Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
36, 129–136 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Partitions extrêmales des flots d'entropie infinie

F. Blanchard

Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Laboratoire de Probabilités,
4, Place Jussieu-tour 56, F-75230 Paris Cedex 05, France

The existence of extremal (actually perfect) partitions for flows with finite entropy is a direct consequence of Rudolph's representation. The aim of this paper is to prove the existence of such partitions for any measurable flow. This result is achieved by using Rudolph's theorem in a study of entropy properties of tower automorphisms.

Introduction

L'existence de partitions parfaites des flots spéciaux a d'abord été montrée par Gurevič [5] dans le cas très simple où la base est d'entropie finie, et où la fonction plafond est mesurable par rapport à une partition parfaite de celle-ci. Tout récemment, Rudolph [10] a démontré qu'on pouvait se ramener à ce cas pour tout flot mesurable d'entropie finie, grâce à une représentation qu'il a donnée de ces flots. Notre but est ici de prouver l'existence de partitions extrêmales pour les flots d'entropie infinie, et par là de montrer que tout flot de K-systèmes est un K-flot.

Le but de la première partie de ce papier est d'évaluer l'entropie de certaines partitions des automorphismes «tour» construits au-dessus d'un système dynamique donné. Remarquons qu'on peut donner des démonstrations beaucoup plus simples que celles de leur auteur des deux formules d'Abramov (Abramov [1] et [2]). Ç'a été fait par Neveu [7] pour la première; on trouvera ici une démonstration duale de celle de Neveu, en ce sens qu'il nous a fallu calculer l'entropie d'une tour plutôt que celle d'un induit: les flots spéciaux ressemblent en effet becaucoup plus à des tours qu'à des induits. Nous donnons aussi une démonstration immédiate de la seconde, en utilisant la même remarque qu'Abramov, ainsi que le théorème de Mac Millan.[1]

[1] Lors de la rédaction de cet article, nous ignorions que des démonstrations des deux formules d'Abramov, analogues à celles données ici ou très proches, étaient déjà connues; la première figure dans le livre de Dencker et al. [11]; la seconde, due à Pinsker, se trouve dans un article de Krengel [12]

On démontre ensuite, toujours dans la première partie, une propriété de certaines partitions extrêmales des systèmes dynamiques d'entropie infinie.

La deuxième partie, s'appuyant sur la représentation de Rudolph et les résultats de la première partie, établit l'existence de partitions extrêmales pour tout flot mesurable d'entropie infinie.

Ce travail doit beaucoup à des conversations avec J.-P. Thouvenot.

1. Localisation de l'entropie d'une tour

1.1. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, S)$ un système dynamique, f une fonction à valeurs entières positives, d'espérance finie; elle engendre sur Ω la partition mesurable $\mathscr{F}$.

Soit $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mu}, T)$ la tour bâtie au-dessus de S sous la fonction f (voir Friedman [4]). On notera $\bar{\Omega}=\Omega_0 \oplus \Omega \oplus \cdots$, où $\Omega_0=\Omega$, $\Omega_n \subset \Omega_{n-1}$.

A toute partition $\mathscr{P}$ de Ω, on peut faire correspondre les partitions suivantes de $\bar{\Omega}$:

$\bar{\mathscr{P}}$ ainsi définie: $(\Omega_0, \Omega_0^c) \subset \bar{\mathscr{P}}$; $\bar{\mathscr{P}}_{\Omega_0^c}$ est triviale, $\bar{\mathscr{P}}_{\Omega_0}=\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}^*$ ainsi définie: à tout atome de $\mathscr{P}$, P, on fait correspondre

$$P^*=P \oplus P \cap \Omega_1 \oplus \cdots;$$

ces ensembles constituent la partition $\mathscr{P}^*$ de $\bar{\Omega}$.

On appellera $\mathscr{Z}$ la partition de $\bar{\Omega}$ $\mathscr{Z}=(\Omega_0, \Omega_1, \ldots \Omega_n \ldots)$.

Si $\mathscr{P}$ (resp. Q) est une partition de Ω (resp. Ω), on notera $\mathscr{P}_S$ (resp. Q_T) la partition $\bigvee_{-\infty}^{+\infty} S^n \mathscr{P}$ $\left(\text{resp. } \bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^n Q\right)$, $\mathscr{P}^-$ (resp. Q^-) la partition

$$\bigvee_{-\infty}^{-1} S^n \mathscr{P}^{-\infty} \left(\text{resp. } \bigvee_{-\infty}^{-1} T^n Q\right).$$

On notera ε la partition discrète, et v la partition grossière, quel que soit l'espace mesurable considéré.

(1.1) **Proposition.** *1) $\bar{\mathscr{P}}_T$ contient $\mathscr{P}_S^* \vee \mathscr{Z}$ (donc si $\mathscr{P}$ est génératrice pour S, $\bar{\mathscr{P}}$ est génératrice pour T).*

2) Si $S\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $\bar{\mathscr{P}}^-=(\mathscr{P}^-)^* \vee \mathscr{Z}$.

Démonstration. 1) $\bar{\mathscr{P}}_T$ contient (Ω_0, Ω_0^c), donc $\mathscr{Z}$; il est alors aisé de montrer que $\mathscr{P}^* \subset \bar{\mathscr{P}}_T$, ainsi que $(S^n \mathscr{P})^*$, donc $\mathscr{P}_S^* \subset \bar{\mathscr{P}}_T$.

2) Grâce au fait que $S\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{Z} \subset \bar{\mathscr{P}}^-$, puis $(S^{-n}\mathscr{P})^* \subset \bar{\mathscr{P}}^-$ pour tout $n>0$. Réciproquement, $T^{-n}\bar{\mathscr{P}}$ est contenu dans $(\mathscr{P}^-)^* \vee \mathscr{Z}$ pour tout $n>0$, d'où 2).

Le lemme technique suivant (dont la démonstration se trouve dans [11]) permet de montrer que $\mathscr{F}$ (et $S\mathscr{F}$) est d'entropie finie.

(1.1) **Lemme.** *Si la série de terme général μ_n vérifie*

$$\sum_1^\infty n\mu_n < +\infty, \quad \text{on a } -\sum_1^\infty \mu_n \operatorname{Log} \mu_n < +\infty.$$

En particulier, si $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partition de Ω et si la fonction qui vaut n sur A_n est intégrable, A_n est d'entropie finie.

On trouvera dans Parry [9] les définitions de l'entropie et de l'information conditionnelle.

Nous pouvons maintenant formuler la

(1.2) **Proposition.** *Soit $\mathscr{P}$ une partition mesurable quelconque de Ω. Alors*

$$H(\bar{\mathscr{P}}\,|\,\bar{\mathscr{P}}^-)=\frac{1}{E(f)}\,H(\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}\,|\,\mathscr{P}^-\vee S\mathscr{F}^-)\qquad si\ H(\mathscr{P}\,|\,\mathscr{P}^-)<+\infty,$$
$$=+\infty\qquad sinon.$$

Démonstration. D'après le lemme 1, $S\mathscr{F}$ est d'entropie finie, donc $\overline{S\mathscr{F}}$ aussi:

$$H(\overline{S\mathscr{F}})=\left(1-\frac{1}{E(f)}\right)\,\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{E(f)}\right)+\frac{1}{E(f)}\left(H(\mathscr{F})+\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{E(f)}\right)\right).$$

On peut donc appliquer la formule de Pinsker à $H(\overline{\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}}\,|\,\overline{\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}}^-)$ (si $H(\mathscr{P}|\mathscr{P}^-)<+\infty$):

$$H(\overline{\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}}\,|\,\overline{\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}}^-)=H(\bar{\mathscr{P}}\,|\,\bar{\mathscr{P}}^-)+H(\overline{S\mathscr{F}}\,|\,\overline{S\mathscr{F}}^-\vee(\bar{\mathscr{P}})_T).$$

Mais $\overline{S\mathscr{F}}\subset(\bar{\mathscr{P}})_T$: le deuxième terme du second membre est nul. Reste à évaluer le premier membre. Posons $Q=\overline{\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}}$.

$$H(Q\,|\,Q^-)=\int_\Omega \mathscr{I}(Q\,|\,Q^-)\,\bar{\mu}(d\bar{\omega})$$
$$=\int_{\Omega_0}\mathscr{I}(Q\,|\,Q^-)\,\bar{\mu}(d\bar{\omega})+\int_{\Omega_0^c}\mathscr{I}(Q\,|\,Q^-)\,\bar{\mu}(d\bar{\omega}).$$

Mais comme $(\Omega_0,\Omega_0^c)\subset Q^-$, on a d'une part

$$\mathscr{I}(Q\,|\,Q^-)_{|\Omega_0^c}=\mathscr{I}(v\,|\,Q^-_{|\Omega_0^c})=0,$$

d'autre part

$$\int_{\Omega_0}\mathscr{I}(Q\,|\,Q^-)_{|\Omega_0}=\int_{\Omega_0}\sum_{A\in Q}1_A\,\mu(A\,|\,Q^-)\,\bar{\mu}(d\bar{\omega})$$
$$=\int_\Omega\sum_{A\in\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}}1_A\,\mu(A\,|\,\mathscr{P}^-\vee S\mathscr{F}^-)\,\frac{\mu(d\omega)}{E(f)}$$
$$=\frac{1}{E(f)}\,H(\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}\,|\,\mathscr{P}^-\vee S\mathscr{F}^-),$$

ce qui achève la démonstration dans le cas où $H(\mathscr{P}\,|\,\mathscr{P}^-)<+\infty$; sinon, le calcul qui précède établit que $H(Q\,|\,Q^-)=+\infty$.

Corollaire. *Formule d'Abramov.*

$$h(T)=\frac{1}{E(f)}\,h(S).$$

Démonstration. Immédiate: si S est d'entropie infinie, il suffit de choisir $\mathscr{P}$ telle que $H(\mathscr{P}\,|\,\mathscr{P}^-)=+\infty$. Sinon, soit $\mathscr{P}$ une partition génératrice, qu'on peut choisir d'entropie finie (Parry [9]). Alors $H(\mathscr{P}\vee S\mathscr{F}\,|\,\mathscr{P}^-\vee S\mathscr{F}^-)=H(\mathscr{P}\,|\,\mathscr{P}^-)=h(S)$, et la proposition 2 établit le résultat.

1.2. Pour les systèmes dynamiques d'entropie infinie, on démontre l'existence de partitions extrêmales d'une forme particulière (voir Parry (9)). Elles sont du type suivant:

(1.1) *Définition.* Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, S)$ un système dynamique. Nous dirons qu'une partition $\mathscr{P}$ est *excellente* si:

1) Elle est génératrice et croissante.

2) Il existe une suite $(\mathscr{P}_n, n \in \mathbb{N})$, de partitions d'entropie finie telles que $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$, $\mathscr{P}_n \uparrow \mathscr{P}$, vérifiant la relation

$$H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_n^-) - H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}^-) \to 0 \qquad (n \to +\infty). \tag{1}$$

Il est facile de démontrer que $\bigwedge_0^\infty S^{-n} \mathscr{P}^- \subset \Pi$, donc toute partition excellente est extrémale. Les partitions excellentes ont aussi la propriété suivante:

(1.3) **Proposition.** *Si $\mathscr{P}$ est une partition excellente pour le facteur qu'elle engendre, $\mathscr{F}$ une partition d'entropie finie telle que $H(\mathscr{F} \mid \mathscr{F}^- \vee \mathscr{P}_S) = 0$, alors $\mathscr{P} \vee S\mathscr{F}^-$ est excellente pour le facteur qu'elle engendre.*

Démonstration. Nous allons montrer que si $(\mathscr{P}_n, n \in \mathbb{N})$ vérifie (1), $(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F}, n \in \mathbb{N})$ vérifie (1) également.

D'abord, pour tout $N > n$,

$$H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_n^- \vee \mathscr{F}^-) - H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^-) \geqq 0.$$

D'après la formule de Pinsker, le premier terme s'écrit:

$$H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_n^- \vee \mathscr{F}^-) = H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_n^-) + H(\mathscr{F} \mid (\mathscr{P}_n)_S \vee \mathscr{F}^-).$$

D'autre part, quand $N \to +\infty$, n étant fixé,

$$H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^-) \to H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}^- \vee \mathscr{F}^-).$$

Soit $\mathscr{P}_N^n$ une partition d'entropie finie telle que: $\mathscr{P}_n \vee \mathscr{P}_N^n = \mathscr{P}_N$. On a:

$$\begin{aligned} H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^-) = {} & H(\mathscr{P}_N \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^-) \\ & - H(\mathscr{P}_N^n \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^- \vee \mathscr{P}_n \vee \mathscr{F}); \end{aligned} \tag{2}$$

par la formule de Pinsker,

$$H(\mathscr{P}_N \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^-) = H(\mathscr{P}_N \mid \mathscr{P}_N^-) + H(\mathscr{F} \mid (\mathscr{P}_N)_S \vee \mathscr{F}^-) \tag{3}$$

et on peut enfin écrire

$$H(\mathscr{P}_N \mid \mathscr{P}_N^-) = H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_N^-) + H(\mathscr{P}_N^n \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{P}_n). \tag{4}$$

En reportant (3) puis (4) dans (2), il vient:

$$\begin{aligned} 0 \leqq {} & H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_n^- \vee \mathscr{F}^-) - H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^-) \\ = {} & (H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_n^-) - H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_N^-)) \\ & - H(\mathscr{F} \mid (\mathscr{P}_n)_S \vee \mathscr{F}^-) - H(\mathscr{F} \mid (\mathscr{P}_N)_S \vee \mathscr{F}^-) \\ & + (H(\mathscr{P}_N^n \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{F}^- \vee \mathscr{P}_n \vee \mathscr{F}) - H(\mathscr{P}_N^n \mid \mathscr{P}_N^- \vee \mathscr{P}_n)). \end{aligned} \tag{5}$$

En remarquant que le troisième terme du second membre est toujours négatif, faisons tendre N vers l'infini:

$$\begin{aligned}0 &\leqq H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}_n^- \vee \mathscr{F}^-) - H(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F} \mid \mathscr{P}^- \vee \mathscr{F}^-)\\ &\leqq (H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_n^-) - H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}^-)) + H(\mathscr{F} \mid (\mathscr{P}_n)_S \vee \mathscr{F}^-) - H(\mathscr{F} \mid \mathscr{P}_S \vee \mathscr{F}^-). \qquad (6)\end{aligned}$$

Le dernier terme de l'expression de droite vaut 0; comme $\mathscr{P}_{nS} \to \varepsilon$ quand $n \to +\infty$, on peut rendre l'avant-dernier aussi petit que l'on veut, et il en est de même du premier grâce à (1). La suite $(\mathscr{P}_n \vee \mathscr{F},\ n \in \mathbb{N})$ possède bien la propriété (1).

2. Partitions extrêmales des flots spéciaux

Nous allons maintenant appliquer les propositions 1.3 et 1.2 à l'obtention de partitions extrêmales pour les flots mesurables apériodiques d'entropie infinie. Le problème est de trouver une partition croissante *pour tous les automorphismes du flot*, génératrice et extrêmale (c'est à dire telle que $\lim_{n \to \infty} \Theta_{-n} \mathscr{P}^- = \Pi$, où Π est la partition de Pinsker, qui est la même pour tous les automorphismes du flot; Gurevič [5]).

On sait que tout flot mesurable peut se représenter comme flot sous une fonction (Ambrose et Kakutani [3]).

2.1. Voici d'abord une démonstration succinte de la seconde formule d'Abramov (Abramov [2]): soit g une fonction intégrable sur Ω, $g \geqq \alpha > 0$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{P}, (\Theta_t, t \in \mathbb{R}))$ le flot sur S sous g. La remarque essentielle d'Abramov, qui va nous servir dans la suite, est celle-ci: pour tout $t < \alpha$, l'induit de Θ_t sur le sous-ensemble de $\tilde{\Omega}$: $\Omega \times [0, t[$, que nous noterons S_t, s'écrit:

$$S_t(\omega, u) = (S\omega,\ u(\omega) - g(\omega) + n(\omega)\, t),$$

où $n(\omega)$ est le premier entier tel que $u - g + nt \geqq 0$.

Il est clair qu'il existe un facteur $\mathscr{X}$ sur lequel l'action de S_t est isomorphe à S; un évènement de $\mathscr{X}$ sera de la forme:

$$\{(\omega, u) \colon \omega \in A\}, \qquad \text{où } A \in \mathfrak{A}.$$

Le facteur $\mathscr{X}$ est principal: soit ξ la partition correspondante de $\Omega \times [0, t[$, dont les atomes sont les fibres au-dessus des points de Ω; soit $\mathscr{B}_k^1$ la partition de $\Omega \times [0, t[$ en les ensembles:

$$\left\{(\omega, u) \colon \frac{it}{2^n} \leqq u < \frac{(i+1)\,t}{2^n}\right\}, \qquad i = 0, \ldots, 2^{n-1}.$$

On a:

$$H\left(\bigvee_0^n S_t^n \mathscr{B}_k^1 \mid \xi\right) \leqq \operatorname{Log} k n,$$

car chaque fibre de ξ est découpée par $\bigvee_0^n S_t^n \mathscr{B}_k$ en au plus kn parties. Donc pour tout k,

$$H(\mathscr{B}_k^1 \mid \xi \vee \mathscr{B}_k^{1-}) = \lim \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n} S_t^i \mathscr{B}_k^1 \mid \xi\right) = 0$$

Comme $\varepsilon = \lim_{k\to+\infty} \xi \vee (\mathscr{B}_k^1)_S$, ceci entraîne que ξ est principale; la seconde formule d'Abramov résulte alors de la proposition 1.2.

2.2. Nous allons définir les partitions suivantes, $\mathscr{P}$ étant une partition quelconque de $(\Omega, \mathfrak{A})$:

sur $\Omega \times [0, 1[$: la partition $\mathscr{P}^1$ formée des atomes $((\omega, u)\colon \omega \in A)$ où A est un atome de $\mathscr{P}$; les partitions $\mathscr{B}_k^1$ définies comme en 2.1, et $\mathscr{B}^1 = \bigvee_k \mathscr{B}_k^1$.

sur $\tilde{\Omega}$, les partitions $\overline{\mathscr{P}^1}$, $\overline{\mathscr{B}_k^1}$, $\overline{\mathscr{B}^1}$ définies à partir des précédentes suivant les notations du paragraphe *I*, ainsi que $\hat{\mathscr{P}}$ formée des atomes $[(\omega, u)\colon \omega \in A]$ où A est un atome de $\mathscr{P}$. $\mathscr{B}$ la partition "horizontale" de $\tilde{\Omega}$, d'atomes $[(\omega, u)\colon u = u_0]$, $u_0 \geqq 0$.

Voici maintenant une proposition qui donne le résultat cherché dans un cas particulier, auquel nous verrons ensuite qu'on peut toujours se ramener:

(2.1) **Proposition.** *Si* $g \geqq \alpha \geqq 0$ *est mesurable par rapport à une partition* $\mathscr{P}$ *excellente pour* S, $\hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}$ *est alors:*

1) *croissante pour le flot* Θ_t,

2) *excellente pour l'automorphisme* Θ_α *du flot.*

Démonstration. Pour simplifier, supposons que $\alpha = 1$.

1) démonstration élémentaire en considérant ce que deviennent les atomes par action de Θ_{-t}; on pourra trouver une autre démonstration dans Lazaro et Meyer (6).

2) Notons d'abord que $\hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}$ est le passé de la partition $\overline{S\mathscr{P}^1} \vee \overline{\mathscr{B}^1}$ pour Θ_1: en effet,

$$\Theta_1(\hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}) = \overline{S\mathscr{P}^1} \vee \overline{\mathscr{B}^1};$$

mais par ailleurs, $(\overline{S\mathscr{P}^1} \vee \overline{\mathscr{B}^1})^-$ contient $\mathscr{B}$ tout entier (les atomes de $\mathscr{B}$ sont réunion de ces atomes, grâce au fait que g est $\mathscr{P}$-mesurable), donc aussi $\hat{\mathscr{P}}$, donc

$$(\overline{S\mathscr{P}^1} \vee \overline{\mathscr{B}^1})^- = \hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}.$$

Nous allons voir que $\hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}$ est excellente. Soit $\mathscr{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de partitions d'entropie finie croissant vers $\mathscr{P}$ et vérifiant (1).

Montrons alors qu'il existe une suite n_k tendant vers $+\infty$, telle que $\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1}$ vérifie (1).

Comme alors $\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} \to \overline{S\mathscr{P}^1} \vee \overline{\mathscr{B}^1}$ quand $h \to +\infty$, cela établira la proposition. Il faut montrer que, quand $k \to +\infty$,

$$H(\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} \mid (\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1})^-) - H(\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} \mid \hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}) \to 0$$

Evaluons d'abord le second terme:

$\overline{\mathscr{B}_k^1}$ est contenu dans $\mathscr{B}$, et un raisonnement analogue à celui qui est utilisé dans la démonstration de la proposition 1.2 montre que

$$H(\overline{S\mathscr{P}_n^1} \mid \hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}) = \frac{1}{E(g)} H(S\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}). \tag{7}$$

Plaçons-nous maintenant dans $\Omega \times [0, 1[$.

$$H(S\mathscr{P}_n^1 \mid (S\mathscr{P}_n^1)^-) - H(S\mathscr{P}_n^1 \mid \mathscr{P}^{1\,-}) = H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}_n^-) - H(\mathscr{P}_n \mid \mathscr{P}^-), \tag{8}$$

donc la suite $S\mathscr{P}_n^1$ vérifie (1). Par ailleurs, la partition $\mathscr{P}^1$ engendre un facteur principal. Si f est la fonction à valeurs entières permettant de construire $(\tilde{\Omega}, \Theta_1)$ au-dessus de S_1, $\mathscr{F}$ la partition correspondante (d'entropie finie), et si k est donné, il existe n_k tel que

$$\begin{aligned} &H(S\mathscr{P}_{n_k}^1 \vee \mathscr{B}_k \vee S\mathscr{F} \mid (S\mathscr{P}_{nk}^1 \vee \mathscr{B}_k \vee S\mathscr{F})^-) - H(S\mathscr{P}_{nk}^1 \mid S\mathscr{P}_{nk}^{1\,-}) \\ &\quad = H(\mathscr{B}_k \vee S\mathscr{F} \mid (S\mathscr{P}_{n_k}^1)_{S_1} \vee \mathscr{B}_k^- \vee S\mathscr{F}^-) \leqq \varepsilon. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la proposition 1.2 à: $\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} = \overline{S\mathscr{P}_n^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1}$: il vient

$$\begin{aligned} &H(\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} \mid \overline{S\mathscr{P}_{n_k}^{1\,-}} \vee \overline{\mathscr{B}_k^{1\,-}}) - \frac{1}{E(g)} H(S\mathscr{P}_n^1 \mid S\mathscr{P}_n^{1\,-}) \\ &\quad = \frac{1}{E(g)} [H(S\mathscr{P}_n^1 \vee \mathscr{B}_k \vee S\mathscr{F} \mid (S\mathscr{P}_n^1 \vee \mathscr{B}_k \vee S\mathscr{F})^-) - H(S\mathscr{P}_n^1 \mid S\mathscr{P}_n^{1\,-})] \\ &\quad \leqq \varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

En appliquant (7), (8) et (9), il vient:

$$\lim_{k \to \infty} H(\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} \mid \overline{S\mathscr{P}_{n_k}^{1\,-}} \vee \overline{\mathscr{B}_k^{1\,-}}) - H(\overline{S\mathscr{P}_{n_k}^1} \vee \overline{\mathscr{B}_k^1} \mid \hat{\mathscr{P}} \vee \mathscr{B}) = 0$$

ce qui achève la démonstration.

2.3. Nous en arrivons maintenant au résultat essentiel. Rudolph [10] a démontré que tout flot mesurable apériodique peut se représenter comme flot sous une fonction à deux valeurs seulement; ceci revient à dire la chose suivante:

– pour tout flot spécial $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mu}, \Theta_t)$ il existe une partition mesurable (A, A^c), non triviale, et deux réels positifs a et b tels que toute orbite du flot coupe A suivant une réunion d'intervalles disjoints de longueur a, et A^c suivant une réunion d'intervalles disjoints de longueur b.

(2.2) **Proposition.** *Tout flot mesurable admet une partition croissante, excellente pour* Θ_c. $(c = \inf(a, b).)$

Démonstration. Grâce à la propriété précédente, un flot mesurable peut se représenter sous la forme d'un flot sous une fonction g à 2 valeurs (les valeurs sont le a et le b de la propriété, la base, les points d'entrée dans A et leurs images par Θ_a tant qu'elles restent dans A, et les points d'entrées dans A^c ainsi que les images par Θ_b tant qu'elles restent dans A^c).

Munissons la base d'une partition excellente $\mathscr{P}$. Si $\mathscr{G}$ est la partition finie de la base induite par les valeurs de g, $\mathscr{P} \vee S\mathscr{G}^-$ est excellente d'après la proposition 1.3, donc, d'après la proposition 2.1, $(\mathscr{P} \vee S\mathscr{G}^-)^* \vee \mathscr{B}$ est une partition croissante par le flot et excellente pour Θ_c, où $c = \inf(a, b)$.

Remarque. Si l'on suppose en outre que le flot est ergodique, il est possible de montrer beaucoup plus facilement l'existence de partitions parfaites à partir des résultats de Rudolph [10] quand l'entropie est finie; cette démonstration, qui utilise le fait que le passé lointain d'une partition génératrice finie est égal à la tribu de Pinsker, ne peut évidemment être utilisée dans le cas qui nous intéresse.

Références

1. Abramov, L.M.: The entropy of a derived automorphism. Amer. Math. Soc. Transl., 2, **49**, 162–166 (1965)
2. Abramov, L.M.: On the entropy of a flow. Amer. Math. Soc. Transl., 2, **49**, 167–170 (1965)
3. Ambrose, W., Kakutani, S.: Structure and continuity of measurable flows. Duke Math. J. **9**, 25–42 (1942)
4. Friedman, N.: Introduction to ergodic theory. Princeton: Van Nostrand Reinhold 1970
5. Gurevič, B.M.: Some existence conditions for K-decompositions for special flows. Trans. Moscow Math. Soc. **17**, 99–126 (1967)
6. Sam Lazaro, J. de, Meyer, P.A.: Questions de théorie des flots. Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. **465**, 1–96. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
7. Neveu, J.: Une démonstration simple et une extension de la formule d'Abramov. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **13**, 135–140 (1969)
8. Ornstein, D.S.: Ergodic theory, randomness and dynamical systems. New Haven and London: Yale 1974
9. Parry, W.: Entropy and generators in ergodic theory. New York: Benjamin 1969
10. Rudolph, D.: A two-valued step coding for ergodic flows. (A paraître)
11. Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K.: Ergodic theory on compact spaces. Lecture Notes in Math. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (A paraître)
12. Krengel, U.: Darstellungssätze für Strömungen und Halbströmungen. Math. Ann. **182**, 1–39 (1969)

Reçu le 15 octobre 1975