Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
41, 241–262 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques application aux intégrales multiplicatives stochastiques

Michel Emery

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S.,
Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cédex

Introduction

La notion d'intégrale multiplicative stochastique a été introduite par McKean ([6]) pour construire des diffusions sur les groupes de Lie. Utilisée par Malliavin ([5]) dans l'étude, par des moyens probabilistes, de questions de géométrie différentielle, elle a été étudiée plus systématiquement par Ibero qui a donné dans [4] un sens aux intégrales multiplicatives de la forme

$$\prod_0^t \exp(H_s dB_s + L_s ds)$$

où B_t est un mouvement brownien à valeurs matricielles et exp l'exponentielle des matrices.

Notre motivation dans ce travail a été la définition d'intégrales stochastiques multiplicatives du type

$$\prod_0^t \exp(dM_s)$$

où M_t est une semimartingale à valeurs dans l'espace $L(d)$ des matrices carrées (d, d) (dans le cas scalaire, ceci vaut simplement e^{M_t} par suite de la commutativité du produit). Nous nous sommes en fait posé un problème plus général: étant donnée une application e de L(d) dans $L(d)$ suffisamment dérivable et telle que $e(\mathbf{0})=\mathbf{1}$, que nous écrivons $e(x)=\mathbf{1}+f(x)$, définir l'intégrale multiplicative stochastique

$$X_t=\prod_0^t e(dM_s)=\prod_0^t (\mathbf{1}+f(dM_s)).$$

Lorsque $f(x)=x$, X est l'exponentielle de C. Doléans-Dade matricielle, c'est-à-dire la solution de l'équation différentielle stochastique matricielle

0044-3719/78/0041/0241/$ 04.40

$$X_t = \mathbf{1} + \int_0^t X_{s-}\, dM_s,$$

solution que l'on peut noter $\mathscr{E}(M)$ comme dans le cas scalaire. Dans le cas général, il n'y a aucune difficulté à voir que X doit être égal à $\mathscr{E}(N)$, où N est une autre semimartingale que l'on peut noter symboliquement $N_t = \int_0^t f(dM_s)$. Mais le problème est de montrer que X_t est limite de produits de la forme $\prod e(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$, associés à des subdivisions (t_i) de $[0, t]$ dont le pas tend vers zéro. Pour y parvenir, nous interprèterons ces produits comme des solutions d'équations différentielles stochastiques du type récemment introduit par C. Doléans-Dade

$$X_t = H_t + \int_0^t FX_{s-}\, dM_s,$$

généralisé par Meyer au cas où $X \mapsto FX$ est une fonctionnelle lipschitzienne sur les processus càdlàg à valeurs dans $L(d)$. Nous prouverons pour ces équations un principe général de stabilité des solutions, qui constitue le résultat principal de ce travail (théorème 1); après quoi, l'application aux intégrales multiplicatives présente des difficultés d'ordre purement technique (théorème 2). Il faut noter que le même principe de stabilité entraîne la convergence de la méthode des différences finies pour les équations de C. Doléans-Dade usuelles.

I. Préliminaires

Notations

D'une manière générale, ce sont celles de [7]. Les processus considérés seront définis sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration continue à droite $(\mathscr{F}_t)$, où $\mathscr{F}_0$ contient tous les événements négligeables. Ils seront définis à indistinguabilité près et à valeurs dans l'espace $L(d)$ des matrices réelles carrées d'ordre d muni de la norme

$$|x| = d \sup_{ij} |x_{ij}|.$$

Les éléments nul et unité de $L(d)$ seront respectivement notés $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$. Les notions de processus à variation finie, de semimartingale, d'intégrale stochastique, de crochet de deux processus sont aisées à transposer au cas matriciel. Par exemple,

$$\left(\int X_s\, dM_s\right)_{ij} = \sum_k \int (X_{ik})_s\, d(M_{kj})_s;$$

$$[M, N]_{ij} = \sum_k [M_{ik}, N_{kj}].$$

Nous conviendrons que tous les processus càdlàg adaptés X admettent en 0 la limite à gauche $X_{0-} = \mathbf{0}$.

Etant donnés un processus càdlàg adapté X et un temps optionnel (i.e. un temps d'arrêt) T, on définit le processus arrêté à $T-$ par

$$X^{T-} = X\, I_{[\![0, T[\![} + X_{T-}\, I_{[\![T, \infty[\![};$$

ce processus càdlàg est nul sur $\{T=0\}$, conformément à la convention $X_{0-}=\mathbf{0}$. Si S et T sont deux temps optionnels tels que $S \leqq T$, et si X est un processus càdlàg adapté, on définit de nouveaux processus càdlàg adaptés par

$$\begin{aligned}\Delta_S X &= X^S - X^{S-} = (X - X^{S-})^S,\\ \Delta_{]\!]S,T]\!]} X &= X^T - X^S = (X - X^S)^T,\\ \Delta_{]\!]S,T[\![} X &= (X^{T-} - X^S)\, I_{\{S<T\}} = (X - X^S)^{T-}.\end{aligned}$$

L'arrêt avant T respecte l'intégration stochastique:

Lemme 1. *Si M est une semimartingale, et T un temps optionnel, M^{T-} est une semimartingale et, pour tout processus càdlàg adapté X,*

$$(X_- \cdot M)^{T-} = X_- \cdot (M^{T-}).$$

Démonstration. Cela résulte de $M^{T-} = M^T - \Delta_T M$. C.Q.F.D.

Les espaces $\mathscr{H}^p$ et $\mathscr{S}^p$.

Définitions. Pour tout processus càdlàg adapté scalaire X, on pose

$$X^*(\omega) = \operatorname*{Sup}_t |X_t(\omega)| \leqq \infty, \quad \text{et, pour } 1 \leqq p \leqq \infty,\ \|X\|_{\mathscr{S}^p} = \|X^*\|_{L^p}.$$

Après identification des processus indistinguables, l'ensemble $\mathscr{S}^p$ des processus càdlàg adaptés X tels que $\|X\|_{\mathscr{S}^p}$ est fini, est un espace de Banach.

Si N est une martingale locale et A un processus à variation finie scalaires, on pose, pour $1 \leqq p \leqq \infty$

$$j_p(N, A) = \|[N, N]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dA_s|\|_{L^p};$$

pour toute semimartingale M, on note $\|M\|_{\mathscr{H}^p}$ la borne inférieure de $j_p(N, A)$ sur l'ensemble des décompositions $N+A$ de M. Ceci définit une norme sur l'espace $\mathscr{H}^p$ des semimartingales telles que $\|M\|_{\mathscr{H}^p}$ soit fini.

Ces définitions, ainsi que les propriétés des espaces $\mathscr{H}^p$, ont été généralisées par Meyer ([9]).

Pour p fini, les inégalités de Burkholder et Davis ([7], p. 346) entraînent l'existence de constantes c_p telles que

$$\|M\|_{\mathscr{S}^p} \leqq c_p \|M\|_{\mathscr{H}^p}. \tag{1}$$

L'espace $\mathscr{H}^p$ est donc inclus dans l'espace $\mathscr{S}^p$, l'application identique de l'un dans l'autre étant continue.

Ces définition s'étendent sans peine au cas matriciel: l'espace $\mathscr{H}^p$ (resp. $\mathscr{S}^p$) de processus matriciels est l'espace des matrices dont les d^2 éléments sont dans l'espace scalaire correspondant, muni de la norme

$$\|X\|_{\mathscr{H}^p} = d \sup_{ij} \|X_{ij}\|_{\mathscr{H}^p} \ (\|X\|_{\mathscr{S}^p} = d \sup_{ij} \|X_{ij}\|_{\mathscr{S}^p}).$$

L'inégalité (1) subsiste, avec les mêmes constantes c_p.

Propriétés des espaces $\mathscr{H}^p$. L'intérêt de ces espaces est qu'ils permettent d'estimer des intégrales stochastiques:

Proposition 1. *Soient p, q, r dans $[1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Pour X dans $\mathscr{S}^p$ et M dans $\mathscr{H}^q$, l'intégrale stochastique $X_- \cdot M$ est dans $\mathscr{H}^r$, avec*

$$\|X_- \cdot M\|_{\mathscr{H}^r} \leqq \|X\|_{\mathscr{S}^p} \|M\|_{\mathscr{H}^q}. \tag{2}$$

Lorsque r est fini, on a de plus

$$\|X_- \cdot M\|_{\mathscr{S}^r} \leqq c_r \|X\|_{\mathscr{S}^p} \|M\|_{\mathscr{H}^q}. \tag{3}$$

Démonstration. Dans le cas scalaire, soit $m > \|M\|_{\mathscr{H}^q}$. Il existe une décomposition $N+A$ de M telle que $j_q(N, A) \leqq m$. La décomposition $X_- \cdot N + X_- \cdot A$ de $X_- \cdot M$ fournit

$$\begin{aligned}
\|X_- \cdot M\|_{\mathscr{H}^r} &\leqq \left\| \left(\int_0^\infty X_{s-}^2 \, d[N, N]_s \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |X_{s-}| \, |dA_s| \right\|_{L^r} \\
&\leqq \left\| X^* \left([N, N]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dA_s| \right) \right\|_{L^r} \\
&\leqq \|X^*\|_{L^p} \left\| [N, N]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dA_s| \right\|_{L^q} \\
&\leqq \|X\|_{\mathscr{S}^p} m,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (2) en dimension 1. Le cas matriciel en découle, et (3) résulte de (2) et (1). C.Q.F.D.

Découpages dans $\mathscr{H}^\infty$. Nous dirons qu'il existe des temps optionnels arbitrairement grands possédant une certaine propriété si l'on peut extraire de l'ensemble des temps optionnels possédant cette propriété une suite qui croît vers l'infini.

La méthode de C. Doléans-Dade pour résoudre certaines équations différentielles stochastiques consiste à découper les semimartingales en morceaux petits dans $\mathscr{H}^\infty$, d'où la définition suivante:

Définition. Soient α un réel strictement positif, M une semimartingale, $(T_0, \ldots, T_k)$ une suite FINIE croissante de temps optionnels telle que $T_0 = 0$. Nous dirons que cette suite découpe M en tranches plus petites que α si M est dans $\mathscr{H}^\infty$, $M = M^{T_k -}$, et, pour tout $i = 1, \ldots, k$,

$$\|\Delta_{]\!]T_{i-1}, T_i[\![} M\|_{\mathscr{H}^\infty} \leqq \alpha.$$

Si α est un réel strictement positif, nous dirons qu'une semimartingale M peut être découpée en tranches plus petites que α (et nous noterons $M \in D(\alpha)$) s'il existe une suite finie croissante $(T_0, \ldots, T_k)$ de temps optionnels telle que $T_0 = 0$ et qui découpe M en tranches plus petites que α.

Proposition 2. *Soit M une semimartingale.*

a) *Pour tout temps optionnel T,*

$$\|M^{T-}\|_{\mathscr{H}^\infty} \leqq 2\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}. \tag{4}$$

b) *Si $M \in D(\alpha)$ et si T est un temps optionnel, $M^{T-} \in D(2\alpha)$*

c) *Pour tout $\alpha > 0$, il existe des temps optionnels T arbitrairement grands, tels que M^{T-} soit bornée et dans $D(\alpha)$.*

Démonstration. a) Comme $\|M^T\|_{\mathscr{H}^\infty}$ et $\|\Delta_T M\|_{\mathscr{H}^\infty}$ sont majorés par $\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}$, l'inégalité (4) résulte de $M^{T-} = M^T - \Delta_T M$.

b) Si la suite $(T_0, \ldots, T_k)$ découpe M en tranches plus petites que α, la suite $(S_0, \ldots, S_k)$ définie par $S_i = T \wedge T_i$ découpe $N = M^{T-}$ en tranches telles que

$$\Delta_{\rrbracket S_{i-1}, S_i \llbracket} N = (\Delta_{\rrbracket T_{i-1}, T_i \llbracket} M)^{T-},$$

donc, d'après le a), plus petites que 2α.

c) Il s'agit de démontrer que, si M^n $(1 \leqq n \leqq n_0)$ est une suite finie de semimartingales scalaires et α un réel positif, il existe des temps optionnels T arbitrairement grands tels que les n_0 semimartingales $(M^n)^{T-}$ soient toutes dans $\mathscr{H}^\infty$, bornées, et découpées en tranches plus petites que α par une même suite finie de temps optionnels. Soient donc M^n des semimartingales scalaires et $\alpha = 8\beta$ un réel positif. Un théorème dû à Yen ([8]) dit que toute martingale locale est somme d'une martingale locale à sauts bornés par β et d'un processus à variation localement intégrable. On en déduit que chaque M^n est somme d'une martingale locale N^n à sauts bornés par β et d'un processus à variation finie A^n. On peut définir une suite de temps optionnels T_i par

$$T_0 = 0,$$

$$T_{i+1} = \inf\{t > T_i \colon \text{ il existe } n \text{ tel que } \int_{\rrbracket T_i, t \rrbracket} d[N^n, N^n]_s \geqq \beta^2 \text{ ou } \int_{\rrbracket T_i, t \rrbracket} |dA_s^n| \geqq \beta\}.$$

Fixons ω. Pour chaque i, l'une au moins des $2n_0$ inégalités suivantes est vérifiée:

$$\int_{\rrbracket T_i, T_{i+1} \rrbracket} d[N^n, N^n]_s \geqq \beta^2; \qquad \int_{\rrbracket T_i, T_{i+1} \rrbracket} |dA_s^n| \geqq \beta.$$

L'une au moins est vérifiée pour une infinité d'entiers i, ce qui entraîne que $T_i(\omega)$ tend vers l'infini.

En outre, la décomposition de $\Delta_{\rrbracket T_i, T_{i+1} \llbracket} M^n$ en la martingale locale $L = \Delta_{\rrbracket T_i, T_{i+1} \rrbracket} N^n$ et le processus à variation finie

$$B = \Delta_{\rrbracket T_i, T_{i+1} \llbracket} A^n - \Delta_{T_{i+1}} N^n I_{\{T_{i+1} > T_i\}}$$

fournit

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\rrbracket T_i, T_{i+1} \llbracket} M^n\|_{\mathscr{H}^\infty} &\leqq \left\| [L, L]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dB_s| \right\|_{L^\infty} \\ &\leqq (2\beta^2)^{\frac{1}{2}} + 2\beta < \alpha/2. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les temps optionnels S_i et R_i définis par

$$S_i = \inf\{t: \sum_{n \leqq n_0} (|M_t^n| + [N^n, N^n]_t + \int_{[0,t]} |dA_s|) \geqq i\},$$
$$R_i = S_i \wedge T_i.$$

Les semimartingales $(M^n)^{R_i-}$ sont, comme $(M^n)^{S_i-}$, dans $\mathscr{H}^\infty$ et bornées.

Elles sont découpées par la suite $T_0 \wedge S_i, T_1 \wedge S_i, \ldots, T_i \wedge S_i$ en tranches vérifiant

$$\Delta_{]\!]T_k \wedge S_i, T_{k+1} \wedge S_i[\![} M^n = (\Delta_{]\!]T_k, T_{k+1}[\![} M^n)^{S_i-},$$

donc plus petites que α. C.Q.F.D.

Avant de passer à l'étude de l'équation de C. Doléans-Dade, il reste à étudier la construction approchée d'une intégrale stochastique à l'aide de subdivisions de l'axe des temps.

Subdivisions

Définitions. Nous appellerons subdivision toute suite INFINIE croissante $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots)$ de temps optionnels telle que

$$t_0 = 0,$$
$$t_n \to \infty,$$
$$\sup_n (t_{n+1} - t_n) \quad \text{est borné.}$$

Le réel $|\sigma| = \|\sup_n (t_{n+1} - t_n)\|_{L^\infty}$ est appelé le pas de la subdivision.

Pour chaque subdivision σ, nous noterons J^σ l'opérateur qui, à tout processus càdlàg adapté X, fait correspondre le processus càdlàg adapté

$$J^\sigma X = \sum_{n \geqq 0} X_{t_n} I_{[\![t_n, t_{n+1}[\![}.$$

On convient de la notation $J^\sigma X_- = (J^\sigma X)_-$. Pour tout processus càdlàg adapté X, $J^\sigma X_-$ converge simplement vers X_- (il est en général faux que $J^\sigma X$ converge vers X) lorsque $|\sigma|$ tend vers zéro.

Nous allons préciser de quelle manière on peut approcher l'intégrale stochastique $X_- \cdot M$ par les sommes $\sum_n X_{t_n}(M_{t_{n+1}} - M_{t_n})$.

Lemme 2. *Soient p, q, et r tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, r étant fini, M une semimartingale de $\mathscr{H}^q$, et X^n une suite de processus de $\mathscr{S}^p$, dominée par le processus $Y \in \mathscr{S}^p$, et telle que $X_{t-}^n(\omega)$ converge, pour tout (t, ω), vers zéro quand n tend vers l'infini. Alors la suite $X_-^n \cdot M$ tend vers zéro dans $\mathscr{H}^r$.*

Démonstration. On se ramène sans difficulté au cas scalaire. Soit alors $N + A$ une décomposition de M telle que $j_p(N, A) < \infty$. On peut écrire la majoration

$$\|X_-^n \cdot M\|_{\mathscr{H}^r} \leqq j_r(X_-^n \cdot N, X_-^n \cdot A) \leqq \|Z^n\|_{L^r},$$

où les variables aléatoires Z_n, définies par

$$Z^n = \left(\int_0^\infty (X^n_{s-})^2 \, d[N,N]_s \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |X^n_{s-}| \, |dA_s|,$$

sont dominées dans L^r par $Y^* \left([N,N]^{\frac{1}{2}}_\infty + \int_0^\infty |dA_s| \right)$. Pour établir la convergence de Z^n vers zéro dans L^r, il suffit de vérifier la convergence p.s. Mais pour presque tout ω, les mesures sur $\mathbb{R}_+$ $d[N,N]_s(\omega)$ et $|dA_s|(\omega)$ sont finies et les fonctions $s \mapsto X^n_{s-}(\omega)$ dominées par $Y^*(\omega) < \infty$. Le théorème de Lebesgue permet de conclure. C.Q.F.D.

Proposition 3. *Soient X un processus càdlàg adapté et M une semimartingale.*

a) *Pour p, q et r dans $[1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ avec r fini, si X^σ* (resp. M^σ) *est une famille (indexée par l'ensemble des subdivisions) d'éléments de $\mathcal{S}^p$* (resp. $\mathcal{H}^q$) *qui converge dans cet espace vers X* (resp. M), *les processus $J^\sigma X^\sigma_- \cdot M^\sigma$ convergent dans $\mathcal{H}^r$ vers $X_- \cdot M$ (les convergences ayant lieu quand $|\sigma| \to 0$).*

b) *Si une suite finie $(T_0, \ldots, T_k)$ découpe M en tranches plus petites que α, elle découpe $X_- \cdot M$ et chacune des semimartingales $J^\sigma X_- \cdot M$ en tranches plus petites que $\alpha \|X\|_{\mathcal{S}^\infty}$.*

Démonstration. a) On écrit la décomposition

$$J^\sigma X^\sigma_- \cdot M^\sigma - X_- \cdot M = J^\sigma (X^\sigma - X)_- \cdot M^\sigma + J^\sigma X_- \cdot (M^\sigma - M) + (J^\sigma X - X)_- \cdot M.$$

Les deux premiers termes tendent vers zéro dans $\mathcal{H}^r$ grâce à la majoration

$$\|J^\sigma Y_- \cdot N\|_{\mathcal{H}^r} \leqq \|J^\sigma Y\|_{\mathcal{S}^p} \|N\|_{\mathcal{H}^q} \leqq \|Y\|_{\mathcal{S}^p} \|N\|_{\mathcal{H}^q};$$

le troisième également, grâce au lemme 2.

b) Puisque $\|J^\sigma X\|_{\mathcal{S}^\infty} \leqq \|X\|_{\mathcal{S}^\infty}$, il suffit de démontrer la propriété pour $X_- \cdot M$. Comme M, $X_- \cdot M$ est dans $\mathcal{H}^\infty$ (inégalité (2)) et arrêté à T_k- (lemme 1). Le lemme 1 donne aussi

$$\Delta_{]\!]T_i, T_{i+1}[\![}(X_- \cdot M) = X_- \cdot \Delta_{]\!]T_i, T_{i+1}[\![} M$$

et (inégalité (2)) les tranches de $X_- \cdot M$ sont plus petites que $\alpha \|X\|_{\mathcal{S}^\infty}$. C.Q.F.D.

Une conséquence du a) est le résultat selon lequel, si X est un processus càdlàg adapté et M une semimartingale, les semimartingales

$$J^\sigma X_- \cdot M = \sum_{n \geqq 0} X_{t_n} \Delta_{]\!]t_n, t_{n+1}]\!]} M$$

convergent uniformément sur tout compact en probabilité vers l'intégrale stochastique $X_- \cdot M$. Ce type de résultat sera étendu à des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le paragraphe II et aux intégrales multiplicatives stochastiques dans le paragraphe III.

II. L'équation de C. Doléans-Dade

Notations

On s'intéresse à l'équation différentielle stochastique scalaire ou matricielle

$$X = H + FX_- \cdot M \tag{5}$$

où l'inconnue X est à chercher parmi les processus càdlàg adaptés, scalaires ou matriciels, et où les données sont

un processus càdlàg adapté H,

une semimartingale M,

et une application $X \mapsto FX$ (l'écriture FX_- représente $(FX)_-$) de l'ensemble des processus càdlàg adaptés dans lui-même, non nécessairement linéaire, mais telle que

$$\text{pour tout temps optionnel } T,\ X^{T-} = Y^{T-} \Rightarrow (FX)^{T-} = (FY)^{T-}; \tag{6}$$

$$(FX - FY)^* \leqq a(X - Y)^*, \text{ pour une certaine constante } a. \tag{7}$$

On note $\mathrm{Lip}(a)$ l'ensemble des applications F qui vérifient (6) et (7). Bien que C. Doléans-Dade n'ait traité dans [2] et [3] que le cas où FX est de la forme $f(t, \omega, X_t(\omega))$, où f satisfait à des conditions convenables, Meyer nous a fait observer qu'elle n'utilisait en réalité que les propriétés (6) et (7). Cette généralisation sera mise à profit dans le cas où F est l'un des opérateurs J^σ introduits plus haut. D'autres opérateurs, tels que $X \mapsto U \cdot X$ où U est prévisible et $X \mapsto [X, X]^{\frac{1}{2}}$, définis sur des espaces de semimartingales, satisfont à (6) et à des inégalités analogues à (8); ils permettent de poser d'autres problèmes d'équations différentielles, dans des espaces de semimartingales.

En notant $\mathbf{0}$ le processus identiquement nul, (7) entraîne, pour $F \in \mathrm{Lip}(a)$ et $1 \leqq p \leqq \infty$

$$\|FX - FY\|_{\mathscr{S}^p} \leqq a \|X - Y\|_{\mathscr{S}^p} \tag{8}$$

en sorte que F définit une application a-lipschitzienne de $\mathscr{S}^p$ dans lui-même si et seulement si $F\mathbf{0}$ est dans $\mathscr{S}^p$. Nous utiliserons également l'inégalité

$$\|FX^{T-}\|_{\mathscr{S}^p} = \|F(X^{T-})^{T-}\|_{\mathscr{S}^p} \leqq \|F(X^{T-})\|_{\mathscr{S}^p} \leqq \|F\mathbf{0}\|_{\mathscr{S}^p} + a\|X^{T-}\|_{\mathscr{S}^p}. \tag{9}$$

Resolution de l'equation dans $\mathscr{S}^p$. Le cas ou M est dans $D(\alpha)$, α petit.

On fixe un p dans $[1, \infty[$. Rappelons l'inégalité

$$\|X_- \cdot M\|_{\mathscr{S}^p} \leqq c_p \|X\|_{\mathscr{S}^p} \|M\|_{\mathscr{H}^\infty}.$$

Lemme 3. *Soient $H \in \mathscr{S}^p$, $F \in \mathrm{Lip}(a)$ avec $F\mathbf{0} = \mathbf{0}$, et $M \in \mathscr{H}^\infty$ tel que*

$$\|M\|_{\mathscr{H}^\infty} \leqq 1/2\, a\, c_p.$$

L'équation (5) *admet alors dans $\mathscr{S}^p$ une solution et une seule. Celle-ci vérifie*

$$\|X\|_{\mathscr{S}^p} \leqq 2\|H\|_{\mathscr{S}^p}.$$

Démonstration. L'application $X \mapsto GX = H + FX_- \cdot M$ est telle que $G\mathbf{0} = H$, et que

$$\begin{aligned}\|GX - GY\|_{\mathscr{S}^p} &= \|(FX - FY)_- \cdot M\|_{\mathscr{S}^p} \\ &\leqq c_p \|FX - FY\|_{\mathscr{S}^p} \|M\|_{\mathscr{H}^\infty} \leqq \tfrac{1}{2} \|X - Y\|_{\mathscr{S}^p}.\end{aligned}$$

C'est donc une application $\frac{1}{2}$-lipschitzienne de $\mathscr{S}^p$ dans lui-même, et elle y admet un unique point fixe, qui vérifie

$$\|X\|_{\mathscr{S}^p} \leqq 2 \|G\mathbf{0}\|_{\mathscr{S}^p} = 2 \|H\|_{\mathscr{H}^p}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme 4. *Soient H dans $\mathscr{S}^p$ de norme h, M dans $\mathscr{H}^\infty$ de norme m, F dans* Lip(a) *telle que $F\mathbf{0} = \mathbf{0}$, et S et T deux temps optionnels tels que $S \leqq T$ et*

$$\|\Delta_{]\!]S, T[\![} M\|_{\mathscr{H}^\infty} \leqq 1/2\, a\, c_p.$$

Alors, si l'équation

$$X = H^{S-} + FX_- \cdot M^{S-}$$

admet, dans $\mathscr{S}^p$, une solution et une seule, X, de norme x, il en va de même de l'équation

$$Y = H^{T-} + FY_- \cdot M^{T-},$$

et la norme y de sa solution est majorée par

$$y \leqq 8\, h + 2(1 + a\, m)\, x.$$

Démonstration. Considérons l'équation

$$Z = H^S + FZ_- \cdot M^S$$

où l'inconnue Z est cherchée dans $\mathscr{S}^p$. Pour tout processus Z, FZ et $F(Z^{S-})$ coïncident sur $[\![0, S[\![$, donc l'équation équivaut au système

$$\begin{cases} Z = Z^S, \\ Z^{S-} = H^{S-} + F(Z^{S-}) \cdot M^{S-}, \\ \Delta_S Z = \Delta_S H + F(Z^{S-})\, \Delta_S M, \end{cases}$$

qui, puisque $X = X^{S-}$, admet pour solution unique dans $\mathscr{S}^p$

$$Z = X + \Delta_S H + FX_{S-}\, \Delta_S M.$$

De $|FX_{S-}\, \Delta M_S| \leqq |FX_{S-}|\, |\Delta M_S|$, on déduit alors

$$z = \|Z\|_{\mathscr{S}^p} \leqq x + 2h + a\, x\, m.$$

Maintenant, l'équation en Y équivaut au système

$$\begin{cases} Y = H^{T-} + FY_- \cdot M^{T-}, \\ Y^{S-} = X. \end{cases}$$

Si l'on introduit $G \in \mathrm{Lip}(a)$ par $G = F(\cdot + Z^{T-}) - F(Z^{T-})$, le changement de variable $D = Y - Z^{T-}$ fournit un nouveau système équivalent au précédent:

$$\begin{cases} D = H^{T-} - Z^{T-} + FZ_- \cdot M^{T-} + GD_- \cdot M^{T-}, \\ D^{S-} = \mathbf{0} \end{cases}$$

qui, à son tour équivaut à

$$\begin{cases} D = H^{T-} - (H^S)^{T-} + FZ_- \cdot (M^{T-} - M^S) + GD_- \cdot M^{T-}, \\ D^{S-} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ou, comme $G\mathbf{0} = \mathbf{0}$, à

$$\begin{cases} D = \Delta_{]\!]S,T[\![} H + FZ_- \cdot \Delta_{]\!]S,T[\![} M + GD_- \cdot \Delta_{]\!]S,T[\![} M, \\ D^{S-} = \mathbf{0} \end{cases}$$

dans lequel la seconde équation est conséquence de la première. On est ramené à une équation en D qui ressort du lemme 3: elle admet dans $\mathscr{S}^p$ une solution unique, dont la norme est majorée par

$$2(2h + c_p a z \, 1/2 a c_p) = 4h + z.$$

Revenant à l'inconnue Y, on en déduit le résultat annoncé. C.Q.F.D.

Lemme 5. *Soient $H \in \mathscr{S}^p$, $F \in \mathrm{Lip}(a)$ tel que $F\mathbf{0} = \mathbf{0}$, et M une semimartingale découpée par une suite $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que $1/2 a c_p$. L'équation (5) admet alors dans $\mathscr{S}^p$ une solution X et une seule; X vérifie*

$$\|X\|_{\mathscr{S}^p} \leqq b \|H\|_{\mathscr{S}^p} \tag{10}$$

où b ne dépend des données que par l'intermédiaire de a, k et $\|M\|_{\mathscr{H}^\infty}$.

Démonstration. Appelons h et m les normes respectives de H et M dans $\mathscr{S}^p$ et $\mathscr{H}^\infty$. Le lemme 4 permet de vérifier par récurrence sur i (variant de 0 à k) que l'équation en Z

$$Z = H^{T_i-} + FZ_- \cdot M^{T_i-}$$

admet, dans $\mathscr{S}^p$, une solution et une seule, X^i, dont la norme x^i vérifie

$$x^0 = 0; \qquad x^{i+1} \leqq 8h + 2(1 + am)\, x^i,$$

On en déduit

$$x^k \leqq 8 \frac{(2 + 2am)^k - 1}{1 + 2am} h.$$

La semimartingale M étant arrêtée à $T_k -$, l'équation (5) est équivalente au système

$$\begin{cases} X^{T_k-} = H^{T_k-} + FX_- \cdot M, \\ X - X^{T_k-} = H - H^{T_k-} \end{cases}$$

qui admet une solution unique dans $\mathcal{S}^p$: c'est

$$X = X^k + H - H^{T_k -},$$

dont la norme est majorée par $2h + x^k$. D'où le résultat, avec

$$b = 2 + 8\frac{(2+2am)^k - 1}{1+2am}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

L'estimation (10) permet d'étudier la continuité de la solution par rapport aux données H et F:

Proposition 4. *Soient H dans $\mathcal{S}^p$, F dans* Lip(a) *tel que $F\mathbf{0} \in \mathcal{S}^p$, et M dans $D(1/2\,a\,c_p)$.*

a) *L'équation* (5) *admet dans $\mathcal{S}^p$ une solution X et une seule.*

b) *Si H^n est une suite convergeant vers H dans $\mathcal{S}^p$ et F^n une suite dans* Lip(a) *telle que $F^n\mathbf{0}$ soit dans $\mathcal{S}^p$ pour tout n et que $F^n X_- \cdot M$ tende vers $FX_- \cdot M$ dans $\mathcal{S}^p$, la solution X^n de l'équation*

$$Z = H^n + F^n Z_- \cdot M$$

converge vers X dans $\mathcal{S}^p$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration. L'énoncé a) ne fait que répéter le lemme 5. Pour le b), définissons les suites K^n dans $\mathcal{S}^p$ et G^n dans Lip(a) par

$$K^n = H - H^n + (FX - F^n X)_- \cdot M,$$
$$G^n Y = F^n X - F^n(X - Y).$$

Alors $X - X^n$ vérifie l'égalité

$$X - X^n = K^n + (G^n(X - X^n))_- \cdot M,$$

et la majoration (10) fournit, puisque $G^n\mathbf{0} = \mathbf{0}$,

$$\|X - X^n\|_{\mathcal{S}^p} \leq b\,\|K^n\|_{\mathcal{S}^p}$$

où la quantité b ne dépend pas de n. On déduit que $X - X^n$, comme K^n, tend vers zéro dans $\mathcal{S}^p$. C.Q.F.D.

Remarque. Il est vain d'espérer obtenir le même résultat en remplaçant l'hypothèse $M \in D(1/2\,a\,c_p)$ par l'hypothèse plus faible $M \in \mathcal{H}^\infty$. Meyer a donné le contre-exemple suivant dans le cas scalaire:

On prend T totalement inaccessible et partout fini, et $A = I_{[\![T,\infty[\![}$. On pose $M = \tilde{A} - A$, en sorte que M est une martingale qui, puisque $[M, M] = A$, est dans $\mathcal{H}^\infty$. Malgré cela, la solution

$$X = e^{\tilde{A}} I_{[\![0,T[\![}$$

de l'équation différentielle stochastique exponentielle

$$X = 1 + X_- \cdot M$$

n'est dans aucun $\mathscr{S}^p$ (X étant une martingale locale, si l'on avait $X^* \in L^p$, X serait une martingale uniformément intégrable nulle à l'infini, et devrait donc être identiquement nulle).

Proposition 5. *Soient H dans $\mathscr{S}^p$, M dans $D(1/2\,a\,c_p)$, et F dans* Lip(a) *telle que $F\mathbf{0} \in \mathscr{S}^p$, et que, pour tous processus càdlàg adaptés Y et Z,*

$$|FY - FZ| \leqq a|Y - Z|. \tag{11}$$

Les processus X^σ de $\mathscr{S}^p$, définis pour chaque subdivision σ par l'équation

$$Z = H + J^\sigma F J^\sigma Z_- \cdot M$$

convergent alors dans $\mathscr{S}^p$ vers la solution X de (5) *quand $|\sigma|$ tend vers zéro.*

Remarque. Cette proposition donne une méthode de résolution approchée de (5) par différences finies. Pour chaque subdivision $\sigma = (t_0, \ldots, t_n, \ldots)$, la suite des variables aléatoires $X^\sigma_{t_n}$ vérifie en effet les relations

$$X^\sigma_0 = H_0,$$
$$X^\sigma_{t_{n+1}} = X^\sigma_{t_n} + H_{t_{n+1}} - H_{t_n} + F(J^\sigma X^\sigma)_{t_n}(M_{t_{n+1}} - M_{t_n}),$$

qui en permettent le calcul de proche en proche.

Démonstration. On applique la proposition 4b. Comme J^σ est dans Lip(1) avec $J^\sigma \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $F^\sigma = J^\sigma F J^\sigma$ est dans Lip(a) et envoie $\mathscr{S}^p$ dans lui-même. Il reste à vérifier que $F^\sigma X_- \cdot M$ converge vers $FX_- \cdot M$ dans $\mathscr{S}^p$.

Fixons (t, ω) tel que $t \neq 0$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, sur $[t - 2\delta, t[$, on ait $|X_\cdot(\omega) - X_{t-}(\omega)| < \varepsilon$. Pour $|\sigma| < \delta$, on a alors sur $[t-\delta, t[\,|J^\sigma X_\cdot(\omega) - X_\cdot(\omega)| < 2\varepsilon$, puis $|FJ^\sigma X_\cdot(\omega) - FX_\cdot(\omega)| < 2a\varepsilon$. On en déduit que $J^\sigma(FJ^\sigma X - FX)_{t-}(\omega)$ tend vers zéro, et que, de même que $J^\sigma FX_-$, $F^\sigma X_-$ converge simplement vers FX_-.

D'autre part, la majoration

$$|J^\sigma F J^\sigma X| \leqq (FJ^\sigma X)^* \leqq (F\mathbf{0})^* + a(J^\sigma X)^* \leqq (F\mathbf{0})^* + aX^*$$

est indépendante de σ. La convergence de $F^\sigma X_- \cdot M$ vers $FX_- \cdot M$ résulte alors du lemme 2. C.Q.F.D.

Résolution dans le cas général

La proposition 2 permet d'obtenir des résultats de convergence dans le cas où M n'est pas dans $D(\alpha)$.

Définitions. Nous dirons qu'une suite X^n de processus converge localement dans $\mathscr{S}^p$ (resp. $\mathscr{H}^p$) vers un processus X s'il existe des temps optionnels arbitrairegrands T tels que

a) X^{T-} et, pour tout n, $(X^n)^{T-}$ sont dans $\mathscr{S}^p$ (resp. $\mathscr{H}^p$).
b) La suite $(X^n - X)^{T-}$ tend vers zéro dans $\mathscr{S}^p$ (resp. $\mathscr{H}^p$).

Contrairement à l'usage, le mot «localement» se rapporte ici à des arrêts à $T-$ (et non à T).

Nous munirons l'espace des processus càdlàg adaptés de la topologie de la converge uniforme sur tout compact en probabilité, qui peut être définie par la distance

$$d(Y, Z) = \sum_{n \geqq 0} 2^{-n} \mathbb{E}[1 \wedge (Y^n - Z^n)^*]$$

où Y_t^n et Z_t^n désignent les processus $Y_{t \wedge n}$ et $Z_{t \wedge n}$; une suite X^n converge vers X pour cette topologie si et seulement si il existe des temps optionnels arbitrairement grands T tels que les variables aléatoires

$$[(X^n - X)^{T-}]^* = \operatorname*{Sup}_t |(X^n - X)^{T-}|_t$$

tendent vers zéro en probabilité.

Nous pouvons maintenant énoncer sous forme globale la stabilité des solutions d'équations différentielles. Le point a) du théorème ci-dessous est l'extension du résultat de C. Doléans-Dade. Le point d) voit son hypothèse automatiquement satisfaite lorsque F est du type considéré par C. Doléans-Dade.

Théorème 1. *Soient H un processus càdlàg adapté, F un élément de* Lip(a) *et M une semimartingale.*

a) *L'équation* (5) *admet une solution X et une seule dans l'espace des processus càdlàg adaptés.*

b) *Soit $1 \leqq p < \infty$. Si H^n est une suite de processus càdlàg adaptés qui converge vers H localement*[1] *dans $\mathscr{S}^p$, et si F^n est une suite d'éléments de* Lip(a) *telle que $F^n X_- \cdot M$ converge vers $FX_- \cdot M$ localement*[1] *dans $\mathscr{S}^p$, alors la solution X^n de*

$$Z = H^n + F^n Z_- \cdot M$$

converge vers X localement[1] *dans $\mathscr{S}^p$.*

c) *Si H^n est une suite de processus càdlàg adaptés et F^n une suite dans* Lip(a) *telles que H^n et $F^n X_- \cdot M$ convergent respectivement vers H et $FX_- \cdot M$ uniformément sur tout compact en probabilité, alors la solution X^n de*

$$Z = H^n + F^n Z_- \cdot M$$

converge vers X uniformément sur tout compact en probabilité.

d) *Si F satisfait à l'hypothèse* (11) *de la proposition* 5, *les processus X^σ définis, pour chaque subdivision σ, comme la solution de l'équation*

$$Z = H + J^\sigma F J^\sigma Z_- \cdot M$$

convergent vers X uniformément sur tout compact en probabilité quand le pas de σ tend vers zéro.

Remarques. Si t est un temps fini, la convergence obtenue en d) a lieu dans $\mathscr{S}^p$ jusqu'à $T-$ pour des temps optionnels T tels que $\mathbb{P}(\{T < t\}) \to 0$. Ceci s'étend au cas $t = \infty$, à condition de considérer des semimartingales jusqu'à l'infini et des processus càdlàg adaptés jusqu'à l'infini.

[1] Répétons que le mot localement est ici relatif à des arrêts à $T-$

Le théorème est énoncé en termes de matrices carrées. Des résultats analogues concernant les matrices rectangulaires (et en particulier les vecteurs-lignes et les vecteurs-colonnes) s'en déduisent en les rendant carrées par adjonction de zéros.

Démonstration. a) Choisissons un p fini. D'après la proposition 2, il existe des temps optionnels T_n qui croissent vers l'infini tels que $M^{T_n-} \in D(1/4\,a\,c_p)$, $H^{T_n-} \in \mathscr{S}^p$, et $(F\mathbf{0})^{T_n-} \in \mathscr{S}^p$. Posons $G^n Z = F(Z^{T_n-})$. La proposition 4 permet de résoudre chacune des équations

$$Z = H^{T_n-} + G^n Z_- \cdot M^{T_n-}$$

dans $\mathscr{S}^p$. Soient X^n les solutions obtenues. Comme $(X^{n+1})^{T_n-} = X^n$, il existe un processus càdlàg adapté X tel que, pour tout n, $X^{T_n-} = X^n$. Si S est le temps optionnel

$$S = \inf\{t\colon |X - H - FX_- \cdot M|_t \geqq \varepsilon\},$$

on doit avoir, pour chaque n, $S \geqq T_n$; ε étant arbitraire, X est une solution de l'équation (5).

Si Y est une autre solution, il existe des temps optionnels R arbitrairement grands tels que Y^{R-} et X^{R-} soient dans $\mathscr{S}^p$. Pour chacun d'entre eux, $M^{(T_n \wedge R)-}$ est dans $D(1/2\,a\,c_p)$ (proposition 2a). L'équation arrêtée à $(R \wedge T_n)-$ n'ayant qu'une solution dans $\mathscr{S}^p$, on en déduit $(Y - X)^{(R \wedge T_n)-} = \mathbf{0}$, puis l'unicité.

b) C'est une conséquence de la proposition 4b. Le seul point délicat est l'existence de temps optionnels T arbitrairement grands tels que les processus $(F^n \mathbf{0})^{T-}$ soient dans $\mathscr{S}^p$. En fait, Dellacherie ([1]) a démontré que ceci est vrai même pour p infini: si (Y^n) est une suite de processus càdlàg adaptés, et si t et ε sont deux réels strictement positifs, soient

$$T_k^n = \inf\{t \geqq 0\colon |Y_t^k| \geqq n\},$$
$$n(k) = \inf\{n \geqq 0\colon \mathbb{P}(\{T_k^n < t\}) \leqq \varepsilon 2^{-k}\}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli entraîne alors l'existence d'un entier l tel que, pour tout $k > l$, $T_k^{n(k)} \geqq t$ p.s.; le temps optionnel

$$T = T_1^{n(1)} \wedge T_2^{n(2)} \wedge \cdots \wedge T_l^{n(l)} \wedge t$$

est alors tel que $\mathbb{P}(\{T < t\}) < \varepsilon$ et que, pour tout n, $(Y^n)^{T-}$ soit borné.

c) C'est une conséquence du point b ci-dessus et de la proposition 6 suivante, qui établit un lien entre convergence localement dans $\mathscr{S}^p$ et convergence uniformément sur tout compact en probabilité.

d) Ce résultat découle immédiatement de la proposition 5 par arrêt à $T-$, ou T est un temps optionnel arbitrairement grand. C.Q.F.D.

Proposition 6. *Soit* $1 \leqq p < \infty$. *Pour qu'une suite* $(X^n, n \in \mathbb{N})$ *de processus càdlàg adaptés converge vers* X *uniformément sur tout compact en probabilité, il faut et il suffit que, de toute sous-suite, on puisse extraire une sous-sous-suite qui converge vers* X *localement dans* $\mathscr{S}^p$.

Démonstration. Par arrêt à $T-$, où T est arbitrairement grand, on se ramène au cas où X est dans $\mathscr{S}^p$; on peut donc supposer $X = \mathbf{0}$.

La condition est suffisante: si $(X^n, n \in \mathbb{N})$ ne converge pas vers zéro pour une distance d associée à la convergence uniforme sur tout compact en probabilité, on peut en extraire une sous-suite $(X^n, n \in \mathbb{N}')$ telle que $\inf_{n \in \mathbb{N}'} d(X^n, \mathbf{0}) > 0$. Aucune sous-sous-suite $(X^n, n \in \mathbb{N}'')$ ne peut donc converger vers zéro pour d, ni a fortiori localement dans $\mathscr{S}^p$.

La condition est nécessaire: il s'agit de démontrer que de toute suite $(X^n, n \in \mathbb{N})$ convergeant vers zéro pour d, on peut extraire une sous-suite $(X^n, n \in \mathbb{N}')$ qui converge vers zéro localement dans $\mathscr{S}^p$. Construisons par récurrence une suite décroissante $(\mathbb{N}_k)$ de parties infinies de $\mathbb{N}$, telles que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}_k}} \sup_{0 \leq s \leq k} |X_s^n| = \mathbf{0} \text{ p.s.}$$

Le procédé diagonal de Cantor fournit une partie infinie $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier k,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}'}} \sup_{0 \leq s \leq k} |X_s^n| = \mathbf{0} \text{ p.s.}$$

Quitte à remplacer $(X^n, n \in \mathbb{N})$ par la sous-suite $(X^n, n \in \mathbb{N}')$, on peut supposer que X^n tend vers zéro uniformément sur tout compact presque sûrement.

Définissons maintenant des temps optionnels S_n et T_n par

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t^n| \geq 1\}; \qquad S_n = \inf_{m \geq n} T_m.$$

Les temps S_n croissent vers l'infini. En effet, k étant fixé, il existe, pour presque tout ω, un entier $N(\omega)$ tel que pour $n \geq N(\omega)$, $\sup_{[0,k]} |X_s^n| < 1$, donc $T_n \geq k$; on en déduit que $S_{N(\omega)}(\omega) \geq k$.

Enfin, pour chaque n, la suite de processus

$$Y^m = (X^m)^{(S_n \wedge n)-}$$

converge vers zéro dans $\mathscr{S}^p$ puisque

$$(Y^m)^* \leq \sup_{0 \leq s \leq n} |X_s^m| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \text{ p.s.},$$

la convergence étant dominée par

$$(Y^m)^* \leq \sup_{0 \leq s < S_n} |X_s^m| \leq \sup_{0 \leq s < T_m} |X_s^m| \leq 1. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Un exemple: l'équation exponentielle

Un cas particulier de l'équation (5) est l'équation différentielle stochastique exponentielle. Comme dans le cas scalaire, on appelle exponentielle de la semimartingale M (et l'on note $\mathscr{E}(M)$) la solution de l'équation

$$X_t = \mathbf{1} + M_0 + \int_{]0,t]} X_{s-} \, dM_s$$

où $\mathbf{1}$ désigne la matrice unité. Le théorème 1 va nous fournir deux types de solutions approchées de cette équation.

Soit M une semimartingale. Définissons comme dans [7], p. 318 les puissances symboliques de M par

$$P^0=\mathbf{1};\quad P^1=M=M_0+P^0_-\cdot M;\quad p^{n+1}=P^n_-\cdot M\qquad \text{pour } n\geqq 1.$$

Proposition 7. *Pour tout* $p\in[1,\infty[$, *la série* $\sum_{n\geqq 0} P^n$ *converge localement dans* $\mathscr{S}^p$; *sa somme est l'exponentielle* $\mathscr{E}(M)$.

Démonstration. Posons $S^n=P^0+\dots+P^n$; S^n est solution de l'équation

$$Z=\mathbf{1}+M_0-P^{n+1}+Z_-\cdot M.$$

Si nous démontrons que P^n tend vers zéro localement dans $\mathscr{S}^p$, le théorème 1b) permettra de conclure. Soit $\alpha<1/3c_p$. Il suffit de démontrer que si M est dans $D(\alpha)$, P^n tend vers zéro dans $\mathscr{S}^p$. Soit donc $(T_0,\dots,T_k)$ une suite qui découpe M en tranches plus petites que α. Posons

$$m=\|M\|_{\mathscr{H}^\infty};\qquad p_i^n=\|(P^n)^{T_i-}\|_{\mathscr{S}^p},$$

en sorte que $p_k^n=\|P^n\|_{\mathscr{S}^p}$. Pour tout couple n,i tel que $i<k$, on a

$$\begin{aligned}\|(P^n)^{T_i}\|_{\mathscr{S}^p}&\leqq p_i^n+\|\Delta_{T_i}P^n\|_{\mathscr{S}^p}\leqq p_i^n+p_i^{n-1}m,\\ \|(P^n)^{T_{i+1}-}\|_{\mathscr{S}^p}&\leqq\|(P^n)^{T_i}\|_{\mathscr{S}^p}+\|\Delta_{]\!]T_i,T_{i+1}[\![}P^n\|_{\mathscr{S}^p},\\ p_{i+1}^n&\leqq p_i^n+p_i^{n-1}m+c_p\,p_{i+1}^{n-1}\alpha.\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur n que, pour $i=0,1,\dots k$,

$$p_i^n\leqq c\,3^{n+2i}m^i(\alpha c_p)^{n-i}$$

où la constante c est choisie telle que ce soit vrai pour $n=1$. Comme $3\alpha c_p<1$, $p_k^n=\|P^n\|_{\mathscr{S}^p}$ tend vers zéro. C.Q.F.D.

Une autre solution approchée de l'équation exponentielle est donnée par la méthode des différences finies. Les processus X^σ qui, d'après le théorème 1d approchent l'exponentielle $\mathscr{E}(M)$ sont ceux définis par les relations

$$\begin{aligned}X_0^\sigma&=\mathbf{1}+M_0,\\ X_{t_{n+1}}^\sigma&=X_{t_n}^\sigma+X_{t_n}^\sigma(M_{t_{n+1}}-M_{t_n})\end{aligned}$$

et, pour tout $t_n<t<t_{n+1}$,

$$X_t^\sigma=X_{t_n}^\sigma+X_{t_n}^\sigma(M_t-M_{t_n});$$

c'est-à-dire

$$X_t^\sigma=(\mathbf{1}+M_0)(\mathbf{1}+M_{t_1}-M_0)\dots(\mathbf{1}+M_{t_n}-M_{t_{n-1}})(\mathbf{1}+M_t-M_{t_n}).\tag{12}$$

La notion d'intégrale multiplicative stochastique nous permettra de généraliser la formule (12) à d'autres fonctions que la fonction $\mathbf{1}+x$.

III. Intégrales multiplicatives stochastiques

Approche intuitive

Etant donnée une application $e=\mathbf{1}+f$ de $L(d)$ dans lui-même telle que $e(\mathbf{0})=\mathbf{1}$, le but de ce paragraphe est de définir l'intégrale multiplicative $X_t=\prod_0^t e(dM_s)$. Par analogie avec la formule (12), nous cherchons un X qui, si cela avait un sens, devrait vérifier les relations

$$X_0=e(M_0); \qquad X_t=X_{t-}\, f(dM_t),$$

c'est-à-dire $X=\mathscr{E}(N)$, où N est une semimartingale telle que $dN_t=f(dM_t)$ ou encore que

$$\begin{aligned}&\Delta N_t=f(\Delta M_t),\\ &dN_t=f'(\mathbf{0})\, dM_t+f''(\mathbf{0})\, d[M,M]_t \text{ hors des sauts.}\end{aligned}$$

Il reste à donner un sens à ceci.

Définition rigoureuse de N

Dans la suite, e désignera une fonction C^2 de $L(d)$ dans $L(d)$ telle que $e(\mathbf{0})=\mathbf{1}$. On notera f la fonction $e-\mathbf{1}$, et g le reste du développement limité à l'ordre 2 de e et f au voisinage de zéro:

$$g(x)=f(x)-\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} f(\mathbf{0})\, x_{ij}-\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{kl}} f(\mathbf{0})\, x_{ij}x_{kl},$$

où $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ désigne la dérivation par rapport à la coordonnée d'indices i et j. La fonction g est C^2, et nulle en $\mathbf{0}$ ainsi que ses dérivées premières et secondes.

Pour toute semimartingale M, on peut alors construire une semimartingale N, notée $N_t=\int_0^t f(dM_s)$, par

$$N=\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} f(\mathbf{0})\, M_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{kl}} f(\mathbf{0})\,[M_{ij}, M_{kl}]+\sum_{s\geq 0} g(\Delta_s M). \tag{13}$$

En effet, la série $\sum_{0\leq s\leq t}|g(\Delta M_s(\omega))|$ converge puisque les sauts $|\Delta M_s(\omega)|$ supérieurs à 1 sont en nombre fini sur l'intervalle $[0,t]$ et que, pour $|x|\leq 1$, $|g(x)|\leq C|x^2|$.

La construction (13) entraîne que pour tout temps optionnel T,

$$N_t^{T-}=\int_0^t f(d(M^{T-})\, s).$$

Approximation de N

Pour toute subdivision $\sigma=(t_0, \ldots, t_n, \ldots)$, on note δ_n l'opérateur qui vaut $\Delta_{]\!]t_{n-1}, t_n]\!]}$ pour $n>0$, Δ_0 pour $n=0$, et on définit

$$N^\sigma=\sum_n f(\delta_n M). \tag{14}$$

Comme celle de N, la construction de N^σ commute avec l'arrêt à $T-$. Nous allons montrer que N^σ approche N.

Lemme 6. *Avec les notations ci-dessus, et en posant $M^\sigma=M-J^\sigma M$, on a $N-N^\sigma=D_1-D_2-D_3$, où*

$$D_1=\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{kl}} f(\mathbf{0})\,([M_{ij}, M_{kl}]-\sum_{n\geqq 0}(\delta_n M_{ij})(\delta_n M_{kl})),$$

$$D_2=\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} g\circ M_-^\sigma\cdot M_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}\partial x_{kl}} g\circ M_-^\sigma\cdot\langle M_{ij}^c, M_{kl}^c\rangle,$$

$$D_3=\sum_{0\leqq s\leqq .}\left[g(M_{s-}^\sigma+\Delta M_s)-g(M_{s-}^\sigma)-g(\Delta M_s)-\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} g\circ M_{s-}^\sigma\,\Delta(M_{ij})_s\right].$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous nous restreindrons au cas unidimensionnel. Lorsqu'on retranche à N défini par (13) le processus

$$N^\sigma=\sum_n (f'(0)\,\delta_n M+\tfrac{1}{2} f''(0)\,(\delta_n M)^2+g(\delta_n M)),$$

les termes en $f'(0)$ s'annulent et les termes en $f''(0)$ donnent D_1. Il reste à montrer que $\sum_n g(\delta_n M)-\sum_s g(\Delta_s M)=D_2+D_3$.

Pour $t_{n-1}<t\leqq t_n$, la formule du changement de variable s'écrit

$$\begin{aligned}g(M_t-M_{t_{n-1}})= & \int_{]\!]t_{n-1}, t]\!]} g'(M_{s-}-M_{t_{n-1}})\,dM_s\\ & +\tfrac{1}{2}\int_{]\!]t_{n-1}, t]\!]} g''(M_{s-}-M_{t_{n-1}})\,d\langle M^c, M^c\rangle_s\\ & +\sum_{t_{n-1}<s\leqq t}(g(M_s-M_{t_{n-1}})-g(M_{s-}-M_{t_{n-1}})\\ & \qquad -g'(M_{s-}-M_{t_{n-1}})\,\Delta M_s);\end{aligned}$$

pour $t_{n-1}<s\leqq t_n$, $M_{s-}-M_{t_{n-1}}=M_{s-}-J^\sigma M_{s-}=M_{s-}^\sigma$. On a donc

$$\begin{aligned}g(M_{t_i}-M_{t_{i-1}})= & \int_{]\!]t_{i-1}, t_i]\!]} g'(M_{s-}^\sigma)\,dM_s+\tfrac{1}{2}\int_{]\!]t_{i-1}, t_i]\!]} g''(M_{s-}^\sigma)\,d\langle M^c, M^c\rangle_s\\ & +\sum_{t_{i-1}<s\leqq t_i}(g(M_{s-}^\sigma+\Delta M_s)-g(M_{s-}^\sigma)-g'(M_{s-}^\sigma)\,\Delta M_s),\end{aligned}$$

et, par sommation, le résultat annoncé. C.Q.F.D.

Les trois lemmes qui suivent étudient successivement D_1, D_2 et D_3.

Lemme 7. *Soient L et M deux semimartingales scalaires bornées par une constante b et découpées en tranches plus petites que α par une même suite finie $(T_0, \ldots, T_k)$ de* *temps optionnels. Les semimartingales définies pour toute subdivision σ par*

$$C^\sigma = \sum_{n \geqq 0} \delta_n L \delta_n M - [L, M]$$

sont découpées par la même suite en tranches plus petites que $4b\alpha$, et forment une famille bornée dans $\mathscr{H}^\infty$ qui converge dans $\mathscr{H}^p$ vers zéro pour tout p fini.

Démonstration.

$$\begin{aligned} C^\sigma &= \sum_i \delta_i L \delta_i M - [L, M] \\ &= \sum_{i,j} \delta_i L \delta_j M - \sum_{i<j} \delta_i L \delta_j M - \sum_{i>j} \delta_i L \delta_j M - [L, M] \\ &= LM - J^\sigma L_- \cdot M - J^\sigma M_- \cdot L - [L, M] \\ &= (L - J^\sigma L)_- \cdot M + (M - J^\sigma M)_- \cdot L. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3, ceci tend vers zéro dans $\mathscr{H}^p$ et chacune des quatre intégrales stochastiques est découpée par $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que $b\alpha$; la majoration dans $\mathscr{H}^\infty$ résulte de (2). C.Q.F.D.

Lemme 8. *Soient L une semimartingale scalaire, découpée par $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que α, M un processus càdlàg adapté borné par b, et h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $L(d)$ telle que $h(0) = \mathbf{0}$. L'intégrale stochastique*

$$h \circ (M - J^\sigma M)_- \cdot L$$

est bornée dans $\mathscr{H}^\infty$, tend vers zéro dans $\mathscr{H}^p$ pour p fini, et est découpée par $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que $\alpha \sup_{|x| \leqq 2b} |h(x)|$.

Démonstration. Le processus $h \circ (M - J^\sigma M)$ est borné par $\sup_{|x| \leqq 2b} |h(x)|$. Le lemme en découle, la convergence vers zéro résultant du lemme 2. C.Q.F.D.

Lemme 9. *Soit g une fonction C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, nulle en 0 ainsi que ses dérivées premières et secondes, et dont les dérivées secondes sont lipschitziennes de rapport k. Alors, pour tous vecteurs a et b,*

$$|g(a+b) - g(a) - g(b) - \sum_i a_i D_i g(b)| \leqq k \|a\|^2 \|b\|.$$

Démonstration. Définissons une fonction G de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$G(x, y) = g(ax + by) - g(ax) - g(by) - x \sum_i a_i D_i g(by).$$

Elle possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &G(0, y) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \sum_i a_i (D_i g(ax + by) - D_i g(ax) - D_i g(by)), \\ &\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=\sum_{i,j} a_i b_j (D_i D_j g(a x+b y)-D_i D_j G(b y)),$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\right| \leqq \|a\|\ \|b\|\ k\ \|a\|\ |x|=k'|x|,$$
$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,1)\right|=\left|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\,dy\right| \leqq k'|x| \left|\int_0^1 dy\right| = k'|x|,$$
$$|G(1,1)|=\left|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x,1)\,dx\right| \leqq k' \int_0^1 |x|\,dx \leqq k'. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Ces trois lemmes donnent la convergence de N^σ vers N:

Lemme 10. *Soit e une fonction C^2 bornée et à dérivées secondes lipschitziennes de $L(d)$ dans lui-même, telle que $e(\mathbf{0})=\mathbf{1}$. Si M est une semimartingale bornée par b et découpée, ainsi que chacun des processus scalaires $\langle M^c_{ij}, M^c_{kl}\rangle$, en tranches plus petites que α par une suite $(T_0, \ldots, T_k)$, les semimartingales $N-N^\sigma$, construites à l'aide de* (13) *et* (14) *sont bornées dans $\mathscr{H}^\infty$, convergent vers zéro dans $\mathscr{H}^p$ pour tout p fini, et sont découpées par $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que $\rho b \alpha$ (où la constante ρ ne dépend que de e).*

Démonstration. Les lemmes 7 et 8 fournissent ce résultat pour D_1 et D_2 rescpectivement. Il reste à l'établir pour D_3. D'après le lemme 9, il suffit d'étudier le processus

$$\sum_{0 \leqq s \leqq .} |M^\sigma_{s-}|\,|\Delta M_s|^2.$$

On peut alors appliquer le lemme 8, avec $h(x)=|x|$, et $L=\sum_{s \geqq 0} |\Delta_s M|^2$. C.Q.F.D.

Construction des integrales multiplicatives

Nous allons montrer que les semimartingales

$$X^\sigma = \prod_{n \geqq 0} e(\delta_n M) \tag{15}$$

(où le produit doit être effectué, comme dans (12), de gauche à droite) convergent vers l'exponentielle $X=\mathscr{E}(N)$ de la semimartingale N.

Lemme 11. *Soit $1 \leqq p < \infty$. Sous les hypothèses du lemme* 10, *avec $\alpha = 1/4\rho b c_p$, et si N (donnée par* (13)) *est découpée par $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que $1/4(c_p + c_{2p})$, les semimartingales X^σ définies par* (15) *convergent dans $\mathscr{S}^p$ vers l'exponentielle X de la semimartingale N.*

Démonstration. Pour $t_n < t \leqq t_{n+1}$, on peut écrire

$$X^\sigma_t = X^\sigma_{t_n}(1+f(M_t - M_{t_n})) = X^\sigma_{t_n} + X^\sigma_{t_n}(N^\sigma_t - N^\sigma_{t_n}),$$

d'où

$$X^\sigma = e(M_0) + J^\sigma X^\sigma_- \cdot N^\sigma.$$

D'autre part, par définition de X,

$$X = e(M_0) + X_- \cdot N.$$

L'hypothèse sur N permet d'affirmer que X est dans $\mathcal{S}^{2p}$; $X - X^\sigma$ vérifie

$$X - X^\sigma = H^\sigma + J^\sigma (X - X^\sigma)_- \cdot N^\sigma$$

avec

$$H^\sigma = (X - J^\sigma X)_- \cdot N + J^\sigma X_- \cdot (N - N^\sigma).$$

N et les $N - N^\sigma$ sont toutes découpées par $(T_0, \ldots, T_k)$ en tranches plus petites que $1/4\, c_p$; $(T_0, \ldots, T_k)$ découpe donc N^σ en tranches plus petites que $1/2\, c_p$, et le lemme 5 fournit une majoration du type

$$\|X - X^\sigma\|_{\mathcal{S}^p} \leqq \theta \, \|H^\sigma\|_{\mathcal{S}^p}$$

avec une constante θ indépendante de σ. Comme N est dans $\mathcal{H}^\infty$ et X dans $\mathcal{S}^p$, $(X - J^\sigma X)_- \cdot N$ tend vers zéro dans $\mathcal{S}^p$ (proposition 3); la majoration

$$\|J^\sigma X_- \cdot (N - N^\sigma)\|_{\mathcal{S}^p} \leqq c_p \|X\|_{\mathcal{S}^{2p}} \|N - N^\sigma\|_{\mathcal{H}^{2p}}$$

permet de conclure, puisque $N - N^\sigma$ tend vers zéro dans tout espace $\mathcal{H}^r$. C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de convergence:

Théorème 2. *Soient M une semimartingale et e une fonction C^2 de $L(d)$ dans $L(d)$ telle que $e(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ et dont les dérivées secondes sont localement lipschitziennes. Lorsque le pas de la subdivision σ tend vers zéro,*

a) *les sommes $\sum_n (e - \mathbf{1})(M^{t_n} - M^{t_{n-1}})$ convergent, uniformément sur tout compact en probabilité, vers la semimartingale N définie par* (13);

b) *les produits $\prod_n e(M^{t_n} - M^{t_{n-1}})$ convergent, uniformément sur tout compact en probabilité, vers la semimartingale $X = \mathcal{E}(N)$, notée $\prod_0^t e(dM_s)$.*

Démonstration. On se ramène, par arrêt avant des temps arbitrairement grands, au cas où M est bornée. Lorsque M est bornée, on ne modifie aucun des processus qui interviennent en remplaçant e par une fonction C^2, bornée, à dérivées secondes lipschitziennes, qui coïncide avec e au voisinage de la boule de rayon $2\|M\|_{\mathcal{S}^\infty}$. Soit alors $1 \leqq p < \infty$. Par arrêt avant des temps arbitrairement grands, on se ramène au cas où les hypothèses des lemmes 10 et 11 sont satisfaites, auquel cas les convergences ont lieu dans $\mathcal{S}^p$. C.Q.F.D.

Remarque. la condition de Lipschitz sur les dérivées secondes de e n'est intervenue que pour majorer des termes contenant des sauts. Dans le cas où M est continue, cette hypothèse est inutile.

References

1. Dellacherie, C.: A paraître in Séminaire de Probabilites de Strasbourg vol. XII. Lecture notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer

2. Doleans-Dade, C.: On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **36**, 93–101 (1976)
3. Doleans-Dade, C., Meyer, P.A.: Equations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilités de Strasbourg, vol. XI. Lecture notes in Math. **581**, 376–382. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
4. Ibero, M.: Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie. Bull. Soc. math. France **100**, 175–191 (1976)
5. Malliavin, P.: Formules de la moyenne, calcul de perturbations et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques. J. Functional Analysis **17**, 274–291 (1974)
6. McKean, H.P.: Brownian notions on the 3-dimensional rotation group. Mem. Col. Sci. Kyoto, **33**, 25–38 (1960)
7. Meyer, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités de Strasbourg, vol. X. Lecture notes in Math. **511**, 245–400. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
8. Meyer, P.A.: Le théorème fondamental sur les martingales locales. Séminaire de Probabilités de Strasbourg, vol. XI. Lecture notes in Math. **581**, 463–464. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
9. Meyer, P.A.: Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. A paraître in Séminaire de Probabilités de Strasbourg vol. XII. Lecture notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer

Reçu le 10 Juin 1977