Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
42, 57–66 (1978)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Continuité et théorème central limite pour les transformées de Fourier des mesures aléatoires du second ordre

X. Fernique

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S., Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex

0.1. Introduction

M.B. Marcus a démontré récemment ([5]) sous le titre «Continuité et théorème central limite pour les séries trigonométriques aléatoires» un théorème remarquable pour les séries de la forme $\sum_n a_n x_n(\omega)\cos(\lambda_n 2\pi t+\Phi_n(\omega))$; il le base sur des inégalités intégrales de convexité liant certains réarrangements croissants. On présente ici des inégalités de même nature liant les fonctions de répartition des variables aléatoires positives. On applique ensuite ces inégalités à l'étude de certaines transformées de Fourier aléatoires.

0.2. Notations, présentation du résultat principal

Soit $X=X(\omega,t)$ une fonction aléatoire centrée d'espace d'épreuves $(\Omega,\mathscr{A},P)$, séparable et mesurable, stationnaire du second ordre sur $\mathbb{R}^n$; on sait qu'il existe alors une mesure aléatoire $m(\omega,dx)$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs orthogonales sur les ensembles disjoints telle que dans $L^2(\Omega,P)$, on ait:

$$\forall t\in\mathbb{R}^n,\qquad X(\omega,t)=\int_{x\in\mathbb{R}^n}\exp[2i\langle x,t\rangle]\,m(\omega,dx).$$

Nous notons m le moment du second ordre de $m(\omega)$; c'est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}^n$ et on a:

$$\forall(s,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\qquad d_X^2(s,t)=E\{|X(s)-X(t)|^2\}=4\int\sin^2\langle t,x\rangle\,dm(x).$$

Nous supposerons essentiellement que $m(\omega)$ est *à valeurs indépendantes ou à valeurs symétriques sur les ensembles disjoints*; cette seconde hypothése signifie que pour toute suite $(A_k,\ k\in\mathbb{N})$ de parties mesurables et disjointes de $\mathbb{R}^n$ et pour toute suite $(\varepsilon_k,\ k\in\mathbb{N})$ de variables de Rademacher indépendantes sur un espace d'épreuves $(E,\mathscr{E},P(\varepsilon))$ indépendant de $(\Omega,\mathscr{A},P)$, la suite des produits $(\varepsilon_k m(\omega,A_k),$

0044-3719/78/0042/0057/$02.00

$k \in \mathbb{N}$) a même loi que la suite $(m(\omega, A_k), k \in \mathbb{N})$. Nous supposerons aussi que la fonction aléatoire gaussienne séparable G de même covariance que X a presque sûrement ses trajectoires continues. Le résultat principal sera alors:

Théorème. *Soit X une fonction aléatoire séparable sur $\mathbb{R}^n$, stationnaire du second ordre, prégaussienne pour $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ dont la mesure spectrale aléatoire $m(\omega, dx)$ est à valeurs indépendantes ou symétriques. Alors pour toute suite positive $(a_k, k \in \mathbb{N})$ croissant vers l'infini, les fonctions aléatoires*

$$X_k(\omega, t) = \int_{|x| \leqq a_k} \exp[2i\langle x, t\rangle]\, m(\omega, dx)$$

convergent presque sûrement vers X uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$; de plus X a presque sûrement ses trajectoires continues et vérifie la propriété de la limite centrale dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$.

L'étude s'appliquera en particulier au cas où la mesure m ayant un support dénombrable, $X(\omega, t)$ est la somme d'une série aléatoire $\sum \theta_k(\omega) \exp[2i\langle x_k, t\rangle]$ construite à partir d'une suite $(x_k, k \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et d'une suite $(\theta_k, k \in \mathbb{N})$ de variables aléatoires indépendantes ou symétriques (au sens ci-dessus) telle que $\sum E\{\theta_k^2\}$ soit convergente; dans le cas où $n=1$, on retrouvera donc les résultats établis par N.C. Jain et M.B. Marcus ([4]) et M.B. Marcus ([5]) pour les séries trigonométriques aléatoires. C'est d'ailleurs l'analyse de leurs méthodes d'étude qui est à la base de ce travail.

1. Rappels et inégalités

1.1. Rappel sur les variables de Rademacher

L'utilisation d'inégalités sur les moments successifs des combinaisons linéaires des variables de Rademacher indépendantes devient depuis quelques années systématique dans les études de la propriété de la limite centrale ([4, 5, 6]); on énonce ici la forme adaptée à notre étude.

Proposition 1.1.1. *Soient $(\varepsilon_k, k \in \mathbb{N})$ une suite de Rademacher indépendante et $(a_k, k \in \mathbb{N})$ une suite de nombres complexes; pour tout nombre complexe z, on a:*

$$E\{|\exp(z \textstyle\sum \varepsilon_k a_k)|\} \leqq \exp(\tfrac{1}{2}|z|^2 \textstyle\sum |a_k|^2);$$

si de plus la série $\sum |a_k|^2$ est convergente de somme non nulle, pour tout nombre $\alpha < \frac{1}{2}$, on a:

$$E\left\{\exp\left(\alpha \frac{|\sum \varepsilon_k a_k|^2}{\sum |a_k|^2}\right)\right\} \leqq \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}.$$

Cet énoncé s'applique à la majoration des normes d'Orlicz des sommes de variables de Rademacher indépendantes. Soit en effet $(T, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé; nous lui associons l'espace d'Orlicz défini par (e^{x^2}, μ); nous notons N la norme associée définie par:

$$N(f) = \inf\left\{\alpha > 0 \colon \int \exp\left(\frac{f^2}{\alpha^2}\right) d\mu \leqq 2\right\}.$$

Corollaire 1.1.2. *Soient* $(T, \mathscr{T}, \mu)$, $(E, \mathscr{E}, P(\varepsilon))$ *deux espaces probabilisés indépendants,* $(\varepsilon_k, k \in \mathbb{N})$ *une suite de Rademacher indépendante sur* E *et* $(f_k, k \in \mathbb{N})$ *une suite de variables aléatoires réelles ou complexes sur* T *telle que* $\sum |f_k|^2$ *soit* μ-*presque sûrement convergente de somme non nulle; on a alors:*

$$\int dP(\varepsilon) \left\{ N\left(\frac{\sum \varepsilon_k f_k}{\sqrt{\sum |f_k|^2}} \right) \right\} \leqq 5.$$

Démonstration du corollaire. La définition de N montre que pour tout $u > 0$, on a:

$$P\left\{ \varepsilon : N\left(\frac{\sum \varepsilon_k f_k}{\sqrt{\sum |f_k|^2}} \right) \geqq u \right\} = P\left\{ \varepsilon : \int \exp\left(\frac{|\sum \varepsilon_k f_k|^2}{u^2 \sum |f_k|^2} \right) d\mu \geqq 2 \right\}.$$

Pour tout $p \geqq 1$, l'inégalité de Čebišev et celle de Hölder majorent ceci par:

$$\frac{1}{2^p} \iint \exp\left(\frac{p}{u^2} \frac{|\sum \varepsilon_k f_k|^2}{\sum |f_k|^2} \right) dP(\varepsilon)\, d\mu,$$

et la proposition 1.1 utilisée pour $p = \frac{u^2}{4}$, $u \geqq 2$, fournit:

$$P\left\{ \varepsilon : N\left(\frac{\sum \varepsilon_k f_k}{\sqrt{\sum |f_k|^2}} \right) \geqq u \right\} \leqq 3 \exp\left(-\frac{u^2}{4} \ln 2 \right);$$

par intégration, le résultat s'ensuit.

1.2. Rappel sur les fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires ou à accroissements sous-gaussiens

Les propriétés que nous énonçons ici sont classiques ([1, 3, 5]) sous des formes légèrement différentes; nous ne les justifierons donc pas.

Théorème 1.2.1. *Soit* X *une fonction aléatoire gaussienne séparable et stationnaire sur* $\mathbb{R}^n$; *notons* μ *la mesure de Lebesgue et* d *l'écart défini par* X *sur* $\mathbb{R}^n$; *pour que* X *ait presque sûrement ses trajectoires continues pour la topologie usuelle, il faut que:*

$$\int_0^{\sup\{d(0,t),\, |t| \leqq \frac{1}{2}\}} \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\mu\{t : |t| \leqq \frac{1}{2}, d(0,t) \leqq u\}} \right)}\, du < \infty.$$

Théorème 1.2.2. *Soit* X *une fonction aléatoire séparable sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs réelles ou complexes; notons* μ *la mesure de Lebesgue et* d *un écart mesurable, stable par translation, sur* $\mathbb{R}^n$; *on suppose qu'il existe un nombre* A *tel que:*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad E\{|\exp[z(X(s) - X(t))]|\} \leqq \exp[A^2 |z|^2 d^2(s,t)].$$

Dans ces conditions, on a:

$$E\{\sup_{|t|\leqq\frac{1}{2}}|X(t)|\}$$
$$\leqq E\{|X(0)|\}+AK\sqrt{n}\int_0^{\sup\{d(0,t),\,|t|\leqq\frac{1}{2}\}}\cdot\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\{t:\ |t|\leqq\frac{1}{2},d(0,t)\leqq u\}}\right)}\,du$$

où K est une constante absolue.

1.3. Rappel sur la propriété de la limite centrale

Dans le paragraphe 2, nous montrerons que certaines fonctions aléatoires sur $\mathbb{R}^n$ vérifient la propriété de la limite centrale dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$; pour cela, nous les approcherons par des fonctions aléatoires plus simples; l'argument essentiel sera celui mis en évidence par G. Pisier ([6]) que nous rappelons ici:

Soient $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé et E un espace de Banach; pour toute variable aléatoire X à valeurs dans E et pour tout entier k, nous notons $S_k(X)$ la somme de k variables aléatoires indépendantes de même loi que X; dans ces conditions:

Théorème 1.3. *Pour que X vérifie dans E la propriété de la limite centrale, il suffit que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans E vérifiant la propriété de la limite centrale telle que:*

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad E\left\{\left\|\frac{S_k(X-Y)}{\sqrt{k}}\right\|\right\}\leqq\varepsilon.$$

1.4. Inégalités intégrales

Lemme 1.4.1. *Soient T une variable aléatoire positive sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et λ un nombre compris entre zéro et un; on pose:*

$$\varphi_\lambda(x)=(\lambda-x)\,I_{\{0\leqq x\leqq\lambda\}},$$
$$\sigma(\lambda)=\{f\in\mathscr{L}_0(\Omega,\mathbb{R}):\ 0\leqq f\leqq 1,\ \int f\,dP=\lambda\},$$
$$F_T(u)=P\{T\leqq u\}.$$

On a alors:

$$\text{(1.4.1)}\qquad \int_0^\infty \varphi_\lambda\circ F_T(u)\,du=\inf\{\textstyle\int fT\,dP,\ f\in\sigma(\lambda)\}.$$

Démonstration. (a) Posons $\theta=\sup\{u:\ F_T(u)<\lambda\}$; notons I le premier membre de (1.4.1); on a alors, par définition de φ_λ:

$$I=\int_{\substack{u\geqq 0\\ F_T(u)<\lambda}}\Big(\lambda-\int_{T(\omega)\leqq u}dP(\omega)\Big)\,du=\lambda\int_{\substack{u\geqq 0\\ F_T(u)<\lambda}}du-\int dP(\omega)\int_{\substack{u\geqq T(\omega)\\ F_T(u)<\lambda}}du.$$

En introduisant θ, on obtient:

$$I=\theta[\lambda-P\{T<\theta\}]+\int_{T(\omega)<\theta} T(\omega)\,dP(\omega).$$

Soit alors f_T la variable aléatoire définie presque sûrement par:

$$f_T(\omega)=1 \quad \text{si} \quad T(\omega)<\theta,$$
$$f_T(\omega)=0 \quad \text{si} \quad T(\omega)>\theta,$$
$$f_T(\omega)=\frac{\lambda-P\{T<\theta\}}{P\{T=\theta\}} \quad \text{si} \quad T(\omega)=\theta;$$

on constate que I est égal à $\int f_T T\,dP$ et que de plus f_T appartient à $\sigma(\lambda)$.

(b) Soit maintenant un élément arbitraire f de $\sigma(\lambda)$; on a:

$$\int(f-f_T)\,T\,dP=\left(\int f\,dP\right)\cdot\left(\int T\cdot\frac{f\,dP}{\int f\,dP}\right)-\int_{u\geqq 0}(\lambda-F_T(u))^+\,du;$$

l'intégration par parties habituelles pour le calcul de l'espérance mathématique permet donc d'écrire:

$$\int(f-f_T)\,T\,dP=\left(\int f\,dP\right)\left(\int_{u\geqq 0}\left[1-\frac{1}{\int f\,dP}\int_{T(\omega)\leqq u} f\,dP\right]du-\int_{u\geqq 0}(\lambda-F_T(u))\right)^+ du.$$

En utilisant la valeur de $\int f\,dP$ et en séparant chaque intégrale suivant $\{F_T(u)\leqq\lambda\}$, $\{F_T(u)>\lambda\}$, on obtient:

$$\int(f-f_T)\,T\,dP=\int_{\substack{F_T(u)\leqq\lambda\\ u\geqq 0}}\left[F_T(u)-\int_{T(\omega)\leqq u} f\,dP\right]du+\int_{\substack{F_T(u)>\lambda\\ u\geqq 0}}\left[\lambda-\int_{T(\omega)\leqq u} f\,dP\right]du.$$

Puisque f appartient à $\sigma(\lambda)$, ces deux intégrales sont positives, le résultat s'ensuit.

Proposition 1.4.2. *Soient $X=X(\omega,t)$ une variable aléatoire p.s. positive sur un produit d'espaces probabilisés $(\Omega,\mathscr{A},P)\times(T,\mathscr{T},\mu)$ et $a=a(\omega)$ une variable aléatoire p.s. positive sur le premier facteur; soit de plus φ une fonction $[0,1]\to\overline{\mathbb{R}}$ convexe et décroissante; on a alors:*

$$(1.4.2)\qquad \int_0^{\int a(\omega)dP(\omega)}\varphi\circ\mu\{t\colon \int X(\omega,t)\,dP(\omega)\leqq u\}\,du$$
$$\geqq\int dP(\omega)\int_0^{a(\omega)}\varphi\circ\mu\{t\colon X(\omega,t)\leqq u\}\,du.$$

Démonstration. (a) Nous démontrons d'abord l'inégalité si $a=+\infty$ p.s. et si φ est l'un des φ_λ. Elle résulte alors du lemme 1.4.1; introduisons en effet la fonction f_T associée à $T=\int X(\omega,t)\,dP(\omega)$, variable aléatoire p.s. positive sur $(T,\mathscr{T},\mu)$ et notons J le premier membre de (1.2); on a:

$$J=\int f_T T\,d\mu=\int dP(\omega)\int f_T X(\omega,t)\,d\mu(t)\geqq\int dP(\omega)\inf_{f\in\sigma(\lambda)}\int f X(\omega,t)\,d\mu$$

et donc:

$$J \geqq \int dP(\omega) \int_0^\infty \varphi_\lambda \circ \mu\{t\colon\ X(\omega,t) \leqq u\}\, du,$$

c'est le résultat annoncé dans ce cas particulier.

(b) Nous démontrons maintenant l'inégalité si $\varphi(1)=0$ et $a=+\infty$ p.s.; dans ce cas, la fonction φ peut s'écrire $\int \varphi_\lambda\, d\pi(\lambda)$ où $\pi(\lambda)$ est la mesure positive sur $]0,1]$ définie par la dérivée seconde de φ. Le résultat se déduit donc du résultat (a) par intégration par rapport à $\pi(\lambda)$.

(c) Nous démontrons l'inégalité si $\varphi(1)=0$ et a arbitraire. Le résultat se déduit alors du résultat (b) appliqué à la variable aléatoire

$$Y(\omega,t)=\inf(X(\omega,t), a(\omega)).$$

On aura en effet d'un côté:

$$\begin{aligned} &\forall u \geqq \int a(\omega)\, dP(\omega), && \mu\{t\colon \textstyle\int Y(\omega,t)\, dP(\omega) \leqq u\}=1,\\ &\forall u < \int a(\omega)\, dP(\omega), && \mu\{t\colon \textstyle\int Y(\omega,t)\, dP(\omega) \leqq u\} \geqq \mu\{t\colon \textstyle\int X(\omega,t)\, dP(\omega) \leqq u\}, \end{aligned}$$

et par suite:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\int a(\omega)dP(\omega)} \varphi \circ \mu\{t\colon \textstyle\int X(\omega,t)\, dP(\omega) \leqq u\}\, du \\ &\qquad \geqq \int_0^\infty \varphi \circ \mu\{t\colon \textstyle\int Y(\omega,t)\, dP(\omega) \leqq u\}\, du. \end{aligned}$$

On aura aussi de l'autre côté, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &\forall u \geqq a(\omega), && \mu\{t\colon\ Y(\omega,t) \leqq u\}=1,\\ &\forall u < a(\omega), && \mu\{t\colon\ Y(\omega,t) \leqq u\}=\mu\{t\colon\ X(\omega,t) \leqq u\}, \end{aligned}$$

et par suite:

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \int_0^{a(\omega)} \varphi \circ \mu\{t\colon\ X(\omega,t) \leqq u\}\, du \leqq \int_0^\infty \varphi \circ \mu\{t\colon\ Y(\omega,t) \leqq u\}\, du$$

le résultat s'ensuit dans le cas annoncé.

(d) Il ne reste plus qu'à supprimer l'hypothèse auxiliaire $\varphi(1)=0$; c'est immédiat puisque la différence des deux membres de (1.4.2) n'est pas modifiée si on ajoute à φ une constante. La proposition est donc démontrée.

La forme discrète de la proposition 1.4.2 a un intérêt en elle-même:

Corollaire 1.4.3. *Soient f_1, f_2 deux variables aléatoires p.s. positives, a et b deux nombres positifs, φ une fonction $[0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe décroissante, on a alors:*

$$\int_0^{a+b} \varphi \circ P\{f_1+f_2 \leqq u\}\, du \geqq \int_0^a \varphi \circ P\{f_1 \leqq u\}\, du + \int_0^b \varphi \circ P\{f_2 \leqq u\}\, du.$$

2. Démonstration du théorème principal

2.1. Un cas particulièrement simple sera celui dans lequel la mesure m est à support compact. En effet dans ces conditions, la distribution aléatoire $\tilde{X}$ associée à X est la transformée de Fourier d'une distribution aléatoire à support compact; elle est donc indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$; c'est une distribution aléatoire à valeurs dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ possédant un moment du second ordre. Puisque dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$, la convergence en loi est déterminée par la convergence des fonctions caractéristiques ([2]), $\tilde{X}$ dont les marges de dimension 1 vérifient la propriété de la limite centrale dans $\mathbb{R}$ vérifiera elle-même cette propriété dans $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$; l'injection de $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ étant continue, la fonction aléatoire séparable X sera presque sûrement à trajectoires continues et vérifiera dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ la propriété de la limite centrale:

Proposition 2.1. *Si la mesure m est à support compact dans $\mathbb{R}^n$, la fonction aléatoire X a presque sûrement ses trajectoires continues et vérifie la propriété de la limite centrale dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$.*

2.2. Un autre cas simple est celui où $m(\omega)$ est à valeurs symétriques et m est à support dénombrable de sorte que X est la somme d'une série

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \qquad X(\omega, t) = \sum \theta_k(\omega) \exp[2i\langle x_k, t\rangle], \ \sum E(\theta_k^2) < \infty.$$

Nous associons à X la série de même loi sur $(\Omega \times E)$

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \qquad X(\omega, \varepsilon, t) = \sum \varepsilon_k \theta_k(\omega) \exp[2i\langle x_k, t\rangle],$$

et pour tout $\omega \in \Omega$, l'écart $d(\omega)$ défini par

$$d^2(\omega; s, t) = 4 \sum \theta_k^2(\omega) \sin^2 \langle x_k, t-s\rangle.$$

La proposition 1.1 montre que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction ε-aléatoire $X(\omega, \varepsilon, t)$ vérifie les hypothèses du théorème 1.2.2 ($A^2 = \frac{1}{2}$, $d = d(\omega)$). Comme on a:

$$\sup_{|t| \leq \frac{1}{2}} d^2(\omega; 0, t) \leq 4 \sum \theta_k^2(\omega),$$

on en déduit:

$$\int dP(\varepsilon) \sup_{|t| \leq \frac{1}{2}} |X(\omega, \varepsilon, t)|$$
$$\leq 2\sqrt{\sum \theta_k^2(\omega)} + K \sqrt{\frac{n}{2}} \int_0^{2\sqrt{\Sigma \theta_k^2(\omega)}} \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\mu\{|t| \leq \frac{1}{2}, d(\omega; 0, t) \leq u\}}\right)} \, du.$$

En intégrant en ω et en appliquant la proposition 1.4.2 à la fonction φ définie par:

$$\varphi(t) = \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)}$$

on obtient:

Proposition 2.2. *Si la mesure $m(\omega)$ est à valeurs symétriques et m à support dénombrable, X a presque sûrement ses trajectoires majorées sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ et on a:*

$$E\{\sup_{|t|\leq\frac{1}{2}}|X(t)|\}$$
$$\leq 2\sqrt{m(\mathbb{R}^n)}+K\sqrt{\frac{n}{2}}\int_0^{2\sqrt{m(\mathbb{R}^n)}}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\{|t|\leq\frac{1}{2}, d_X(0,t)\leq u\}}\right)}\,du.$$

2.3. Nous construisons maintenant des approximations simples de X quand $m(\omega)$ est à valeurs symétriques et m est une mesure arbitraire. Pour tout entier $k>0$, soit $(A_{j,k}, j\in\mathbb{N})$ une partition de $\mathbb{R}^n$ par une suite d'ensembles mesurables dont le diamètre

$$\sup_{x,y\in A_{j,k}}\left\{\sum_{l=1}^n |x_l-y_l|\right\}$$

soit inférieur à $\frac{1}{k}$; à chacun des ensembles de cette partition, nous associons un de ses éléments $x_{j,k}$ et nous définissons une série aléatoire Y_k en posant:

$$Y_k(\omega,t)=\sum_j m(\omega, A_{j,k})\exp[2i\langle x_{j,k},t\rangle].$$

On a immédiatement:

$$E\{|X(t)-Y_k(t)|^2\}=4\sum_j\int_{A_{j,k}}\sin^2\langle x-x_{jk},t\rangle\,dm(x)\leq 4\frac{|t|^2}{k^2}m(\mathbb{R}^n)$$

de sorte que pour tout $t\in\mathbb{R}^n$, la suite $(Y_k(t), k\in\mathbb{N})$ converge presque sûrement et dans $L^2(\Omega,P)$ vers $X(t)$; on a de plus:

$$|d_{Y_k}(t,s)-d_X(t,s)|\leq|d_{Y_k}(0,t-s)-d_X(0,t-s)|$$

et donc:

$$|d_{Y_k}(t,s)-d_X(t,s)|\leq\frac{2}{k}|t-s|\sqrt{m(\mathbb{R}^n)}.$$

On notera que $d_X(t,s)$ et $\sqrt{\sum_{l=1}^n|t_l-s_l|^2}$ qui est supérieur à $|t-s|$ sont associés à des fonctions aléatoires gaussiennes presque sûrement à trajectoires continues de sorte que d_{Y_k} possède la même propriété; dans ces conditions, on peut appliquer à Y_k la proposition 2.2 et on obtient:

$$E\{\sup_{|t|\leq\frac{1}{2}}|Y_k(t)|\}$$
$$\leq 2\sqrt{m(\mathbb{R}^n)}+K\sqrt{\frac{n}{2}}\int_0^{\sqrt{2m(\mathbb{R}^n)}}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\left\{|t|\leq\frac{1}{2}, d_X(0,t)+\frac{2}{k}|t|\sqrt{m(\mathbb{R}^n)}\leq u\right\}}\right)}\,du.$$

En faisant tendre k vers l'infini, en utilisant la convergence des $Y_k(t)$ vers les $X(t)$ dans $L^2(\Omega, P)$ et la séparabilité de X pour le premier membre, le théorème de convergence monotone pour le second, on obtient:

Proposition 2.3. *Si la mesure $m(\omega)$ est à valeurs symétriques, la fonction aléatoire X a presque sûrement ses trajectoires majorées sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ et on a:*

$$E\{\sup_{|t|\leqq \frac{1}{2}} |X(t)|\}$$
$$\leqq 2\sqrt{m(\mathbb{R}^n)} + K\sqrt{\frac{n}{2}} \int_0^{2\sqrt{m(\mathbb{R}^n)}} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\{|t|\leqq\frac{1}{2}, d_X(0,t)\leqq u\}}\right)}\, du.$$

2.4. Nous utilisons maintenant les résultats partiels 2.1, 2.2 et 2.3 pour faire la démonstration générale.

(a) Etudions la convergence de la suite $(X_k, k\in\mathbb{N})$ définie dans l'énoncé vers X. Si $m(\omega)$ est à valeurs symétriques, un argument de martingale dans $(E, \mathscr{E}, P(\varepsilon))$ et la proposition 2.3 montrent qu'on a:

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad E\{\sup_{l\geqq k} \sup_{|t|\leqq\frac{1}{2}} |X(t)-X_l(t)|\}$$
$$\leqq 4\sqrt{m\{|x|>a_k\}} + K\sqrt{2n} \int_0^{2\sqrt{m\{|x|>a_k\}}} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\{|t|\leqq\frac{1}{2}, d_X(0,t)\leqq u\}}\right)}\, du.$$

Si $m(\omega)$ est à valeurs indépendantes, on utilise la symétrisée X' de X qui est associée à une mesure $m'(\omega)$ à valeurs symétriques, on obtient alors par un argument de martingale:

$$(2.4)\quad \forall k\in\mathbb{N}, \quad E\{\sup_{l\geqq k} \sup_{|t|\leqq\frac{1}{2}} |X(t)-X_l(t)|\}$$
$$\leqq 8\sqrt{2m\{|x|>a_k\}} + 4K\sqrt{n} \int_0^{2\sqrt{m\{|x|>a_k\}}} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\{|t|\leqq\frac{1}{2}, d_X(0,t)\leqq u\}}\right)}\, du$$

et cette formule (2.4) est donc vérifiée dans tous les cas. La convergence uniforme presque sûre de X_k vers X sur $\{|t|\leqq\frac{1}{2}\}$, puis sur tout compact, en résulte puisque l'intégrale du second membre est convergente et que $\lim_{k\to\infty} m\{|x|>a_k\}$ est nulle.

(b) La continuité presque sûre des trajectoires de X résulte de la proposition 2.1 puisque X est presque sûrement limite uniforme sur tout compact des fonctions aléatoires X_k associées à des mesures à support compact.

(c) Pour montrer que X vérifie la propriété de la limite centrale dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer qu'il la vérifie dans $\mathscr{C}(|t|\leqq\frac{1}{2})$ et ceci résulte du théorème rappelé en 1.3. En effet la formule (2.4) est applicable pour tout entier $l>0$ à $\frac{S_l(X)}{\sqrt{l}}$ qui est associé à la même distance et à la même mesure que X, elle s'écrit:

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall l\in\mathbb{N}^*,\qquad E\left\{\sup_{|t|\leqq\frac{1}{2}}\left|\frac{S_l(X-X_k)(t)}{\sqrt{l}}\right|\right\}$$
$$\leqq 8\sqrt{2m\{|x|>a_k\}}+4K\sqrt{n}\int_0^{2\sqrt{m\{|x|>a_k\}}}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu\{|t|\leqq\frac{1}{2},d_X(0,t)\leqq u\}}\right)}\,du;$$

les X_k vérifiant (proposition 2.1) la propriété de la limite centrale, X la vérifie aussi. Le théorème est démontré.

2.5. On aura pu noter à la lecture de la démonstration ci-dessus l'intérêt de la formule de convexité (1.4.2)−(1.4.3) que Marcus a mise en lumière sous une autre forme. Elle permet de démontrer un bon théorème limite pour les fonctions aléatoires stationnaires. Elle est inapplicable pour l'instant aux fonctions aléatoires non stationnaires, faute de majoration aussi simple que la majoration 1.2.2.

Références

1. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Lecture notes in mathematics, **480,** 1−96. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
2. Fernique, X.: Généralisations du théorème de continuité de P. Lévy. C. R. Acad. Sci. Paris, **266,** 25−28 (1968)
3. Heinkel, B.: Méthode des mesures majorantes et théorème central limite dans $\mathscr{C}(S)$. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **38**, 4, 339−351 (1977)
4. Jain, N.C., Marcus, M.B.: Sufficient conditions for the continuity of stationnary gaussian processes and applications to random series. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **24**, 2, 117−141 (1974)
5. Marcus, M.B.: Continuity and the central limit theorem for random trigonometric series. [A paraître. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 1978]
6. Pisier, G.: Séminaire Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique, exposé III (1975−1976)

Reçu le 9, Juillet 1977