$$

(nous avons utilisé dans les calculs précédents les propriétés (0.1) et (0.2)). Comme la semimartingale locale $V = X - Y$ appartient à $\mathscr{V}_C$ le processus $\alpha_s = N_s/H_s$ est indistinguable du processus

$$\exp(X_s - Y_s) \prod_{t \leq s} (1 + \Delta X_s - \Delta Y_s)\, e^{-(\Delta X_s - \Delta Y_s)} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 1. Si Z est une semimartingale locale telle que les processus (Z_s) et (Z_{s-}) ne s'annulent jamais, le processus $1/Z_{s-}$ est localement borné (voir [1]) et on peut définir l'intégrale stochastique

$$X_t = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_{s-}}$$

qui est une semimartingale locale. On a alors

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s,$$

en particulier si $Z_0 = 1$, on voit que $Z = \mathscr{E}(X)$.

Remarque 2. Supposons que X soit une martingale locale. On peut se demander à quelle condition la martingale locale $\mathscr{E}(X) = Z$ est une vraie martingale. C'est certainement vrai si X est une martingale à valeurs réelles bornées dont tous les sauts sont à valeurs dans $[-1, +\infty[$, car tous les termes $(1 + \Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}$ sont alors à valeurs dans $[0, 1]$, et l'on a $|Z_t| \leq \exp(\sup_{t,\omega} |X_t(\omega)|)$. Si X est seulement une martingale réelle, bornée en valeur absolue par une constante c on peut affirmer que $\mathscr{E}(\lambda X)$ est une vraie martingale pour tout $|\lambda| \leq 1/2c$, mais nous ne savons rien dire sur $\mathscr{E}(X)$ elle-même.

2. Décompositions multiplicatives

Rappelons que deux martingales de carré intégrable X et Y sont dites *orthogonales* si leur produit XY est une martingale. Il est donc naturel de chercher à représenter une martingale comme un produit de martingales orthogonales. De telles représentations se rencontrent en fait dans la littérature. Par exemple, soit I_t un processus à accroissements indépendants et stationnaires issu de zéro, et Φ_t la fonction caractéristique de la variable aléatoire I_t. Introduisons la martingale bien connue (Doob [2] p. 389)

$$Z_t^u = \frac{e^{iuI_t}}{\Phi_t(u)} \qquad (u \in \mathsf{R}).$$

La formule de Lévy-Khintchine, décomposition *additive* du processus (I_t), donne lieu à une décomposition *multiplicative* de la martingale Z_t^u, en un «produit continu» de martingales orthogonales.

La clef des résultats de décomposition multiplicative est la proposition suivante, évidente sur la formule donnant $\mathscr{E}(X)$.

Proposition 1. *Soient X et Y deux semimartingales locales; l'égalité*

$$\mathscr{E}(X+Y)=\mathscr{E}(X)\,\mathscr{E}(Y) \quad p.s.$$

a lieu si et seulement si X et Y n'ont pas de discontinuités communes, et si les martingales locales X^c et Y^c sont orthogonales (c'est-à-dire $X^c Y^c$ est une martingale locale).

Ainsi si U est une semimartingale locale de la forme $\mathscr{E}(Z)$, toute décomposition additive $Z=X+Y$ satisfaisant aux conditions ci-dessus donne lieu à une décomposition multiplicative de Z.

Exemple 1. Décomposition multiplicative des surmartingales positives

Cette décomposition est du à Ito et Watanabe [3] dans le cas où la famille de tribus ne possède pas de temps de discontinuité, à Meyer [7] dans le cas général. Nous n'en traiterons ici qu'un cas particulier.

Soit X une surmartingale positive qui ne s'annule jamais (le processus X_{s-} ne s'annule alors jamais non plus: voir [6], chapitre VIT15). Considérons sa décomposition de Doob.

$X=M-A$ (M martingale locale, A processus croissant naturel) et introduisons les processus

$$U_t=\int_0^t \frac{dM_s}{X_{s-}} \quad \text{(martingale locale)}$$

$$V_t=\int_0^t \frac{dA_s}{X_{s-}} \quad \text{(processus croissant naturel)}$$

$$W_t=\int_0^t \frac{dX_s}{X_{s-}}=U_t-V_t,$$

nous avons $X=\mathscr{E}(W)$. Si la famille de tribus est sans temps de discontinuité, U et V sont sans discontinuités communes et l'on a donc

$$X=\mathscr{E}(U)\,\mathscr{E}(-V);$$

$\mathscr{E}(U)$ est une martingale locale, et on a si on désigne par A_t^c la partie continue du processus croissant A

$$\mathscr{E}(-V)_t=e^{-\int_0^t \frac{dA_s^c}{X_{s-}}}\prod_{s\leq t}\left(1-\frac{\Delta A_s}{X_{s-}}\right);$$

c'est la formule de décomposition multiplicative des surmartingales positives.

Exemple 2. Décompositions multiplicatives des martingales

Proposition 2. *Soit M une martingale locale, et soit $M=M^c+M^d$ la décomposition de M en partie continue et somme compensée de sauts. On suppose que M_t et M_{t-}*

ne s'annulent jamais; M admet alors la décomposition multiplicative suivante

$$M = M_0 \cdot X \cdot Y \quad p.s.$$

où

$$X_s = \exp\left(\int_0^s \frac{dM_t^c}{M_{t-}} - \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d\langle M^c, M^c\rangle_t}{M_{t-}^2}\right)$$

est une martingale locale continue, et où

$$Y_s = \exp\left(\int_0^s \frac{dM_t^d}{M_{t-}}\right) \prod_{t \leq s}\left(1 + \frac{\Delta M_t}{M_{t-}}\right) e^{-\frac{\Delta M_t}{M_{t-}}}$$

est une martingale locale, somme compensée de sauts (le produit $\prod_{t \leq s}(\;)$ étant p.s. convergent pour tout s).

Il suffit d'écrire que $M = \mathscr{E}(N)$, où

$$N_t = \int_0^t \frac{dM_s}{M_{s-}},$$

et de décomposer N en sa partie continue

$$N_t^c = \int_0^t \frac{dM_s^c}{M_{s-}},$$

et sa partie somme compensée de sauts

$$N_t^d = \int_0^t \frac{dM_s^d}{M_{s-}}.$$

Remarque. Voici un autre exemple intéressant de décomposition multiplicative: nous supposons pour simplifier que la famille de tribus $(\mathscr{F}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité à gauche, et nous considérons une martingale locale M telle que M_t et M_{t-} ne s'annulent jamais. Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathrm{P}(M_T \neq M_{T-}) = 1$. Le temps d'arrêt T est alors totalement inaccessible, et il existe un processus à trajectoires continues, et un seul, $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{C}}$ tel que

$$N_t = \Delta M_T I_{\{t \geq T\}} - A_t$$

soit une martingale locale (une démonstration analogue à celle de [1] proposition 4 montre qu'un tel processus A existe localement et est unique, il suffit alors de recoller). La martingale locale

$$U = M - N$$

est alors continue à l'instant T; considérons les martingales locales

$$X_t = \int_0^t \frac{dU_s}{M_{s-}}$$

et

$$Y_t = \int_0^t \frac{dN_s}{M_{s-}} \quad \text{(martingale locale somme compensée de sauts).}$$

Ces deux martingales sont sans discontinuités communes et l'on a

$$M=\mathscr{E}(X+Y)=\mathscr{E}(X)\,\mathscr{E}(Y)$$

où $\mathscr{E}(X)$ est une martingale locale continue à l'instant T et $\mathscr{E}(Y)$ une martingale locale somme compensée de sauts qui ne saute qu'à l'instant T.

3. Développement de $\mathscr{E}(X)$

Considérons une semimartingale X nulle à l'instant zéro, et les semimartingales $Z(\lambda)=\mathscr{E}(\lambda X)$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Nous savons, démonstration du théorème 1, qu'il existe un ensemble $N\subset\Omega$ de mesure nulle, tel que pour tout $\omega\notin N$, le produit

$$R_t(\lambda,\omega)=\prod_{s\leq t}\left(1+\lambda\,\Delta X_s(\omega)\right)e^{-\lambda\Delta X_s(\omega)}$$

soit uniformément convergent en (t,λ) sur tout compact de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}$. Pour tout $\omega\notin N$, les fonctions

$$\lambda\to Z_t(\lambda,\omega)=\exp\left(\lambda X_t(\omega)-\tfrac{1}{2}\lambda^2\langle X^c,X^c\rangle_t(\omega)\right)\prod_{s\leq t}\left(1+\lambda\Delta X_s(\omega)\right)e^{-\lambda\Delta X_s(\omega)}$$

sont donc des fonctions analytiques de λ et admettent des développements de la forme

$$Z_t(\lambda,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,Y_n(t,\omega),$$

où les $Y_n(t,\omega)$ sont des processus stochastiques adaptés, à trajectoires continues à droite. Par ailleurs l'équation $Z_t(\lambda)=1+\lambda\int_0^t Z_{u-}(\lambda)\,dX_u$, donne après itération

$$\begin{aligned}Z_t(\lambda)=1&+\lambda\int_{[0,t]}dX_u+\lambda^2\int_{[0,t]}dX_{u_1}\int_{[0,u_1[}dX_{u_2}+\cdots\\&+\lambda^n\int_{[0,t]}dX_{u_1}\int_{[0,u_1[}\cdots\int_{[0,u_{n-1}[}dX_{u_n}+\lambda^{n+1}\int_{[0,t]}dX_{u_1}\int_{[0,u_1[}\cdots\int_{[0,u_n[}Z_{u_{n+1}}(\lambda)\,dX_{u_{n+1}}.\end{aligned}$$

Les processus stochastiques $Y_n(t)$ sont donc indistinguables des processus

$$\int_{[0,t]}dX_{u_1}\int\cdots\int_{[0,u_{n-1}[}dX_{u_n},$$

et l'on a

$$\mathscr{E}(\lambda X)_t=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_{[0,t]}dX_{u_1}\int_{[0,u_1[}dX_{u_2}\cdots\int_{[0,u_{n-1}[}dX_{u_n}\quad\text{p.s. pour tout } t.$$

On retrouve bien, lorsque (X_s) est une martingale locale continue, le développement donné dans [5].

4. Le logarithme d'une martingale locale

Nous allons maintenant étudier les relations entre la formule donnant $\mathscr{E}(X)$ et la formule indiquée par Kunita et Watanabe dans leur article [4], représentant le logarithme d'un processus qui est à la fois une martingale locale positive et une fonctionnelle multiplicative de Markov. Ce sujet est d'ailleurs lié à la formule de Lévy-Khintchine.

Nous supposons ici que *la famille de tribus* $(\mathscr{F}_t)$ *n'a pas de temps de discontinuité à gauche;* les sauts des martingales locales ont donc lieu à des temps d'arrêt totalement inaccessibles.

Commençons par quelques notations. Soit g un processus bien mesurable[3]. Nous poserons

$$\hat{g}=e^g-1, \qquad \hat{\hat{g}}=e^g-1-g,$$

ce sont aussi des processus bien mesurables. Supposons que pour presque tout ω l'ensemble $\{t;\, g_t(\omega)\neq 0\}$ soit dénombrable, nous dirons que $g\in\Lambda^0$ si le processus

$$S_t^g=\sum_{s\leq t} g_s(\omega)$$

appartient à $\mathscr{V}$; si le processus $S_t^{|g|}$ est localement intégrable, nous dirons que $g\in\Lambda^1_{\mathrm{loc}}$; si $g^2\in\Lambda^1_{\mathrm{loc}}$ nous dirons que $g\in\Lambda^2_{\mathrm{loc}}$.

Supposons que g appartienne à Λ^1_{loc}, il existe alors un processus appartenant à $\mathscr{V}$, naturel, localement intégrable, unique $\tilde{S}_t^g$ tel que $S_t^g-\tilde{S}_t^g$ soit une martingale locale. Nous désignerons par Q_t^g la martingale locale $S_t^g-\tilde{S}_t^g$.

Supposons que g appartienne à Λ^2_{loc} et qu'il existe une suite de temps d'arrêt T_n totalement inaccessibles, distincts deux à deux tels que $\{(t,\omega);\, g_t(\omega)\neq 0\}\subset\bigcup_n\{(t,\omega);\, T_n(\omega)=t\}$. Il est impossible en général de définir $\tilde{S}_t^g$, mais il existe une et une seule martingale locale Q_t^g, somme compensée de sauts, et telle que pour presque tout ω on ait $\Delta Q_s^g(\omega)=g_s(\omega)$ pour tout s. Voici une démonstration schématique de cet énoncé: a) soient M et M' deux martingales locales, sommes compensées de sauts, et telle que pour presque tout ω on ait $\Delta M_s(\omega)=\Delta M'_s(\omega)$ pour tout s, on a alors pour presque tout ω (voir [1] § 3 section 3)

$$[M-M', M-M']_t=\sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2-2\sum \Delta M_s\Delta M'_s+(\Delta M'_s)^2=0 \qquad \text{pour tout } t.$$

Le processus $(M-M')^2$ est donc une martingale locale positive et nulle à l'instant zéro et est par suite indistinguable du processus identiquement nul. La martingale Q_s^g, si elle existe, est donc unique.

b) Il suffit maintenant de montrer l'existence de Q^g dans le cas où le processus $\sum_s g_s^2(\omega)=\sum_n g_{T_n}^2(\omega)$ est intégrable. A chaque processus $A_t^n=g_{T_n}I_{\{t\geq T_n\}}$ on peut associer un processus appartenant à $\mathscr{V}$, continu, unique, B^n tel que A^n-B^n soit une martingale somme compensée de sauts. Les martingales A^n-B^n sont orthogonales deux à deux, et l'on a, en utilisant successivement [6] chapitre VII (22.2), [6] chapitre VII T. 17, et le fait que B^n est continu

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[(A_\infty^n-B_\infty^n)^2]&=\mathsf{E}\left[\int_0^\infty (A_t^n-B_t^n)\,d(A_t^n-B_t^n)+\int_0^\infty (A_{t-}^n-B_t^n)\,d(A_t^n-B_t^n)\right]\\ &=\mathsf{E}\left[\int_0^\infty (A_t^n-B_t^n)\,d(A_t^n-B_t^n)\right]=\mathsf{E}\left[\int_0^\infty (A_t^n-A_{t-}^n)\,d(A_t^n-B_t^n)\right]\\ &=\mathsf{E}\left[\int_0^\infty (A_t^n-A_{t-}^n)\,dA_t^n\right]=\mathsf{E}[g_{T_n}^2].\end{aligned}$$

[3] Un processus $g(t,\omega)$ est bien mesurable si l'application $(t,\omega)\to g(t,\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathsf{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus adaptés, dont les trajectoires sont continues à droite.

La série $\sum_n (A^n_\infty - B^n_\infty)$ est donc convergente dans L^2, et l'on termine comme en [6] chapitre VIII T. 32.

Considérons maintenant une *martingale locale* α_t *positive, ne s'annulant jamais et telle que* $\alpha_0 = 1$. *Pour une telle martingale locale on a* $\dfrac{\Delta\alpha_t}{\alpha_{t-}} > -1$.

Lemme 1. *Supposons que* α *soit une somme compensée de sauts et qu'il existe un nombre* u *tel que* $1 < u < +\infty$, *et que*

$$u \leqq 1 + \frac{\Delta\alpha_t}{\alpha_{t-}} \quad \text{pour tout } t.$$

Posons

$$g_s(\omega) = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\Delta\alpha_s(\omega)}{\alpha_{s-}(\omega)}\right),$$

nous avons alors $g \in \Lambda^1_{\mathrm{loc}}$, $\hat{g} \in \Lambda^1_{\mathrm{loc}}$ *et*

$$\mathrm{Log}\,\alpha_t = S^g_t - \tilde{S}^g_t.$$

Démonstration. Considérons la martingale locale, somme compensée de sauts

$$\beta_s = \int_0^t \frac{d\alpha_s}{\alpha_{s-}},$$

on a $\alpha = \mathscr{E}(\beta)$. Pour presque tout ω l'ensemble $\left\{s;\, s \leqq t,\, \dfrac{\Delta\alpha_s(\omega)}{\alpha_{s-}(\omega)} \neq 0\right\}$ est fini pour tout t (en effet si $s \leqq t$, on a $\Delta\alpha_s(\omega) \geqq \alpha_{s-}(\omega)(u-1) \geqq \inf_{s \leqq t} \alpha_{s-}(\omega)(u-1) > 0$), et la quantité $\sum_{s \leqq t} |\Delta\beta_s| = \sum_{s \leqq t} \dfrac{\Delta\alpha_s}{\alpha_{s-}}$ est p.s. finie pour tout t fini. Considérons une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt réduisant fortement la martingale locale β et telle que $\lim_n S_n = +\infty$ p.s. ([1] § 2 section 2), un temps d'arrêt S réduit fortement β si la martingale $(\beta_{t \wedge S})$ est uniformément intégrable et si la martingale $\mathsf{E}[|\beta_S| \,|\, \mathscr{F}_t]$ est bornée sur l'intervalle stochastique $[0, S[$, en particulier pour tout temps d'arrêt $T \leqq S$, le saut $\Delta\beta_T$ est intégrable), et posons

$$T_n = \inf\{t;\, \sum_{s \leqq t} |\Delta\beta_s| \geqq n\} \wedge S_n.$$

La suite de temps d'arrêt T_n tend p.s. en croissant vers $+\infty$; on a

$$\mathsf{E}\Big[\sum_{s \leqq T_n} |\Delta\beta_s|\Big] \leqq n + \mathsf{E}[|\Delta\beta_{T_n}|] < +\infty$$

et aussi, puisque $0 < u - 1 \leqq \Delta\beta_s$

$$\mathsf{E}\Big[\sum_{s \leqq T_n} |\mathrm{Log}(1 + \Delta\beta_s)|\Big] \leqq \mathsf{E}\Big[\sum_{s \leqq T_n} |\Delta\beta_s|\Big] < +\infty.$$

Les fonctions g et $\hat{g}$ appartiennent donc à Λ^1_{loc}. La martingale locale $S^{\hat{g}}_t - \tilde{S}^{\hat{g}}_t$ est une somme compensée de sauts, qui a les mêmes sauts que la somme compensée de sauts β_t. Ces deux martingales locales sont donc indistinguables et l'on a

$$\begin{aligned}\alpha_t = \mathscr{E}(\beta)_t &= e^{\beta_t} \prod_{s \leqq t} (1 + \Delta\beta_s)\, e^{-\Delta\beta_s} \\ &= \exp\Big(S^{\hat{g}}_t - \tilde{S}^{\hat{g}}_t - \sum_{s \leqq t} \Delta\beta_s\Big) \prod_{s \leqq t} (1 + \Delta\beta_s);\end{aligned}$$

mais

$$\prod_{s \leqq t} (1+\Delta \beta_s) = \exp\big(\sum_{s \leqq t} \operatorname{Log}(1+\Delta \beta_s)\big) = \exp S_t^g$$

et

$$\sum_{s \leqq t} \Delta \beta_s = S_t^{\hat{g}}.$$

On a donc pour α_t l'expression

$$\alpha_t = \exp(S_t^g - \tilde{S}_t^{\hat{g}}).$$

Lemme 2. *α est toujours une martingale locale somme compensée de sauts, positive, ne s'annulant jamais et telle que $\alpha_0 = 1$. Nous supposons qu'il existe un nombre v, $0 < v < +\infty$ tel que*

$$0 < 1 + \frac{\Delta \alpha_t}{\alpha_{t_-}} \leqq v \qquad \textit{pour tout } t$$

et nous posons toujours

$$g_s(\omega) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\Delta \alpha_s(\omega)}{\alpha_{s_-}(\omega)}\right).$$

Nous avons alors $\hat{g} \in \Lambda_{\mathrm{loc}}^2$, $\hat{\hat{g}} \in \Lambda_{\mathrm{loc}}^1$ et

$$\operatorname{Log} \alpha_t = Q_t^{\hat{g}} - S_t^{\hat{\hat{g}}}.$$

Démonstration. Considérons la martingale locale somme compensée de sauts

$$\beta_t = \int_0^t \frac{d\alpha_s}{\alpha_{s_-}},$$

nous avons encore $\alpha = \mathscr{E}(\beta)$. Le processus β étant une martingale locale, pour presque tout ω la somme $\sum_{s \leqq t} |\Delta \beta_s(\omega)|^2$ est finie pour tout t fini, [1] théorème 7. Posons

$$T_n = \inf\big(t; \sum |\Delta \beta_s|^2 \geqq n\big);$$

la suite croissante de temps d'arrêt T_n tend p.s. vers $+\infty$, et l'on a, puisque $|\Delta \beta_s| \leqq \sup(1, |v-1|)$ pour tout s,

$$\mathsf{E}\big[\sum_{s \leqq T_n} |\Delta \beta_s|^2\big] \leqq n + \sup(1, |v-1|)$$

$$\mathsf{E}\big[\sum_{s \leqq T_n} |\hat{\hat{g}}_s(\omega)|\big] = \mathsf{E}\big[\sum_{s \leqq T_n} |\Delta \beta_s - \operatorname{Log}(1+\Delta \beta_s)|\big] \leqq K\, \mathsf{E}\big[\sum_{s \leqq T_n} |\Delta \beta_s|^2\big]$$

où K est une constante ne dépendant que de v. Nous avons donc $\hat{g} \in \Lambda_{\mathrm{loc}}^2$ et $\hat{\hat{g}} \in \Lambda_{\mathrm{loc}}^1$.

La martingale locale $Q^{\hat{g}}$ est indistinguable de la martingale locale β. De plus

$$\prod_{s \leqq t} (1+\Delta \beta_s)\, e^{-\Delta \beta_s} = \exp\big(\sum_{s \leqq t} \operatorname{Log}(1+\Delta \beta_s) - \sum_{s \leqq t} \Delta \beta_s\big) = \exp(-S_t^{\hat{\hat{g}}}).$$

Nous avons donc pour α_t la formule

$$\alpha_t = e^{\beta_t} \prod_{s \leqq t} (1+\Delta \beta_s)\, e^{-\Delta \beta_s} = \exp(Q_t^{\hat{g}} - S_t^{\hat{\hat{g}}}).$$

Nous avons maintenant le théorème suivant

Théorème 2. *Soit α_t une martingale locale positive, ne s'annulant jamais et telle que $\alpha_0=1$. Il existe alors une martingale locale continue β^c et un processus f bien mesurable tels que si l'on pose*

$$g=f I_{\{f\geqq 1\}}, \qquad h=f I_{\{f<1\}}$$

on ait

$$\operatorname{Log}\alpha_t=(\beta_t^c-\tfrac{1}{2}\langle\beta^c,\beta^c\rangle_t)+(S_t^g-\tilde{S}_t^{\hat{g}})+(Q_t^{\hat{h}}-\tilde{S}_t^{\hat{\hat{h}}}).$$

Démonstration. Considérons les martingales locales

$$\beta_t^c=\int_0^t\frac{d\alpha_s^c}{\alpha_{s-}}, \qquad \beta_t^d=\int_0^t\frac{d\alpha_s^d}{\alpha_{s-}}, \quad \text{et} \quad \beta=\beta^c+\beta^d$$

nous avons $\alpha=\mathscr{E}(\beta^c+\beta^d)=\mathscr{E}(\beta^c)\,\mathscr{E}(\beta^d)$. Pour presque tout ω, le processus

$$\sum_{s\leqq t}|\Delta\beta_s|\,I_{\{e\leqq 1+\Delta\beta_s\}}$$

est fini pour tout t, et localement intégrable; il ne saute qu'en des temps totalement inaccessibles; il existe donc un processus appartenant à $\mathscr{V}$, à trajectoires continues unique $\tilde{\gamma}_t$, tel que

$$\gamma_t=\sum_{s\leqq t}\Delta\beta_s\,I_{\{e\leqq 1+\Delta\beta_s\}}-\tilde{\gamma}_t$$

soit une martingale locale. Posons $\delta=\beta^d-\gamma$, δ est une martingale locale somme compensée de sauts, sans discontinuités communes avec γ, et $\alpha=\mathscr{E}(\beta^c)\,\mathscr{E}(\gamma)\,\mathscr{E}(\delta)$.

Posons maintenant

$$f_s(\omega)=\operatorname{Log}\left(1+\frac{\Delta\alpha_s(\omega)}{\alpha_{s-}(\omega)}\right)$$

$$h=f I_{\{f<1\}}$$

$$g=f I_{\{f\geqq 1\}};$$

f est un processus bien mesurable, et l'on a

$$h_s(\omega)=\operatorname{Log}(1+\Delta\delta_s(\omega)), \qquad 0<1+\Delta\delta_s(\omega)<e$$

$$g_s(\omega)=\operatorname{Log}(1+\Delta\gamma_s(\omega)), \qquad 0\leqq e<1+\Delta\gamma_s(\omega).$$

D'après les lemmes 1 et 2, α s'écrit donc sous la forme

$$\operatorname{Log}\alpha_t=(\beta_t^c-\tfrac{1}{2}\langle\beta^c,\beta^c\rangle_t)+(S_t^g-\tilde{S}_t^{\hat{g}})+(Q_t^{\bar{h}}-\tilde{S}_t^{\hat{\bar{h}}}).$$

Le cas des processus de Markov

Lorsque α_t est en plus une fonctionnelle multiplicative d'un processus de Hunt (X_t) à valeurs dans un bon espace E, Kunita et Watanabe apportent à cette formule les précisions suivantes, sur lesquelles nous n'insisterons pas

1) Le processus bien mesurable f_s est de la forme $f(X_{s-},X_s)$ où f est une fonction borélienne sur $E\times E$, nulle sur la diagonale.

2) Il est possible de calculer explicitement les processus compensés $\tilde{S}^{\hat{g}}$ et $\tilde{S}^{\hat{h}}$ au moyen du «système de Lévy» du processus.

Bibliographie

1. Doléans-Dade, C., Meyer, P.A.: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (à paraître).
2. Doob, J.L.: Stochastic processes. New York: J. Wiley and Sons 1953.
3. Ito, K., Watanabe, S.: Transformation of Markov processes by additive functionals. Ann. Inst. Fourier **15**, 13–30 (1965).
4. Kunita, H., Watanabe, S.: On square integrable martingales. Nagoya math. J. **30**, 209–246 (1967).
5. Maisonneuve, B.: Quelques martingales remarquables associées à une martingale continue. Ann. Inst. Henri Poincaré (à paraître).
6. Meyer, P. A.: Probabilités et Potentiel. Paris: Hermann 1966.
7. – On the multiplicative decomposition of positive supermartingales. Markov processes and potentiel theory, p. 103–116, ed. by J. Chover. New York-London: J. Wiley and Sons 1967.

C. Doléans-Dade
Université de Strasbourg
Département de Mathématique
7, Rue René Descartes
F-67 Strasbourg

(Reçu le 6 février, 1970)