Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
65, 421-444 (1984)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Semi-martingales indexées par une partie de $\mathbb{R}^d$ et formule de Ito. Cas continu

Marie-France Allain

U.E.R. Mathématiques, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

1. Introduction

Si $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une semi-martingale à trajectoires continues, nous savons que $f(X)$ est également use semi-martingale à trajectoires continues, pour toute fonction f deux fois continuement dérivable.

De plus, la formule de Itô permet de donner une représentation de $f(X)$ sous forme de somme d'intégrales stochastiques:

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_0^t f'(X_s)\,dX_s+\tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X\rangle_s.$$

Pour les semi-martingales représentables $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+^2}$, nous retrouvons une situation analogue, à condition que f soit quatre fois continuement dérivable.

La formule de Itô donnée par Wong et Zakaï [11] nécessite alors l'introduction de nouveaux types d'intégrales stochastiques.

Dans ces deux cas, les différentes intégrales stochastiques intervenant dans l'écriture de la formule de Itô peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrales stochastiques par rapport aux puissances de X (X et X^2 dans le premier cas; X, X^2, X^3, X^4 dans le second cas).

La définition 4-1 des $L_p(P)$-semi-martingales d'ordre m, indexées par une partie de $\mathbb{R}^d$, tient compte de cette remarque et généralise la notion de semi-martingale.

La proposition 4.5 (conséquence directe de la définition 4.1) donne la formule de Itô, pour les polynômes de degré inférieur ou égal à m, quand X est une $L_p(P)$-semi-martingale d'ordre m, continue.

Pour X, $L_0(P)$-semi-martingale d'ordre infini, continue et vérifiant 4.7.1 (cette condition est satisfaite pour toutes les semi-martingales continues indexées par $\mathbb{R}_+$) nous établissons une formule de Itô en utilisant les propriétés des puissances de X (théorème 4.7).

Les paragraphes 2 et 3 concernent les notations, définitions et hypothèses de base, ainsi qu'un rappel sur les mesures stochastiques [9] le paragraphe 4 est consacré aux semi-martingales et à la formule de Itô.

Le paragraphe 5 donne quelques exemples.

2. Preliminaires

2.1. Notations

Un élément de $\mathbb{R}^d$ est défini par ses composantes t^i, $i \in \{1, \ldots, d\}$; nous considérons sur $\mathbb{R}^d$ la relation d'ordre notée $\leqq$ et définie par:

$$s \leqq t \Leftrightarrow s^i \leqq t^i \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Nous écrivons $s < t$ si $s^i < t^i$ pour tout i de $\{1, \ldots, d\}$. Nous désignons par $]\!]s, t]\!]$ l'ensemble des éléments u de $\mathbb{R}^d$ vérifiant: $s < u \leqq t$.

Nous considérons par la suite un rectangle $T =]\!]a, b]\!]$, $\bar{T}$ désignera le fermé: $[\![a, b]\!] = \{u : a \leqq u \leqq b\}$. Nous notons $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties de T de la forme $]\!]s, t]\!]$ $(a \leqq s,\ t \leqq b)$.

Pour $A =]\!]s, t]\!]$, nous définissons $|A|$ par:

$$|A| = \operatorname*{Sup}_{i=1 \ldots d} |t^i - s^i|.$$

La mesure de Lebesgue sur T sera notée λ.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une famille $(\mathscr{G}_A)_{A \in \mathscr{A}}$ de sous-tribus de $\mathscr{F}$ vérifiant:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathscr{G}_B \subseteq \mathscr{G}_A.$$

Un ensemble de la forme $A \times F$ $(A \in \mathscr{A},\ F \in \mathscr{G}_A)$ est appelé rectangle prévisible, l'ensemble des rectangles prévisibles est noté $\mathscr{R}$, l'algèbre engendrée par $\mathscr{R}$ est notée $\mathscr{R}'$.

Nous appelons tribu prévisible, la tribu $\mathscr{P}$ sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathscr{R}$. Un processus $h = (h_t)_{t \in T}$ est prévisible si et seulement si l'application h:

$$\begin{aligned} T \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\rightsquigarrow h(t, \omega) \end{aligned}$$

est $\mathscr{P}$-mesurable, $\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu borélienne.

Nous notons $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles bornés et $\mathscr{E}$ le sous-espace de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ constitué des processus prévisibles simples, c'est-à-dire des processus prévisibles de la forme:

$$h = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{A_i \times F_i}, \qquad r \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ A_i \times F_i \in \mathscr{R}.$$

Soit $X = (X_t)_{\in \bar{T}}$ un processus sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, nous notons $\mathscr{F}_t^X$ la tribu engendrée par $(X_s)_{s \leqq t}$ et nous désignons par J_c l'ensemble des processus X à valeurs réelles vérifiant:

- les trajectoires de X sont continues.
- $\mathscr{F}_t^X \subseteq \mathscr{G}_{]\!]t, b]\!]}$ pour tout t élément de $\bar{T}$.

Pour X élément de J_c nous pouvons définir un processus X^* par: $X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|$; (le processus X^* appartient à J_c). Notons que pour tout processus $X = (X_t)_{t \in \bar{T}}$ appartenant à J_c, le processus $(X_t)_{t \in T}$ est un processus prévisible.

Nous introduisons les espaces suivants de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$\mathscr{C}_m(\mathbb{R}^n) = \{f\colon m$ fois continuement différentiable$\}$

$\mathscr{C}^b(\mathbb{R}^n) = \{f\colon$ continue et bornée$\}$

$\mathscr{C}_r^b(\mathbb{R}^n) = \{f\colon r$ fois continuement différentiable, f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre r sont bornées$\}$.

Nous introduisons également l'espace suivant de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathscr{K}_m(\mathbb{R}) = \{f\colon m$ fois continuement différentiable et la dérivée d'ordre m est bornée$\}$.

Pour une fonction f de $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ nous noterons $f^{(r)}$ la dérivée d'ordre r ($r \in \{1 \dots m\}$) et f^k la fonction telle que $f^k(x) = (f(x))^k$.

Enfin, si f appartient à $L_p(P) = L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, nous définissons $\|f\|_p$ par:

$$\|f\|_p = \begin{cases} [E^P(|f|^p)]^{1/p} & 1 \leq p < +\infty \\ E^P(|f|^p) & \text{si } 0 < p \leq 1 \\ E^P(|f| \wedge 1) & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

$\|\cdot\|_p$ est une quasi-norme (une norme si $p \geq 1$) définissant la topologie usuelle de $L_p(P)$. (Pour $p=0$, il s'agit de la topologie de la convergence en probabilité).

2.2. *Formule de Taylor*

(2.2.1) *Notations.* Soit $A = \rrbracket s, t \rrbracket$ un élément de $\mathscr{A}$ et soit I une partie de $\{1, \dots, d\}$, nous notons ε^I l'élément de $\{-1, +1\}$ défini par:

$$\varepsilon^I = (-1)^{d\text{-card}\, I}.$$

Nous notons $\alpha(I, A)$ l'élément de $\bar{T}$ défini par:

$$(\alpha(I, A))^i = \begin{cases} t^i & \text{si } i \in I \\ s^i & \text{si } i \notin I. \end{cases}$$

Pour $A = \rrbracket s, t \rrbracket$, nous avons toujours $\alpha(\{1, \dots, d\}, A) = t$ et $\alpha(\emptyset, A) = s$. Dans le cas particulier où $d=2$, nous avons $\alpha(\{1\}, A) = (t^1, s^2)$ et $\alpha(\{2\}, A) = (s^1, t^2)$.

Soit maintenant F une fonction de $\mathscr{C}_d(\mathbb{R}^d)$, en utilisant les notations 2.2.1 nous pouvons écrire pour A élément de $\mathscr{A}$:

$$\int_A \frac{\partial^d F}{\partial s^1 \dots \partial s^d} \lambda(ds) = \sum_{I \neq \emptyset} \varepsilon^I [F(\alpha(I, A)) - F(\alpha(\emptyset, A))].$$

Le membre de droite de cette égalité est défini si nous remplaçons F par une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}^d$ et en particulier si nous remplaçons F par un processus $X = (X_t)_{t \in \bar{T}}$.

(2.2.2) *Définitions.* Pour tout processus $X=(X_t)_{t\in \bar{T}}$ nous définissons $\Delta_A X$ par:

$$\Delta_A X=\sum_{I\neq\emptyset}\varepsilon^I(X_{\alpha(I,A)}-X_{\alpha(\emptyset,A)})$$

et plus généralement pour k appartenant à $\mathbb{N}^*$

$$\Delta_A^{(k)}X=\sum_{I\neq\emptyset}\varepsilon^I(X_{\alpha(I,A)}-X_{\alpha(\emptyset,A)})^k.$$

Notons que $\Delta_A^{(1)}X=\Delta_A X$ et que $\Delta_A^{(2)}X=(X_t-X_s)^2$ quand $d=1$ et $A=]s,t]$.

(2.2.3) **Proposition.** *Soient X appartenant à J_c, f appartenant à $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ et $A=]\!]s,t]\!]$. Alors*

$$\Delta_A f(X)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}f^{(k)}(X_s)\,\Delta_A^{(k)}X+R(f,A,m)$$

avec

$$\begin{aligned}R(f,A,m)=\sum_{I\neq\emptyset}&\varepsilon^I(X_{\alpha(I,A)}-X_s)^m\\ &\cdot\int_0^1\frac{(1-u)^{m-1}}{(m-1)!}(f^{(m)}(X_s+u(X_{\alpha(I,A)}-X_s))\\ &\quad-f^{(m)}(X_s))\,du.\end{aligned}$$

Démonstration. La formule de Taylor appliquée à f donne:

$$\begin{aligned}f(X_{\alpha(I,A)})-f(X_s)=&\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}f^{(k)}(X_s)(X_{\alpha(I,A)}-X_s)^k\\ &+(X_{\alpha(I,A)}-X_s)^m\int_0^1\frac{(1-u)^{m-1}}{(m-1)!}(f^{(m)}(X_s+u(X_{\alpha(I,A)}-X_s))\\ &-f^{(m)}(X_s))\,du.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser les définitions (2.2.2) pour achever la démonstration.

3. Mesure stochastique et intégrale Stochastique

3.1. Définition. On appelle $L_p(P)$-mesure stochastique une application simplement additive μ, définie sur $\mathscr{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ et vérifiant:

(3.1.1) $\mu(A\times F)=1_F\quad \mu(A\times F)\quad \forall A\times F\in\mathscr{R}$
(3.1.2) $\mu(\mathscr{R}')$ est une partie bornée de $L_p(P)$
(3.1.3) $\lim_n \|\mu(R_n)\|_p=0$ pour toute suite décroissante $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}$ telle que $\bigcap_n R_n=\emptyset$.

Il résulte de cette définition, qu'une mesure stochastique μ se prolonge en une fonction de $\mathscr{P}$ dans $L_p(P)$, σ-additive pour la topologie usuelle de $L_p(P)$ [9]. Ce prolongement sera également noté μ.

A tout processus $X=(X_t)_{t\in\bar{T}}$ nous pouvons associer une application μ^X

vérifiant (3.1.1) en posant:

$$\mu^X(A \times F) = 1_F \quad \Delta_A X \qquad \forall A \times F \in \mathscr{R}$$

μ^X ainsi définie s'étend en une application simplement additive définie sur $\mathscr{E}$ (et donc sur $\mathscr{R}'$) en posant:

$$(3.2) \quad \mu^X(h) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X \quad \forall h \in \mathscr{E}, \qquad h = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{A_i \times F_i}.$$

De plus, si X_t appartient à $L_p(P)$ pour tout t, alors $\mu^X(\mathscr{E}) \subseteq L_p(P)$.

3.3. Définition. Soit X un processus, si μ^X est une $L_p(P)$-mesure stochastique, nous dirons que le processus X définit une $L_p(P)$-mesure stochastique.

3.4. Proposition. *Soit* $X = (X_t)_{t \in \bar{T}}$.

X définit une $L_p(P)$-mesure stochastique si et seulement si μ^X vérifie (3.1.2) *et* (3.1.3).

Si μ est une $L_p(P)$-mesure stochastique, le théorème C.3 de [9] permet de définir l'intégrale stochastique par rapport à μ, des processus de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$.

Voici une version de ce théorème.

3.5. Théorème. *Soit μ une $L_p(P)$-mesure stochastique.*

Il existe alors une application unique, notée également μ, définie sur $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$, à valeurs dans $L_p(P)$ et qui satisfait aux conditions suivantes:

(3.5.1) *Pour tout*

$$h = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{A_i \times F_i}, \qquad h \in \mathscr{E}$$

$$\mu(h) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu(A_i \times F_i).$$

(3.5.2) *Pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$, uniformément bornée, convergeant simplement vers un processus h, la suite $(\mu(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu(h)$ dans $L_p(P)$.*

(3.5.3) *Pour tout h de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$, l'application de $\mathscr{P}$ dans $L_p(P)$ qui a D élément de $\mathscr{P}$ associe $\mu(1_D h)$ est une $L_p(P)$-mesure stochastique.*

Par une méthode standard [4], nous pouvons étendre le domaine de définition de l'intégrale stochastique par rapport à μ, à une classe de processus prévisibles notée $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$. (Les processus prévisibles h tels que $\sup_{t \in T} |h(t)|$ soit $\mathscr{F}$-mesurable et fini P.p.s appartiennant à $\mathscr{L}_1(\mu, L_0(P))$).

Si h appartient à $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$, nous dirons que h est μ-intégrable et nous utiliserons parfois la notation $\int h\,dX$ au lieu de $\mu^X(h)$.

Les propriétés de l'extension sont données par le théorème suivant qui généralise le théorème 3.5.

3.6. Théorème. *Soit μ une $L_p(P)$-mesure stochastique.*

Il existe alors une application unique, notée également μ, définie sur $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$, à valeurs dans $L_p(P)$, vérifiant (3.5.1) *et*

(3.6.1) *Pour toute suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$ *qui converge simplement vers h, en étant dominée par un élément de* $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$, *la limite h appartient à* $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$ *et la suite* $(\mu(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\mu(h)$ *dans* $L_p(P)$.

(3.6.2) *Pour tout h de* $\mathscr{L}_1(\mu, L_p(P))$, *l'application de* $\mathscr{P}$ *dans* $L_p(P)$ *qui à D élément de* $\mathscr{P}$ *associe* $\mu(1_D h)$ *est une* $L_p(P)$*-mesure stochastique.*

3.7. *Exemples.* Soient $T=]\!]0,1]\!]\subseteq\mathbb{R}^d$, $(\Omega, \mathscr{F}, P, (X_t)_{t\in T})$ un drap brownien et $\mathscr{G}_{]\!]s,t]\!]} = \sigma(X_u, u\leqq s)$.

Alors pour tout h de $\mathscr{E}$, $\|\mu^X(h)\|_2^2 = E(\int h_s^2\,\lambda(ds))$.

Il est alors facile de vérifier que μ^X est une $L_2(P)$-mesure stochastique et que

$$\mathscr{L}_1(\mu^X, L_2(P)) = L_2(T\times\Omega, \mathscr{P}, \lambda\otimes P).$$

Nous donnons maintenant quelques propriétes des $L_0(P)$-mesures stochastiques qui nous seront utiles au paragraphe suivant.

3.8. Proposition. *Soit* μ *une* $L_0(P)$*-mesure stochastique et soit Q une probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{F})$ *absolument continue par rapport à P.*

Alors μ *est une* $L_0(Q)$*-mesure stochastique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier (3.1.2) et (3.1.3) pour $p=0$ et Q, mais ceci résulte immédiatement de l'absolue continuité de Q par rapport à P.

3.9. Proposition. *Soit* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de probabilités sur* $(\Omega, \mathscr{F})$ *et*

$$P=\sum_n a_n P_n \quad \text{où} \quad a_n>0 \quad \text{et} \quad \sum_n a_n = 1.$$

Soit μ *une fonction simplement additive définie sur* $\mathscr{R}'$ *telle que pour chaque n,* μ *soit une* $L_0(P_n)$*-mesure stochastique. Alors* μ *est une* $L_0(P)$*-mesure stochastique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier (3.1.2) et (3.1.3) pour $p=0$ et P. Notons que dans le cas $p=0$, (3.1.2) est équivalent à:

(3.9.1) Pour toute suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs qui tend vers zéro et pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}'$

$$\lim_n \|\lambda_n\,\mu(h_n)\|_0 = 0.$$

La propriété (3.9.1) est satisfaite pour chaque P_n, en utilisant la définition de P et le théorème de la convergence dominée pour les séries, on montre que (3.9.1) est satisfaite pour P.

Démontrons maintenant (3.1.3).

Pour toute suite décroissante $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}$ telle que:

$$\bigcap_k R_k = \emptyset, \quad \text{on a} \quad \lim_k E^{P_n}(|\mu(R_k)|\wedge 1) = 0.$$

Les mêmes arguments que précédemment permettent alors d'affirmer que:

$$\lim_k E^P(|\mu(R_k)|\wedge 1) = 0.$$

D'où (3.1.3).

4. Semi-Martingales

Soient $d=1$ et X une semi-martingale au sens ordinaire, on sait alors que X définit une $L_0(P)$-mesure stochastique. (Nous avons également la réciproque d'après le théorème de Mokobodzki-Dellacherie).

Nous savons également que si X est continue et si f est une fonction de $\mathscr{C}_2(\mathbb{R})$, alors $f\circ X$ est une semi-martingale et la formule de Itô permet d'écrire:

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_0^t f'(X_0)\,dX_s+\tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X\rangle_s.$$

En particulier, pour tout entier k, X^k est une semi-martingale et définit une $L_0(P)$-mesure stochastique. Notons μ^k la mesure stochastique définie par X^k, alors pour tout élément h de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$, nous avons, d'après la formule de Itô:

$$\begin{cases} k=1 & \mu^1(h)=\mu^X(h) \\ \forall\, k\geqq 2 & \mu^k(h)=k\int h_s X_s^{k-1}\,dX_s+\dfrac{k(k-1)}{2}\int h_s X_s^{k-2}\,d\langle X\rangle_s. \end{cases}$$

Définissons alors les mesures $\mu^{(k)}$ par:

$$\mu^{(k)}(h)=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,C_k^r\,\mu^r(hX^{k-r})\qquad (h\in\mathscr{H}_b(\mathscr{P}),\ k\geqq 1)$$

un calcul rapide montre que $\mu^{(1)}(h)=\mu^1(h)=\mu^X(h)$, $\mu^{(2)}(h)=\int h_s\,d\langle X\rangle_s$, $\mu^{(k)}\equiv 0$ si $k\geqq 3$.

D'autre part, l'étude de la formule de Itô donnée par Wong et Zakaï pour les semi-martingales représentables ($d=2$) [11] montre que les différents termes intervenant dans cette formule peuvent s'exprimer à l'aide des mesures stochastiques définies par les puissances de X, de plus dans ce cas $\mu^{(k)}=0$ si $k\geqq 5$ (cf. 5-5).

4.1. Définition. Un processus X appartenant à J_c est une $L_p(P)$-semi-martingale d'ordre m ($m\in\mathbb{N}^*$) si:

(4.1.1) $\forall\, k=1,\dots,m$ le processus X^k définit une $L_p(P)$-mesure stochastique, notée μ^k.

(4.1.2) $\forall\, k=1,\dots,m$ le processus $(X^*)^{m-k}$ est μ^k-intégrable.

4.2. Notations.

(4.2.1) $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$ est l'ensemble des éléments de J_c qui sont des $L_p(P)$-semi-martingales d'ordre m.

(4.2.2) $\mathscr{S}_c^\infty(L_p(P))=\bigcap_m \mathscr{S}_c^m(L_p(P))$.

4.3. Remarques.

(4.3.1) Quand $p=0$, la continuité des éléments de J_c implique (4.1.2).

(4.3.1) Si $(X^*)^{m-k}$ est μ^k-intégrable, alors $(1 \vee (X^*)^{m-k})$ est: μ^k intégrable, et tout processus prévisible h tel que le processus $h(1 \vee (X^*)^{m-k})^{-1}$ soit borné est μ^k-intégrable.

4.4. Notations. Pour $l \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}^l(\mathscr{P})$ désigne l'espace vectoriel des processus prévisibles h tels que $h(1 \vee (X^*)^l)^{-1}$ soit borné, nous définissons $\mathscr{H}^\infty(\mathscr{P})$ par:

$$\mathscr{H}^\infty(\mathscr{P}) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathscr{H}^l(\mathscr{P}).$$

Nous avons évidemment, $\mathscr{H}^{m-k}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{L}_1(\mu^k, L_p(P))$ quand X appartient à $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$ et $m \geqq k$.

4.5. Proposition. *Soit X appartenant à $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$. Il existe alors des $L_p(P)$-mesures stochastiques $\mu^{(k)}$, $k = 1, \ldots, m$, telles que:*

$$(4.5.1) \quad \mu^{(k)}(h) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r \mu^r(hX^{k-r}) \qquad (h \in \mathscr{H}_b(\mathscr{P}))$$

$$(4.5.2) \quad \mu^k(h) = \sum_{r=1}^{k} C_k^r \mu^{(r)}(hX^{k-r}) \qquad (h \in \mathscr{H}_b(\mathscr{P}))$$

Les mesures $\mu^{(k)}$ $k = 1, \ldots, m$ sont appelées: mesures engendrées par X.

Démonstration. Pour $r \leqq k \leqq m$ nous avons:

$$|X^{k-r}| \leqq 1 \vee (X^*)^{m-r}.$$

Cette inégalité implique que hX^{k-r} appartient à $\mathscr{H}^{m-r}(\mathscr{P})$ pour tout h élément de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$. En conséquence la formule (4.5.1) a bien un sens et définit une $L_p(P)$-mesure stochastique.

(4.5.2) découle de (4.5.1), car les éléments de $\mathscr{H}^{m-r}(\mathscr{P})$ sont $\mu^{(r)}$-intégrables et $\sum_{r=j}^{k} C_k^r C_r^j (-1)^{r-j}$ vaut 1 si $k = j$ et 0 si k est strictement plus grand que j.

4.6. Définition. Soit X élément de $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$, pour $k = 1 \ldots m$ les processus $X^{(k)}$ sont définis par:

$$\begin{cases} X_t^{(k)} = \mu^{(k)}(]\!]a, t]\!] \times \Omega & \text{si } t \in T \\ X_t^{(k)} = 0 & \text{si } t \in \bar{T} - T. \end{cases}$$

Les mesures stochastiques $\mu^{(k)}$ $k = 1, \ldots, m$ sont donc définies par ces processus $X^{(k)}$.

Le théorème qui suit est le principal de cet article.

4.7. Théorème (Formule de Itô). *Soit X un élément de $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$ tel que*

(4.7.1) $\exists m \in \mathbb{N}^*: \quad \forall k \geqq m+1 \quad \mu^{(k)} \equiv 0.$

Alors, pour toute fonction f de $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$, nous avons:

(4.7.2) *$f \circ X$ appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$.*

(4.7.3) *La mesure stochastique* $\mu^{f\circ X}$ *vérifie:*

$$\mu^{f\circ X}(D)=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\mu^{(r)}(1_D f^{(r)}\circ X)\qquad \forall D\in\mathscr{P}$$

et en particulier, nous avons

$$\Delta_{]\!]s,t]\!]}f\circ X=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\int_{]\!]s,t]\!]}f^{(r)}(X_u)\,dX_u^{(r)}.$$

De plus, si nous notons $(v^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *les* $L_0(P)$*-mesures stochastiques définies par* $((f\circ X)^k)$ *et* $(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *les* $L_0(P)$*-mesures stochastiques engendrées par* $f\circ X$, *ces mesures stochastiques vérifient:*

(4.7.4) $$v^k(D)=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\mu^{(r)}(1_D(f^k)^{(r)}\circ X)\qquad (D\in\mathscr{P})$$

(4.7.5) *pour* $k=1,\dots,m-1$

$$v^{(k)}(D)=\sum_{j=k}^{m}\frac{1}{j!}\mu^{(j)}\left(1_D\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,C_k^r(f^r)^{(j)}\circ X\cdot f^{k-r}\circ X\right)\quad (D\in\mathscr{P})$$

(4.7.6) $$v^{(m)}(D)=\mu^{(m)}(1_D(f')^m\circ X)\qquad (D\in\mathscr{P})$$

(4.7.7) $v^{(k)}\equiv 0$ *pour* $k\geqq m+1$

Démonstration. A. Pour démontrer (4.7.2), il suffit de prouver que pour toute fonction f de $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$, $f\circ X$ définit une $L_0(P)$-mesure stochastique. (Car si f appartient à $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$, f^k appartient à $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ pour tout entier k).

Si f est un monôme, les hypothèses faites sur X et les relations entre les $L_0(P)$-mesures stochastiques $(\mu^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ données par la proposition 4.5 impliquent immédiatement (4.7.2) et (4.7.3).

Si maintenant f est un polynôme, (4.7.2) et (4.7.3) s'obtiennent par linéarité.

B. Nous démontrons maintenant que $f\circ X$ définit une $L_0(P)$-mesure stochastique satisfaisant à (4.7.3) quand f appartient à $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ et $|X|$ borné par constante a.

Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes tels que:

$$\forall r=0,\dots,m\qquad \lim_n \sup_x 1_{[-a,a]}(x)\ |f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|=0.$$

En conséquence, pour tout r appartenant à $\{1,\dots,m\}$, la suite $(f_n^{(r)}\circ X)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f^{(r)}\circ X$ en restant bornée; et pour chaque n, nous avons:

(4.7.3) $$\mu^{f_n\circ X}(D)=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\mu^{(r)}(1_D f_n^{(r)}\circ X)\qquad (D\in\mathscr{P}).$$

En passant à la limite dans le membre de droite de cette égalité, nous pouvons définir une $L_0(P)$-mesure stochastique que nous notons

$$v(D)=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r!}\mu^{(r)}(1_D f^{(r)}\circ X)\qquad (D\in\mathscr{P})$$

Mais, pour $D=A\times F$ élément de $\mathscr{R}$, nous avons:

$$\mu^{f_n\circ X}(D)=1_F\,\Delta_A f_n \quad \text{et} \quad \lim_n \|\mu^{f_n\circ X}(D)-1_F\,\Delta_A f\circ X\|_0=0$$

En conséquence $\nu=\mu^{f\circ X}$ et $f\circ X$ satisfait aux propriétés voulues.

C. Nous passons maintenant au cas général.

Nous nous ramenons d'abord au cas X borné par un changement de probabilité.

Soit $G_n=\{\omega\colon X_1^*\leqq n\}$. La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{F}$, et, X étant continue, $\Omega=\bigcup_n G_n$.

Soit alors N, tel que $P(G_N)\neq 0$; pour $n\geqq N$, nous définissons une probabilité P_n, absolument continue par rapport à P en posant:

$$P_n(G)=\frac{P(G\cap G_n)}{P(G_n)} \qquad (G\in\mathscr{F}).$$

D'après 3.8, X appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P_n))$ et d'après B, X étant borné sous P_n, $f\circ X$ définit une $L_0(P_n)$-mesure stochastique qui satisfait à (4.7.3) pour toute fonction f de $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$.

Soit alors $Q=\sum_{n\geqq N} a_n P_n$ $(a_n>0,\ \sum_{n\geqq N} a_n=1)$, d'après 3.9 $f\circ X$ définit une $L_0(Q)$-mesure stochastique, et, Q étant équivalente à P, 3.8 implique que $f\circ X$ définit une $L_0(P)$-mesure stochastique. Il est facile de vérifier que (4.7.3) est satisfait.

D. Nous abordons maintenant la démonstration de (4.7.4), (4.7.5), (4.7.6), (4.7.7).

La formule de Itô (4.7.3), implique immédiatement (4.7.4).

Nous utilisons (4.5.1) pour écrire:

$$\nu^{(k)}(D)=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,\mathrm{C}_k^r\,\nu^r(1_D f^{k-r}\circ X) \qquad (D\in\mathscr{P}).$$

En utilisant l'expression de ν^r donnée par (4.7.4), nous obtenons:

$$\text{(4.7.8)}\quad \nu^{(k)}(D)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!}\,\mu^{(j)}\left(1_D\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,\mathrm{C}_k^r(f^r)^{(j)}\circ X\cdot f^{k-r}\circ X\right).$$

Remarquons que $\nu^{(1)}=\nu^1=\mu^{f\circ}X$.

Supposons $k>1$, nous allons montrer:

$$\text{(4.7.9)}\quad \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,\mathrm{C}_k^r(f^r)^{(j)}f^{k-r}=0 \qquad \forall k,\ \forall j\colon\ k>j.$$

Pour cela, nous remarquons d'abord que pour $j=1$ et pour $k>1$, nous avons:

$$\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,\mathrm{C}_k^r(f^r)'f^{k-r}$$
$$=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\,\mathrm{C}_k^r\,rf'f^{k-1}=\left(\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^{k-1-p}\,\mathrm{C}_{k-1}^p\right)kf'f^{k-1}=0.$$

Supposons que (4.7.9) soit vrai jusqu'à j en dérivant cette égalité nous obtenons:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r (f^r)^{(j+1)} f^{k-r} \\ & + f' \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k-r} C_k^r (f^r)^{(j)} f^{k-1-r} (k-r) \end{aligned}$$

mais pour $k > j+1$ c'est-à-dire $k-1 > j$, nous avons, par suite de l'hypothèse de récurrence:

$$\sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k-r-1} C_{k-1}^r (f^r)^{(j)} f^{k-1-r} = 0$$

d'où (4.7.9) pour $j+1$.

De (4.7.8) et (4.7.9) nous déduisons (4.7.5) et (4.7.7).

Pour prouver (4.7.6), il suffit de prouver:

$$\text{(4.7.10)} \quad \frac{1}{m!} \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} C_m^r (f^r)^{(j)} f^{m-r} = (f')^m.$$

Il est facile de vérifier que (4.7.10) est vrai pour $m = 1, 2$.

Supposons alors que (4.7.10) est vrai jusqu'à l'ordre m. D'après (4.7.9), nous avons pour $j = m$ et $k = m+1$

$$\sum_{r=1}^{m+1} (-1)^{m+1-r} C_{m+1}^r (f^r)^{(m)} f^{m+1-r} = 0.$$

En dérivant cette égalité, nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^{m+1-r} C_{m+1}^r (f^r)^{(m+1)} f^{m+1-r} \\ & \quad + \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m+1-r} C_{m+1}^r (f^r)^{(m)} (m+1-r) f^{m-r} f' = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^{m+1-r} C_{m+1}^r (f^r)^{(m+1)} f^{m+1-r} \\ & \quad = (m+1) f' \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} C_m^r (f^r)^{(m)} f^{m-r}. \end{aligned}$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence, le deuxième membre de cette égalité est égal à $(m+1)!(f')^{m+1}$; (4.7.10) est donc démontré.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour avoir la formule de Itô (4.7.3) pour une fonction f de $\mathcal{K}_m(\mathbb{R})$, quans X appartient à $\mathcal{S}_c^m(L_p(P))$. Pour la démonstration, nous utilisons la formule de Taylor (2.2.3). Rappelons que la proposition 4.5 donne la formule de Itô pour f polynôme de degré inférieur ou égal à m.

4.8. Théorème. *Soit X appartenant à $\mathcal{S}_c^m(L_p(P))$.*

Nous supposons de plus que, pour tout A de $\mathscr{A}$, il existe une suite de partitions $((A_j^n)\ j=1\dots j_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de A, de plus en plus fines vérifiant:

i) $A_j^n \in \mathscr{A}$

ii) $\lim_n \operatorname{Sup}\{|A_j^n|\ j=1\dots j_{(n)}\}=0$

iii) $\forall I \subseteq \{1\dots d\}$

$$\lim_n \left\| \sum_{j=1}^{j(n)} |X_{\alpha(I,A_j^n)} - X_{\alpha(\emptyset,A_j^n)}|^{m+1} \right\|_0 = 0.$$

Alors pour toute fonction f de $\mathscr{K}_m(\mathbb{R})$, *$f\circ X$ appartient à $\mathscr{S}_c^1(L_p(P))$ et vérifie* (4.7.3) *(l'égalité ayant lieu dans $L_p(P)$).*

Voici d'abord un lemme qui donne une autre définition des mesures $\mu^{(r)}$ ($r=1\dots m$).

4.9. Lemme. *Soient X appartenant à $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$, et f appartenant à $\mathscr{C}^b(\mathbb{R})$, A appartenant à $\mathscr{A}$ et $\{A_j^n, j=1\dots j_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de partitions de plus en plus fines de A, et vérifiant* 4.8 i) *et* ii).

Alors pour tout $r=1\dots m$, nous avons:

$$\lim_n \left\| \mu^{(r)}(1_A f\circ X) - \sum_{j=1}^{j(n)} f(X_{\alpha(\emptyset,A_j^n)})\, \Delta_{A_j^n}^{(r)} X \right\|_p = 0 \tag{4.9.1}$$

et en particulier

$$\lim_n \left\| \mu^{(r)}(A\times\Omega) - \sum_{j=1}^{j(n)} \Delta_{A_j^n}^{(r)} X \right\|_p = 0. \tag{4.9.2}$$

Démonstration. La formule de Taylor (2.2.3) donne pour $A=]\!]s,t]\!]$ et $f(x)=x^k$

$$\Delta_A X^k = \sum_{r=1}^{k} C_k^r X_s^{k-r} \Delta_A^{(r)} X$$

d'où l'on déduit

$$\Delta_A^{(r)} X = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k X_s^{r-k} \Delta_A X^k.$$

Par suite, en posant $s_j^n = \alpha(\emptyset A_j^n)$

$$\sum_{j=1}^{j(n)} f(X_{s_j^n})\, \Delta_{A_j^n}^{(r)} X = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k \left[\sum_{j=1}^{j(n)} f(X_{s_j^n}) X_{s_j^n}^{r-k} \Delta_{A_j^n} X^k \right].$$

Pour k, r et n fixés, nous pouvons définir un processus prévisible h^n par:

$$h^n = \sum_{j=1}^{j(n)} f(X_{s_j^n}) X_{s_j^n}^{r-k} 1_{A_j^n}.$$

La suite $(h^n)_{n\geq 1}$ est dominée par $\|f\|_\infty (1 \vee (X^*)^{m-k})$ qui appartient à $\mathscr{H}^{m-k}(\mathscr{P})$ et converge simplement vers $h=f(X)X^{r-k}1_A$ le résultat découle alors du fait que $\mathscr{H}^{m-k}(\mathscr{P})$ est inclus dans $\mathscr{L}_1(\mu^k, L_p(P))$ et de (4.5.1).

Démonstration du théorème 4.8. Soient $A\in\mathscr{A}$ et $\{(A_j^n)\, j=1\ldots j(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de partitions associée à A et soit $s_j^n=\alpha(\emptyset, A_j^n)$. D'après (2.2.3), on a pour $f\in\mathscr{K}_m(\mathbb{R})$:

$$(4.8.1)\quad \Delta_A f(X)=\sum_{j=1}^{j(n)} \Delta_{A_j^n} f(X)$$
$$=\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!}\left(\sum_{j=1}^{j(n)} f^{(r)}(X_{s_j^n})\,\Delta_{A_j^n}^{(r)} X\right)+\sum_{j=1}^{j(n)} R(f, A_j^n, m).$$

Supposons d'abord que f appartienne à $\mathscr{C}_{m+1}^b(\mathbb{R})$.

D'après le lemme 4.9, nous avons, pour r élément de $\{1\ldots m\}$:

$$\lim_n \left\|\sum_{j=1}^{j(n)} f^{(r)}(X_{s_j^n})\,\Delta_{A_j^n}^{(r)} X-\mu^{(r)}(f(X)\cdot 1_A)\right\|_p=0$$

l'égalité (4.8.1) implique alors que $R_n=\sum_{j=1}^{j(n)} R(f, A_j^n, m)$ converge vers une limite dans $L_p(P)$; il suffit donc de montrer que $\lim_n \|R_n\|_0=0$, pour obtenir (4.7.3).

Mais pour une fonction f de $\mathscr{C}_{m+1}^b(\mathbb{R})$, il existe une constante C telle que

$$|R(f, A_j^n, m)|\leqq C\sum_I |X(\alpha(I, A_j^n))-X(s_j^n)|^{m+1}$$

et l'hypothèse iii) implique que $\lim_n \|R_n\|_0=0$.

Si maintenant $f\in\mathscr{K}_m(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}_{m+1}^b(\mathbb{R})$ pour laquelle la suite $(f_n^{(r)}\circ X)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f^{(r)}\circ X$ en étant dominée dans $\mathscr{H}^{m-r}(\mathscr{P})$ $(r\in\{1\ldots m\})$.

Il suffit alors d'écrire la formule de Itô pour chaque f_n et de passer à la limite pour obtenir la formule pour f.

4.10. Remarques. La condition iii) est suffisante, mais non nécessaire; prenons par exemple $d=2$ et $X_t=t^1 t^2$, pour $t\in]\!]0,1]\!]$, si on considère la suite de partition $((A_{k,j}^n)\quad k=0,\ldots,2^{n-1};\quad j=0,\ldots,n-1,\quad n\in\mathbb{N}^*)$ telle que $A_{k,j}^n$ $=]\!](k/2^n, j/n), ((k+1)/2^n, (j+1)/n)$ la condition iii) n'est pas satisfaite pour $I=\{2\}$ et $m=2$ et pourtant X_t est une semi-martingale telle que $\mu^{(k)}=0$ si $k\geqq 3$.

Si $d=1$, iii) est satisfaite.

Nous donnons maintenant quelques corollaires des théorèmes 4.7 et 4.8.

4.11. Corollaire. *Soit X appartenant à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P)$, alors l'hypothèse* (4.7.1) *est équivalente à l'assertion suivante:*

(4.11.1) $\forall f\in\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ $f\circ X$ *définit une $L_0(P)$-mesure stochastique satisfaisant à* (4.7.3).

Démonstration. Il suffit de montrer que (4.11.1) implique (4.7.1) et ceci résulte de la comparaison de (4.7.3) appliquée à $f(x)=x^k$ et de (4.5.2) pour k quand $k>m$.

4.12. Corollaire. *Soit X borné appartenant à $\mathscr{S}_c^\infty(L_p(P))$ et vérifiant* (4.7.1).

Alors $\forall f \in \mathscr{C}_m(\mathbb{R})\, f \circ X$ *appartient à* $\mathscr{S}_c^\infty(L_p(P))$ *et vérifie* (4.7.3), (4.7.4), (4.7.5), (4.7.6) et (4.7.7).

Démonstration. Les parties A, B et D restent valables pour p et suffisent dans ce cas.

4.13. Corollaire. *Soit* X *appartenant à* $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$ *et satisfaisant aux hypothèses du théorème* 4.8.

Alors i) X *appartient à* $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$ *et vérifie* (4.7.1).

ii) $\forall f \in \mathscr{C}_m^b(\mathbb{R})\, f \circ X$ *appartient à* $\mathscr{S}_c^\infty(L_p(P))$ *et vérifie* (4.7.1).

Démonstration. Si X appartient à $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$, X appartient également à $\mathscr{S}_c^m(L_0(P))$.

Si $|X|$ est borné, il est évident que (4.7.3) s'étend aux fonctions de $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ et en particulier aux fonctions de la forme $f(x)=x^k$ $k\in\mathbb{N}^*$ d'où on déduit que X appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$ et vérifie (4.11.1) et donc aussi (4.7.1) d'après 4.11.

On passe au cas général (en utilisant 3.8 et 3.9) par la méthode utilisée dans la partie C de la démonstration du théorème 4.7.

ii) est immédiat, car pour toute fonction de $\mathscr{C}_m^b(\mathbb{R})\, f^k$ appartient également à $\mathscr{C}_m^b(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que (4.7.1) est satisfait.

4.14. Corollaire. *Soit* X *appartenant à* $\mathscr{S}_c^m(L_p(P))$ *et satisfaisant aux hypothèses de* 4.8. *On suppose de plus que les processus de* $\mathscr{H}^\infty(\mathscr{P})$ *sont intégrables pour* μ^k, $k=1\dots m$, *alors* X *appartient à* $\mathscr{S}_c^\infty(L_p(P))$ *et vérifie* (4.7.1).

Démonstration. La formule de Itô (4.7.3) s'étend alors à $f(x)=x^k$ ($k\in\mathbb{N}$) et on en déduit (4.7.1) à l'aide de (4.5.1).

Elle s'étend également à toute fonction f de $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ telle que $f^{(m)} \circ X \in \mathscr{H}^\infty(\mathscr{P})$, il est alors facile de voir que $f \circ X$ est une $L_p(P)$-semi-martingale d'ordre infini vérifiant également (4.7.1).

Nous terminerons ce paragraphe par deux remarques.

(4.15) Soit $\mathscr{A}^r$ l'opérateur défini sur $\mathscr{C}_m(\mathbb{R})$ par:

$$\mathscr{A}^r f(x) = \frac{1}{r!} \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} \frac{1}{k-r!} x^{k-r} f^{(k)}(x).$$

En utilisant la définition de $\mu^{(r)}$ ($r=1\dots m$), la formule de Itô peut s'écrire en utilisant uniquement μ^r ($r=1\dots m$):

$$\Delta_A f(X) = \sum_{r=1}^{m} \mu^r(\mathscr{A}^r f(X) \cdot 1_A).$$

(4.16) Si $k \neq 1$ l'application: $A \to \Delta_A^{(k)} X$ n'est pas additive; considérons cependant les applications $\psi^{r,k}(1 \leq r \leq k \leq m)$ de $\mathscr{E}$ dans $L_p(P)$ qui à $h=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i \times F_i}$ associent:

$$\psi^{r,k}(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X_{\alpha(\emptyset, A_i)})^{k-r} 1_{F_i} \Delta_{A_i}^{(r)} X.$$

Si les fonctions $\psi^{r,k}$ $(1 \leqq r \leqq k \leqq m)$ satisfont à (3.1.2) et (3.1.3), il est possible de prouver l'existence des mesures stochastiques μ^k $(k=1\ldots m)$ et des mesures stochastiques $\mu^{(k)}$ $(k=1\ldots m)$.

5. Exemples

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques exemples de processus appartenant à $\mathcal{S}_c^m(L_p(P))$ ainsi que des exemples de processus vérifiant (4.7.1).

Pour tout ce qui suit, nous supposons que $d=2$ et $T=]\!]0,1]\!]$. Nous supposons également l'existence d'une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\bar{T}}$ de soustribus de $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions habituelles.

Pour $A=]\!]s,t]\!]$, nous prenons $\mathcal{G}_A=\mathcal{F}_s$, par suite de cette définition un processus $X=(X_t)_{t\in\bar{T}}$, à trajectoires continues, appartiennent à J_c.

Nous ne considérons que des éléments de J_c qui sont nuls sur les axes.

Pour la définition et les propriétés des différentes notions de martingales, nous nous référons à Cairoli et Walsh [5].

Rappelons cependant quelques notations et propriétés utilisées ici.

5.1. *Notations*

(5.1.1) La notations $s \perp t$ pour s et t éléments de $\bar{T}$, signifie s et t non comparables.

Nous notons $T^{(2)}$ le sous-ensemble de T^2 constitué des couples (s,t) d'éléments non comparables, et nous notons γ la fonction indicatrice de $T^{(2)}$.

Pour s et t éléments de T, nous notons $s \vee t$ l'élément de T de composantes $(s^i \vee t^i)_{i=1,2}$.

(5.1.2) Nous introduisons les familles suivantes de sous-tribus de $\mathcal{F}_1$

$$\mathcal{F}_t^1 = \bigvee_v \mathcal{F}_{t^1,v} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t^2 = \bigvee_u \mathcal{F}_{u,t^2}.$$

5.2. *Propriétés et hypothèses*

Nous supposons que l'hypothèse »F_4« est satisfaite; cette hypothèse est la suivante:

$$F_4\colon \forall t \in \bar{T} \quad \mathcal{F}_t^1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_t^2 \text{ sont indépendantes sachant } \mathcal{F}_t.$$

Cette hypothèse est automatiquement satisfaite dans les deux cas suivants:

(5.2.1) X est un processus tel que pour toute famille $(A_i)_i=1\ldots n$ d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$, les variables aléatoires $(\Delta_{A_i}X)_{i=1\ldots n}$ sont indépendantes et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leqq t)$.

(5.2.2) $(\mathcal{F}_u^1)_{u\in[0,1]}$ et $(\mathcal{F}_u^2)_{u\in[0,1]}$ sont deux familles de sous-tribus de $\mathcal{F}$, indépendantes, et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^1}^1 \vee \mathcal{F}_{t^2}^2$.

(5.2.3) **Propriété.** *Soit X un processus tel que $(X_{(u,0)})_{u\in[0,1]}$ soit une martingale relativement à la famille $(\mathscr{F}^1_{(u,0)})_{u\in[0,1]}$ et $(X_{(v,0)})_{v\in[0,1]}$ soit une martingale relativement à la famille $(\mathscr{F}^2_{(0,v)})_{v\in[0,1]}$. Alors, sous F_4, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *X est une martingale*

ii) *X est une 1-martingale et une 2-martingale.*

(5.2.4) **Propriété.** *Soit X une martingale de carré intégrable.*

Alors il existe un processus croissant noté $[X]$ tel que $X^2-[X]$ soit une martingale faible.

(5.2.5) **Propriété.** *Soit X une martingale forte de carré intégrable.*

Nais supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite:

i) *$(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ est engendrée par le drap brownien*

ii) *X est continue et $E(X_t^4)<+\infty$.*

Alors, il existe un processus croissant prévisible unique, noté $\langle X\rangle$ tel que $X^2-\langle X\rangle$ soit une martingale.

5.3. Cas d'un processus dont les trajectoires sont de classe C_2

Soit X un tel processus, il est évident que pour tout entier k, X^k définit une $L_0(P)$-mesure stochastique, en conséquence X appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$.

D'autre part, pour $k\geqq 2$ nous avons:

$$X_t^k=k\int_{]\!]0,t]\!]} X_s^{k-1}\,dX_s+k(k-1)\int_{]\!]0,t]\!]} X_s^{k-2}\frac{\partial X}{\partial s^1}(s)\frac{\partial X}{\partial s^2}(s)\,ds.$$

De cette égalité, nous déduisons:

$$\mu^{(2)}(h)=2\int h_s\frac{\partial X}{\partial s^1}(s)\frac{\partial X}{\partial s^2}(s)\,ds$$

$$\mu^{(k)}\equiv 0 \quad \text{pour } k>2.$$

5.4. Cas des martingales et des martingales fortes

(5.4.1) **Lemme.** *Toute martingale de carré intégrable définit une $L_2(P)$-mesure stochastique.*

Démonstration. Soit X une martingale de carré intégrable et soit h un élément de $\mathscr{E}$; h peut se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^r \alpha_i 1_{A_i}$ $(\alpha_i\in\mathscr{G}_{A_i},\ A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\neq j)$.

Alors $\mu^X(h)=\sum_{i=1}^r \alpha_i\Delta_{A_i}X$ et

$$\|\mu^X(h)\|_2^2=\sum_{i=1}^r E(\alpha_i^2\Delta_{A_i}[X])=E\left(\int h_s^2\,d[X]_s\right).$$

D'où on déduit (3.1.2) et (3.1.3).

Il résulte de ce lemme que toute martingale de carré intégrable, continue, appartient à $\mathscr{S}_c^1(L_2(P))$.

(5.4.2) **Lemme.** *Soit X une martingale forte continue telle que $E(X_t^4) < +\infty$. Alors X et X^2 définissent des $L_2(P)$-mesures stochastiques.*

Démonstration. Notons que, par suite des hypothèses, X et $X^2 - \langle X \rangle$ sont des martingales de carré intégrable ($\langle X \rangle$ est de carré intégrable).

Le lemme (5.4.1) implique alors que X et $X^2 - \langle X \rangle$ définissent des $L_2(P)$-mesure stochastique; d'où le lemme.

5.5. *Semi-martingales représentables*

Considérons d'abord le cas particulier du drap brownien $(\Omega, \mathscr{F}, P, \beta)$. Il est possible, en utilisant les propriétés de $\Delta_A \beta$, de montrer directement que β appartient à $\mathscr{S}_c^4(L_2(P))$ et satisfait aux hypothèses du théorème 4.8, puis de prouver que β appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$ et vérifie: $\mu^{(k)} \equiv 0$ si $k \geqq 5$.

En examinant le cas des semi-martingales représentables et en utilisant la formule de Itô donnée par Wong et Zakaï [11], nous allons retrouver en particulier ce dernier résultat et de plus donner des expressions de $\beta^{(k)}$, $k = 1 \dots 4$ sous forme de semi-martingales représentables.

Les intégrales qui suivent sont définies dans [7] et [11].

(5.5.1) *Définition.* Une semi-martingale représentable est un processus X tel que:

$$X_t = \int_{]\!]0,t]\!]} \sigma(s)\, d\beta_s + \int_{]\!]0,t]\!]} \psi(u,v)\, d\beta_u\, d\beta_v + \int_{]\!]0,t]\!]^2} f(u,v)\, du\, d\beta_v + \int_{]\!]0,t]\!]^2} g(u,v)\, d\beta_u\, dv + \int_{]\!]0,t]\!]} \theta(s)\, ds$$

où i) σ et θ sont des processus prévisibles tels que:

$$\sup_{t \in T} |\sigma(t)| \quad \text{et} \quad \sup_{t \in T} |\theta(t)| \quad \text{sont finis } P \text{ p.s.}$$

ii) ψ, f et g appartiennent à l'ensemble des processus mesurables h indexés par T^2 et vérifiant

$$\begin{cases} h(u,v) = \gamma(u,v)\, h(u,v) \\ h(u,v) \text{ est } \mathscr{F}_{u \vee v}\text{-mesurable} \\ \sup_{u,v \in T} |h(u,v)| < +\infty \; P \text{ p.s.} \end{cases}$$

iii) les intégrales appartiennent à $L_0(P)$ pour chaque t.

5.5.2. Lemme. *Une semi-martingale représentable X définit une $L_0(P)$-mesure stochastique.*

Démonstration. Supposons que σ et θ appartiennent à $L_2(T \times \Omega, B(T) \otimes \mathscr{F}, \lambda \otimes P)$ et que ψ, f et g appartiennent à $L_2(T^2 \times \mathscr{F}, B(T^2) \otimes \mathscr{F}, \lambda \otimes \lambda \otimes P)$. Soit Y_t

$= \int_{]\!]0,t]\!]} \sigma(s)\,d\beta_s$, Y est dans ce cas une martingale forte de carré intégrable et d'après 5.4.1., Y définit une $L_2(P)$-mesure stochastique.

De plus, nous avons pour tout h élément de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$

$$\mu^Y(h) = \int_T h(s)\,\sigma(s)\,d\beta_s \quad \text{et} \quad \|\mu^Y(h)\|_2 = \|h\sigma\|_2.$$

Soit $Z_t = \int_{]\!]0,t]\!]} \theta(s)\,ds$, Z définit une $L_2(P)$-mesure stochastique et pour tout h élément de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ nous avons:

$$\mu^Z(h) = \int_T h(s)\,\theta(s)\,ds \quad \text{et} \quad \|\mu^Z(h)\|_2 \leqq \|h\theta\|_2.$$

Soit $U_t = \int_{]\!]0,t]\!]^2} \psi(u,v)\,d\beta_u\,d\beta_v$, U est une martingale de carré intégrable et d'après (5.4.1), U définit une $L_2(P)$-mesure stochastique.

De plus, en utilisant les propriétés de β et la propriété suivante:

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \forall B \in \mathscr{A} \quad \text{tels que} \quad A \times B \subseteq T^{(2)}$$

$$\int_{A \times B} d\beta_u\,d\beta_v = \Delta_A \beta \Delta_B \beta$$

il est facile de vérifier ([3]) que pour tout processus h élément de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ on a:

$$\mu^U(h) = \int_{T^2} h(u \vee v)\,\psi(u,v)\,d\beta_u\,d\beta_v$$

et

$$\|\mu^U(h)\|_2 = E\Big(\int_{T^2} \gamma(u,v)\,(h(u \vee v)\,\psi(u,v))^2\,du\,dv\Big).$$

Soient maintenant les processus V et W tels que:

$$V_t = \int_{]\!]0,t]\!]^2} f(u,v)\,du\,d\beta_v$$

$$W_t = \int_{]\!]0,t]\!]^2} g(u,v)\,d\beta_u\,dv.$$

Les deux cas étant similaires, nous examinerons seulement le cas de V.

Nous remarquons d'abord que pour tout élément h de $\mathscr{E}$ nous avons:

$$\mu^V(h) = \int_{T^2} h(u \vee v)\,f(u,v)\,du\,d\beta_v$$

d'où

$$\|\mu^V(h)\|_2 \leqq E\Big(\int_{T^2} (h(u \vee v)\,f(u,v))^2\,du\,dv\Big).$$

Cette inégalité implique que (3.1.2) et (3.1.3) sont satisfaites. En conséquence, V définit une $L_2(P)$-mesure stochastique.

Les processus Y, Z, U, V et W définissant des $L_2(P)$-mesures stochastiques, définissent également des $L_0(P)$-mesures stochastiques.

Le passage au cas général se fait en utilisant 3.8 et 3.9.

(5.5.3) **Lemme.** *Toute semi-martingale représentable appartient à* $\mathcal{S}_c^\infty(L_0(P))$ *et satisfait aux hypothèses du théorème* 4.7 *pour* $m=4$.

Démonstration. Nous utilisons la formule de Itô donnée par Wong et Zakaï [11], pour une fonction f de $\mathscr{C}_4(\mathbb{R})$.

En regroupant difféemment les termes, cette formule se met sous la forme suivante:

$$(5.5.4)\quad f(X_t)-f(X_0)=\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{r!}\int_{]\!]0,t]\!]} f^{(r)}(X_s)\,d\bar{X}_s^{(r)}.$$

Notons d'abord que $\bar{X}^{(1)}=X$, avant de donner les expressions de $\bar{X}^{(r)}$ pour $r=2,3,4$, nous introduisons les processus C, D, $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ suivants:

$$C(t,v)=\sigma(v)+\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,\psi(u,v)\,d\beta_u+\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,f(u,v)\,du.$$

$$D(t,v)=\theta(v)+\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,g(u,v)\,d\beta_u$$

$$\tilde{C}(t,u)=\sigma(u)+\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,\psi(u,v)\,d\beta_v+\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,g(u,v)\,dv$$

$$\tilde{D}(t,u)=\theta(u)+\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,f(u,v)\,d\beta_v.$$

Dans les expressions qui suivent C et D ont les arguments $(u\vee v,v)$, $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ les arguments $(u\vee v,u)$, ψ, f et g les arguments (u,v).

$$\begin{aligned}
\bar{X}_t^{(2)}&=\int_{]\!]0,t]\!]}(\sigma(u))^2\,du+2\int_{]\!]0,t]\!]^2}C\tilde{C}\,d\beta_u\,d\beta_v\\
&\quad+2\int_{]\!]0,t]\!]}(\tilde{C}D+\psi C)\,d\beta_u\,dv\\
&\quad+2\int_{]\!]0,t]\!]}(C\tilde{D}+\psi\tilde{C})\,du\,d\beta_v\\
&\quad+2\int_{]\!]0,t]\!]^2}\gamma(u,v)\left(D\tilde{D}+g\tilde{C}+fC+\tfrac{1}{2}\psi^2\right)du\,dv\\
\bar{X}_t^{(3)}&=3\int_{]\!]0,t]\!]^2}C(\tilde{C})^2\,du\,d\beta_v\\
&\quad+3\int_{]\!]0,t]\!]^2}\tilde{C}C^2\,d\beta_u\,dv\\
&\quad+6\int_{]\!]0,t]\!]^2}\gamma(u,v)\left(C\tilde{C}\psi+\tfrac{1}{2}D(\tilde{C})^2+\tfrac{1}{2}\tilde{D}C^2\right)du\,dv\\
\bar{X}_t^{(4)}&=6\int_{]\!]0,t]\!]^2}\gamma(u,v)\,(C\tilde{C})^2\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Les processus $\bar{X}^{(k)}$, $k=1\dots4$ ne sont pas des semi-martingales représentables au sens de (5.5.1); cependant il est facile de voir que, pour toute fonction f vérifiant (5.5.1) ii), le processus Y tel que $Y_t=\int_{]\!]0,t]\!]^2}f(u,v)\,du\,dv$ définit une $L_0(P)$)-mesure stochastique.

En conséquence, les processus $\bar{X}^{(k)}$, $k=1\dots4$ définissent des $L_0(P)$-mesures stochastiques; par suite de (5.5.4) $f\circ X$ définit une $L_0(P)$)-mesure stochastique, pour toute fonction f de $\mathscr{C}_4(\mathbb{R})$, en particulier pour $f(x)=x^k$, nous en déduisons que X appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$. En comparant la formule (5.5.4) pour $f(x)=x^k$ ($k\in\mathbb{N}^*$) et la formule (4.5.1) ($k\in\mathbb{N}^*$), on vérifie que les mesures stochastiques définies par les processus $\bar{X}^{(k)}_{k=1,2,3,4}$ sont précisément les mesures $(\mu^{(k)})_{k=1,2,3,4}$ et que $\mu^{(k)}\equiv 0$ pour $k\geqq 5$.

D'après la démonstration précédente, nous avons dans le cas particulier du drap brownien:

$$\beta_t^{(2)}=t^1\,t^2+2\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,d\beta_u\,d\beta_v$$

$$\beta_t^{(3)}=3\int_{]\!]0,t]\!]^2}\gamma(u,v)\,du\,d\beta_v+3\int_{]\!]0,t]\!]}\gamma(u,v)\,d\beta_u\,dv$$

$$\beta_t^{(4)}=1\;\;2\int_{]\!]0,t]\!]}u^1u^2\,du=3(t^1\,t^2)^2$$

$$\beta_t^{(k)}=0\quad\text{pour}\;\;k\geqq 5.$$

5.6. Mesure-produit

Précisons d'abord ce que nous entendons par mesure-produit.

Soient $X=(X_t)_{t\in[0,1]}$ et $Y=(Y_t)_{t\in[0,1]}$ deux processus indépendants et Z tel que $Z_t=X_{t^1}\,X_{t^2}$ pour $t=(t^1,t^2)$. Si Z définit une $L_p(P)$-mesure stochastique, cette mesure et appelée mesure-produit.

La famille $(\mathscr{F}_t)_{t\in\bar{T}}$ de sous-tribu de $\mathscr{F}$ est ici définie par:

$$\mathscr{F}_t=\sigma(X_u,u\leqq t^1)\vee\sigma(Y_v,v\leqq t^2).$$

Dans ce qui suit, nous nous restreignons au cas où X et Y sont deux martingales continues de carré intégrable, le cas où X et Y sont deux semi-martingales est tout à fait similaire bien que plus long à traiter.

(5.6.1) **Propriété.** *Soient X et Y deux martingales, indexées par* $[0,1]$, *de carré intégrables, continues, indépendantes, soit Z tel que $Z_t=X_{t^1}\,Y_{t^2}$* ($t\in[0,1]^2$).

Alors Z appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$ et satisfait aux hypothèses du théorème 4.7 *pour* $m=4$.

La démonstration se fera à l'aide de trois lemmes (les idées directrices sont les mêmes que dans le cas des semi-martingales représentables).

Avant de les démontrer, rappelons qu'une martingale de carré intégrable $X=(X_t)_{t\in[0,1]}$ est en particulier un élément de $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$ tel que

$$\mu^{(2)}(A\times F)=1_F\,\Delta_A\langle X\rangle\quad\text{et}\quad\mu^{(k)}\equiv 0\quad\text{si}\;\;k\geqq 3.$$

(5.6.2) **Lemme.** *Soient X et Y deux processus croissants indexés par* $\mathbb{R}_+$, *de carré intégrable et indépendants.*

Alors, pour tout processus $h=(h_t)_{t\in T}$, nous avons:

$$E\Big[\Big(\int_T h(u,v)\,dX_u\,dY_v\Big)^2\Big]\leqq\int_{T\times\Omega}(h(u,v))^2\,X_1\,Y_1\,dX_u\,dY_v\,dP.$$

(5.6.3) **Lemme.** *Soit Z satisfaisant aux hypothèses de la propriété* (5.6.1) *et soit* $h=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{A_i \times F_i}$ *un élément de $\mathscr{E}$.*

$$\text{Alors } \left\| \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} Z \right\|_2^2 = \int_{T \times \Omega} h^2(u,v)\, d\langle X \rangle_u\, d\langle Y \rangle_v\, dP.$$

Démonstration. Afin d'alléger l'écriture, nous introduisons a_i, b_i, c_i, d_i $(i=1 \dots r)$ tels que:

$$\alpha(\emptyset, A_i) = (a_i, b_i)$$
$$\alpha(I, A_i) = (c_i, d_i).$$

Avec ces notations, nous avons:

$$\Delta_{A_i} Z = (X_{c_i} - X_{a_i})(Y_{d_i} - Y_{b_i}).$$

Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des processus prévisibles et bornés de la forme $h=\sum_{i=1}^{r} \gamma_i 1_{A_i}$ ($A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, γ_i variable aléatoire $\mathscr{F}_{(a_i, b_i)}$-mesurable et bornée). La fonction simplement additive μ^Z s'étend à $\mathscr{E}_1$ de façon naturelle en posant:

$$\mu^Z\left(\sum_{i=1}^{r} \gamma_i 1_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \Delta_{A_i} Z.$$

Soit $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}_1$ de la forme:

$$h = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i 1_{A_i}$$

où $A_i \in \mathscr{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, α_i est une variable aléatoire bornée et $\sigma(X_u, u \leqq a_i)$-mesurable, β_i est une variable aléatoire bornée et $\sigma(Y_v, v \leqq b_i)$-mesurable.

Pour $h=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i 1_{A_i}$, élément de $\mathscr{E}_2$, nous avons

- $E(\alpha_i^2 \beta_i^2 (\Delta_{A_i} Z)^2) = E(\alpha_i^2 \beta_i^2 (\langle X \rangle_{c_i} - \langle X \rangle_{a_i})(\langle Y \rangle_{d_i} - \langle Y \rangle_{b_i})$
- pour $i \neq j$ $\quad E(\alpha_i \alpha_j (X_{c_i} - X_{a_i})(X_{c_j} - X_{a_j})) = 0$
  ou $\quad E(\beta_i \beta_j (Y_{d_i} - Y_{b_i})(Y_{d_j} - Y_{b_j})) = 0$
  d'où

$$\|\mu^Z(h)\|_2^2 = \int_{T \times \Omega} h^2(u,v)\, d\langle X \rangle_u\, d\langle Y \rangle_v\, dP$$

$\mathscr{E}_2$ n'est pas un espace vectoriel, cependant si h_1 et h_2 sont des éléments de $\mathscr{E}_2$, alors $h=h_1+h_2$ appartient à $\mathscr{E}_1$ et l'égalité précédente reste valable pour h (ceci se prouve par un calcul analogue au précédent). On passe alors au cas de h élément de $\mathscr{E}_1$ en remarquant que h est limite simple d'une suite bornée $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{E}_2$ et comme $\mathscr{E}$ est contenu dans $\mathscr{E}_1$, le lemme est démontré.

(5.6.4) **Lemme.** *Soient $X=(X_t)_{t\in[0,1]}$ une martingale de carré intégrable et $Y=(Y_t)_{t\in[0,t]}$ un processus croissant de carré intégrable. On suppose que les processus X et Y sont indépendants et que $Z_t=X_{t^1}\,Y_{t^2}$.*

Soit $h=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i 1_{A_i\times F_i}$ un élément de $\mathscr{E}$.

Alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i 1_{F_i}\Delta_{A_i}Z\right\|_2^2\leqq 3\int_{T\times\Omega} h^2(u,v)\,Y_1\,d\langle X\rangle_u\,dY_v\,dP.$$

Démonstration. Elle est analogue à la précédente. En reprenant les mêmes notations, nous obtenons ici:

- $E(\alpha_i^2\beta_i^2(\Delta_{A_i}Z)^2)\leqq E(\alpha_i^2\beta_i^2\,Y_1(Y_{d_i}-Y_{b_i})(\langle X\rangle_{c_i}-\langle X\rangle_{a_i}))$

  et pour $i\neq j$

- si $a_i\neq a_j$ $\quad E(\alpha_i\alpha_j\Delta_{A_i}X\Delta_{A_j}X)=0$

  ce qui implique $\quad E(\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\Delta_{A_i}Z\Delta_{A_j}Z)=0$

- si $a_i=a_j$ on a nécessairement $b_i\neq b_j$ alors

$$E(\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\Delta_{A_i}Z\Delta_{A_j}Z)=E(\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j(Y_{d_i}-Y_{b_i})\times(Y_{d_j}-Y_{b_j}))(\langle X\rangle_{c_i}-\langle X\rangle_{a_i}))$$

  d'où on en déduit que:

$$E\Big(\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\Delta_{A_i}Z\Delta_{A_j}Z\Big)\leqq 2E\left(\int_T|h(u,v)|\left(\int_0^v|h(u,w)|\,dY_w\right)d\langle X\rangle_u\,dY_v\right).$$

Alors en utilisant l'inégalité:

$$2|h(u,v)|\,|h(u,w)|\leqq h^2(u,v)+h^2(u,w)$$

nous obtenons:

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_i\Delta_{A_i}Z\right\|_2^2\leqq 3\int_{T\times\Omega} h^2(u,v)\,Y_1\,d\langle X\rangle_u\,dY_v\,dP.$$

L'inégalité dans le cas général s'obtient en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du lemme (5.6.3).

(5.6.5) *Démonstration de la propriété 5.6.1.* Nous remarquons d'abord que, pour les différents types de processus Z considérés en (5.6.2), (5.6.3) et (5.6.4), il existe une mesure ν sur $(T\times\Omega, B(T)\otimes\mathscr{F})$ telle que:

$$\|\mu^Z(h)\|_2^2\leqq\nu(h^2)\qquad h\in\mathscr{E}.$$

Cette inégalité implique immédiatement (3.1.2) et (3.1.3); en conséquence, dans chaque cas, Z définit une $L_2(P)$-mesure stochastique et également une $L_0(P)$-mesure stochastique. En particulier, le processus Z de la propriété (5.6.1) définit une $L_0(P)$-mesure stochastique. De plus en utilisant les propriétés des martingales X et Y, nous pouvons écrire pour le processus Z quand $k \geqq 2$:

$$\begin{aligned}
Z_t^k = {} & k^2 \int_{]\!]0,t]\!]} (X_u Y_v)^{k-1} \, dX_u \, dY_v \\
& + \frac{k^2}{2}(k-1) \int_{]\!]0,t]\!]} X_u^{k-1} Y_v^{k-2} \, dX_u \, d\langle Y\rangle_v \\
& + \frac{k^2}{2}(k-1) \int_{]\!]0,t]\!]} X_u^{k-2} Y_v^{k-1} \, d\langle X\rangle_u \, dY_v \\
& + \frac{k^2}{4}(k-1)^2 \int_{]\!]0,t]\!]} X_u^{k-2} Y_v^{k-2} \, d\langle X\rangle_u \, d\langle Y\rangle_v .
\end{aligned}$$

Ces expressions de Z^k $(k \geqq 2)$ impliquent que les processus Z^k $(k \geqq 2)$ définissent des $L_0(P)$-mesures stochastiques.

En conséquence, Z appartient à $\mathscr{S}_c^\infty(L_0(P))$.

En utilisant (4.5.1) et la définition 4.6, nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}
Z_t^{(2)} = {} & 2 \int_{]\!]0,t]\!]} Z_{uv} \, dX_u \, dY_v + 2 \int_{]\!]0,t]\!]} Y_v \, d\langle X\rangle_u \, dY_v \\
& + 2 \int_{]\!]0,t]\!]} X_u \, dX_u \, d\langle Y\rangle_v + \int_{]\!]0,t]\!]} d\langle X\rangle_u \, d\langle Y\rangle_v \\
Z_t^{(3)} = {} & 3 \int_{]\!]0,t]\!]} X_u^2 Y_v \, dX_u \, d\langle Y\rangle_v \\
& + 3 \int_{]\!]0,t]\!]} X_u Y_v^2 \, d\langle X\rangle_u \, dY_v \\
& + 6 \int_{]\!]0,t]\!]} X_u Y_v \, d\langle X\rangle_u \, d\langle Y\rangle_v \\
Z_t^{(4)} = {} & 6 \int_{]\!]0,t]\!]} X_u^2 Y_v^2 \, d\langle X\rangle_u \, d\langle Y\rangle_v \\
Z_t^{(k)} = {} & 0 \quad \text{si } k \geqq 5.
\end{aligned}$$

La propriété (5.6.1) est donc démontrée.

6. Conclusion et commentaires

L'utilisation des puissances de X permet de donner une formule de Itô relativement simple à écrire et ne comportant que des termes de même type.

Pour cette rédaction, nous nous sommes restreints au cas des semi-martingales continues, mais la définition 4.1 et certaines propriétés (4.5, 4.6 et 4.9) peuvent s'étendre aux processus cad lag à condition de remplacer X par X_- et X^* par X_-^* quand ils apparaissent dans l'intégrande.

Bibliographie

1. Allain, M.F.: Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable. Séminaires de Rennes 1979
2. Allain, M.F.: Une méthode de construction de l'intégrale stochastique par rapport à des processus $(X_t)_{t\in T}$. Séminaires de Rennes 1979
3. Allain, M.F.: Approximation par des intégrales de Stieljes-Lebesgue d'intégrales stochastiques relatives au mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}^d_+$. Ann. Inst. H. Poincaré **XIV**, 4, 441-464 (1978)
4. Bichteler, K.: Stochastic integration and L_p theory of semimartingales. Ann. Probability. **9**, 1, 49-89 (1981)
5. Cairoli, R., Walsh, B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. **134**, (1-2), 111-183 (1975)
6. Chevalier, Brossard: Calcul stochastique et ingalités de normes pur les martingales bi-browniennes. Application aux fonctions bi-harmoniques. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30**, 4, 97-120 (1980)
7. Guyon, X., Prum, B.: Variation-produit et formule de Itô pour les semi-martingales représentables à deux paramètres. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete **56**, 3, 361-397 (1981)
8. Jacod, J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Mathematics **714**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
9. Metivier, M., Pellaumail, J.: Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces L_0. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete **40**, 101-114 (1979)
10. Metivier, M., Pellaumail, J.: Stochastic integration. New York: Academic Press 1980
11. Wong, E., Zakai, M.: Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. Stoch. Processes and Applications **6**, 339-349 (1978)

Reçu le 8 Juillet 1982; en forme revisée le 15 Juin 1983