Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 381—388 (1963)

Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von Rényi

Von

Z. Daróczy

Einleitung

Es sei $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ eine (im allgemeinen nicht vollständige) Wahrscheinlichkeitsverteilung, d. h. $p_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und $\sum_{k=1}^{n} p_k = w(P) \leq 1$. A. Rényi hat den Begriff der zu P gehörigen Informationsmenge (Entropie) durch die Formel

$$H_1[P] = \frac{-\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \tag{1}$$

eingeführt, die für $w(P) = 1$ in die Formel von C. E. Shannon [8] übergeht, sowie durch die Formel

$$H_\alpha[P] = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k^\alpha}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \right) \tag{2}$$

aus welcher sich für $w(P) = 1$ die Entropie der Ordnung α ergibt. (Vgl. [6], [7] und [2].) Die Größen (1) und (2) wurden durch A. Rényi in [7] charakterisiert; für den Fall $w(P) = 1$ wurde (1) von A. Ja. Chintschin [3] und von D. K. Faddejew [4] (vgl. auch [9]) charakterisiert, während eine gemeinsame Charakterisierung von (1) und von (2) durch J. Aczél und dem Verfasser in [2] angegeben wurde. In der vorliegenden Arbeit wird ein von A. Rényi [7] aufgeworfenes Problem gelöst, und dadurch eine gemeinsame Charakterisierung von (1) und von (2) gegeben.

Es bezeichne Δ die Menge der im allgemeinen nicht vollständigen endlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Es sei $P \in \Delta$ und $Q \in \Delta$, wobei $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ ist; wir definieren das direkte Produkt $P * Q$ durch die Verteilung $p_i q_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$. Ist $P \in \Delta$ und $Q \in \Delta$, und gilt $w(P) + w(Q) \leq 1$, so können wir die Vereinigung von P und von Q durch

$$P \cup Q = (p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m) \tag{3}$$

definieren. Für $w(P) + w(Q) > 1$ wird $P \cup Q$ nicht definiert. Es sei $H[P]$ ein für alle Verteilungen $P \in \Delta$ definiertes Funktional, das den folgenden Postulaten genügt (vgl. A. Rényi [7]):

Postulat 1. *$H[P]$ ist eine symmetrische Funktion der Elemente von P.*

Postulat 2. *Ist $P = (p)$, so ist $H[(p)]$ eine stetige Funktion von p im Intervall $0 < p \leqq 1$.*

Postulat 3. $H[(\frac{1}{2})] = 1$.

Postulat 4. *Ist $P \in \Delta$ und $Q \in \Delta$, so ist*

$$H[P * Q] = H[P] + H[Q].$$

Postulat 5. *Es existiert eine streng monotone und stetige Funktion $g(x)$ derart, daß für alle $P \in \Delta$ und $Q \in \Delta$, mit $w(P) + w(Q) \leqq 1$*

$$H[P \cup Q] = g^{-1}\left[\frac{w(P)\,g(H[P]) + w(Q)\,g(H[Q])}{w(P) + w(Q)}\right]$$

gilt.

A. RÉNYI hat in [7] den folgenden Satz bewiesen:

Ist $H[P]$ für jedes $P \in \Delta$ definiert und genügt es den Postulaten 1—5, so gilt für $g(x) = ax + b$ die Beziehung $H[P] = H_1[P]$ und für $g(x) = a2^{(1-\alpha)x} + b$ die Beziehung $H[P] = H_\alpha[P]$.

In derselben Arbeit ([7], S. 552) hat A. RÉNYI das folgende Problem aufgeworfen:

Es seien die Postulate 1—5 erfüllt. Ist es richtig, daß dann notwendig $g(x)$ entweder eine lineare oder exponentielle Funktion ist, d. h. daß die explizite Angabe von $g(x)$ in RÉNYI's Satz unterbleiben kann?

In der vorliegenden Arbeit beantworten wir diese Frage im bejahenden Sinne. Dabei bemerken wir, daß zur Erzielung des von A. RÉNYI bewiesenen Ergebnisses das Postulat 1 nicht notwendig ist. Aber auch bei der Beantwortung der aufgeworfenen Frage werden wir dieses Postulat nicht benutzen, so daß dasselbe weggelassen werden kann. In der Tat folgt Postulat 1 aus Postulat 5.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

Hauptsatz. *Ist $H[P]$ für jedes $P \in \Delta$ definiert und genügt es den Postulaten 2, 3, 4 und 5, so gilt $H[P] = H_1[P]$ oder $H[P] = H_\alpha[P]$.*

§ 1. Über die Mittelwerte endlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit den Mittelwerten einer im allgemeinen nicht vollständigen Wahrscheinlichkeitsverteilung beschäftigen. Diese sind Verallgemeinerungen der in [2] (Definition 2) eingeführten Mittelwerten vollständiger Verteilungen.

Definition. Es sei $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta$ und $f(x)$ sei eine im Intervall (0, 1] definierte, streng monotone und stetige Funktion. Unter dem Mittelwert von P bezüglich der Funktion f verstehen wir die Größe

$$M_f(P) = f^{-1}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(p_k)}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right] \tag{4}$$

wo f^{-1} die Inverse der Funktion f ist.

Bekanntlich wird im allgemeinen unter dem Mittel der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezüglich f die Größe

$$\mathfrak{M}_f(x, q) = f^{-1}[\sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k)] \qquad (\sum_{k=1}^{n} q_k = 1) \tag{5}$$

verstanden, wo die q_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ feste oder veränderliche nichtnegative Werte sind (S. [5]). Die Gleichheit $\mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_h$ zweier, für verschiedene Funktionen f und h gebildeter Mittelwerte hat eine Beziehung $h = Af + B$ zur Folge, wo A und B konstante Werte sind ([5], Satz 83). Das Grundproblem der folgenden Untersuchungen bezieht sich darauf, was man im analogen Falle über die durch (4) definierten Mittelwerte sagen kann. Wir werden zeigen, daß zwischen den beiden Funktionen auch in diesem Falle eine lineare Relation besteht.

Wir bemerken, daß es in [2] gelungen ist, einen ähnlichen Satz für $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ unter der Voraussetzung zu beweisen, daß für die in (4) auftretende Funktion f

$$f^*(x) = \begin{cases} x f(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine im Intervall [0,1] *konvexe Funktion* ist (vgl. [2], Satz 1).

Satz 1. *Es sei $f(x)$ eine im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige und streng monotone Funktion, und es sei $H(t)$ im abgeschlossenen Intervall $[f(a), f(b)]$ stetig. Es sei $H[f(a)] = H[f(b)] = 0$ und für beliebige $x, y \in [a, b]$*

$$H\left[\frac{xf(x) + yf(y)}{x + y}\right] = \frac{x H[f(x)] + y H[f(y)]}{x + y}. \tag{6}$$

Dann gilt im Intervall $[f(a), f(b)]$ die Beziehung $H(t) \equiv 0$.

Beweis. Der Kürze halber sei

$$x \circ y = \frac{xf(x) + yf(y)}{x + y} \qquad x, y \in [a, b].$$

Wegen der strengen Monotonität von $f(x)$ fällt dann $x \circ y$ immer zwischen $f(x)$ und $f(y)$, falls nur $x \neq y$ ist. Es sei $N = \{x \mid a \leqq x \leqq b \,\&\, H[f(x)] = 0\}$. Offenbar ist die Menge N nicht leer, da a und b sicherlich zu ihr gehören. Wir werden zeigen, daß $N = [a, b]$ ist, und dies ist gerade die Behauptung des Satzes. Es genügt zu zeigen, daß es kein Intervall $I = [\delta_1, \delta_2] \subset [a, b]$ gibt, für welches aus $x \in I$ immer $H[f(x)] \neq 0$ folgen würde. Dann liegen nämlich die Punkte von N im Intervall $[a, b]$ überall dicht, und ist für ein beliebiges $x \in [a, b]$ $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ mit $x_n \in N$, so ist $H[f(x_n)] = 0$ und wegen der Stetigkeit von H und von f $H[f(x)] = 0$, d. h. $N = [a, b]$.

Nehmen wir jetzt an, daß das soeben beschriebene Intervall $I = [\delta_1, \delta_2]$ existiert. Es sei $E_1 = \{x \mid a \leqq x \leqq \delta_1 \,\&\, H[f(x)] = 0\}$ und $E_2 = \{x \mid \delta_2 \leqq x \leqq b \,\&\, H[f(x)] = 0\}$. Die Mengen E_1 und E_2 sind nicht leer, da ja $a \in E_1$ und $b \in E_2$ ist. Es sei $\sup E_1 = a^*$ und $\inf E_2 = b^*$. Wir zeigen, daß $a^* \in E_1$ und $b^* \in E_2$ ist. Hat nämlich z. B. E_1 kein größtes Element, so gibt es eine Folge $a_n \in E_1$ derart, daß $\lim_{n \to \infty} a_n = a^*$ ist, und in Hinblick auf $H[f(a_n)] = 0$ gilt wegen der Stetigkeit $H[f(a^*)] = 0$, d. h.

$a^* \in E_1$. Ähnlich beweist man $b^* \in E_2$. Offenbar gilt $a^* < \delta_1$ und $b^* > \delta_2$, ferner gilt in jedem Punkt des offenen Intervalls (a^*, b^*) die Beziehung $H[f(x)] \neq 0$. Das ist jedoch offenbar ein Widerspruch, da wegen $H[f(a^*)] = H[f(b^*)] = 0$ und (6) $H(a^* \circ b^*) = 0$ gilt, und wegen $a^* \neq b^*$ $a^* \circ b^* \in (f(a^*), f(b^*))$ folgt; und aus der strengen Monotonität von f folgt die Existenz eines Wertes x_0, so daß $f(x_0) = a^* \circ b^*$ und $a^* < x_0 < b^*$ ist.

Satz 2. *Es seien $f(x)$ und $h(x)$ im Intervall $(0, 1]$ stetige und streng monotone Funktionen. Für beliebiges $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta$ gilt die Gleichung*

$$M_f(P) = M_h(P) \tag{7}$$

dann und nur dann, falls $h(x)$ die Gestalt

$$h(x) = A f(x) + B \tag{8}$$

hat, wo $A \neq 0$ und B konstante Werte sind. (Vgl. [5], Satz 83 sowie [2], Satz 1.)

Beweis. Es sei $G(x) = h[f^{-1}(x)]$. Dann folgt aus (7)

$$G\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i G[f(p_i)]}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{9}$$

Offenbar ist $G(x)$ eine stetige und nichtkonstante Funktion. Wir zeigen, daß $G(x) = Ax + B$ ist ($A \neq 0$ da G nicht konstant ist), und hieraus folgt $h(x) = G[f(x)] = A f(x) + B$, was nichts anderes als die zu beweisende Behauptung ist. Wir führen den ausführlichen Beweis in mehreren Schritten.

1. *Ist G eine Lösung von* (9), *so ist auch*

$$H(x) = G(x) - (Ax + B) \tag{10}$$

für beliebige Konstanten A und B eine Lösung.

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} H\left[\frac{\sum p_i f(p_i)}{\sum p_i}\right] &= G\left[\frac{\sum p_i f(p_i)}{\sum p_i}\right] - \left[A \frac{\sum p_i f(p_i)}{\sum p_i} + B\right] \\ &= \frac{\sum p_i G[f(p_i)]}{\sum p_i} - \left[A \frac{\sum p_i f(p_i)}{\sum p_i} + B \frac{\sum p_i}{\sum p_i}\right] \\ &= \frac{\sum p_i \{G[f(p_i)] - [A f(p_i) + B]\}}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i H[f(p_i)]}{\sum p_i} \end{aligned} \tag{11}$$

und gerade dies wollten wir beweisen.

Offenbar ist auch H eine stetige Funktion. Da in (10) A und B beliebige Konstanten sind, kann der Wert von H in zwei verschiedenen und im übrigen beliebigen Punkten beliebig gewählt werden. Wir wählen A und B so, daß

$$H[f(\tfrac{1}{4})] = H[f(\tfrac{1}{2})] = 0 \tag{12}$$

sein soll. Eine solche Wahl ist immer möglich, da die Determinante des Gleichungssystems

$$\begin{cases} A f(\tfrac{1}{2}) + B = G[f(\tfrac{1}{2})] \\ A f(\tfrac{1}{4}) + B = G[f(\tfrac{1}{4})] \end{cases}$$

wegen der strengen Monotonität von f von Null verschieden ist.

2. $H[f(x)] = 0$ *für beliebiges* $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Es sei $x, y \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, dann gilt offenbar $x + y \leqq 1$, und so folgt aus (11)

$$H\left[\frac{xf(x) + yf(y)}{x + y}\right] = \frac{x H[f(x)] + y H[f(y)]}{x + y}. \tag{13}$$

Wegen (12) sind im Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ die Bedingungen von Satz 1 erfüllt, so daß in diesem Intervall $H[f(x)] \equiv 0$ gilt.

3. $H[f(x)] = 0$ *für beliebiges* $x \in (0, \frac{1}{4})$.

Es sei x_0 ein beliebiger Wert aus dem Intervall $(0, \frac{1}{4})$ und $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ eine feste Zahl. Dann gilt $x_0 + a < 1$ und somit folgt aus (13) wegen $H[f(a)] = 0$ die Gleichung

$$H\left[\frac{x_0 f(x_0) + a f(a)}{x_0 + a}\right] = \frac{x_0 H[f(x_0)]}{x_0 + a}. \tag{14}$$

Offenbar gibt es wegen der Stetigkeit und der strengen Monotonität von $f(x)$ einen eindeutig bestimmten Wert x_1, für welchen

$$f(x_1) = \frac{x_0 f(x_0) + a f(a)}{x_0 + a} \tag{15}$$

und

$$x_0 < x_1 < a \tag{16}$$

ist.

Wir definieren die Folge $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ auf rekursive Weise durch die Formel

$$f(x_n) = \frac{x_{n-1} f(x_{n-1}) + a f(a)}{x_{n-1} + a}. \tag{17}$$

Wie man leicht einsieht, gilt dann $x_{n-1} < x_n < a$ für jedes n d. h. die Folge $\{x_n\}$ ist monoton wachsend und beschränkt, so daß der Grenzwert x^* existiert. Indem wir in der Gleichung (17) den Grenzübergang $n \to \infty$ vornehmen, erhalten wir wegen der Stetigkeit von $f(x)$

$$f(x^*) = \frac{x^* f(x^*) + a f(a)}{x^* + a},$$

woraus

$$f(x^*) = f(a)$$

und wegen der strengen Monotonität von f $x^* = a$ folgt. Andererseits gilt wegen (17) und (13)

$$H[f(x_n)] = H\left[\frac{x_{n-1} f(x_{n-1}) + a f(a)}{x_{n-1} + a}\right] = \frac{x_{n-1} H[f(x_{n-1})]}{x_{n-1} + a} \tag{18}$$

und auf Grund von $x^* = a$ haben wir für genügend großes n $\frac{1}{4} < x_n < a$, d. h. $H[f(x_n)] = 0$, und so folgt aus (18) $H[f(x_{n-1})] = 0$, und so endlich $H[f(x_0)] = 0$, was zu beweisen war.

4. $H[f(x)] = 0$ *für beliebiges* $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Der Beweis verläuft ähnlich wie derjenige von 3. Es sei jetzt x_0 ein beliebiger Wert aus dem offenen Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$, ferner sei $a > 0$ eine feste Zahl, für welche $x_0 + a < 1$ gilt. Dann ist $a < \frac{1}{2}$. Aus (13) folgt wegen $H[f(a)] = 0$ wiederum die Gleichung (14), und es existiert ein durch die Gleichung (15) eindeutig definierter Wert x_1, derart, daß

$$a < x_1 < x_0$$

ist. Wiederum definieren wir die Folge $\{x_n\}$ auf rekursive Weise durch die Gleichung (17). Dann gilt $a < x_n < x_{n-1}$ für jedes n, d. h. $\{x_n\}$ ist monoton abnehmend und nach unten beschränkt, so daß der Grenzwert x^* existiert. Wegen (17) ist wiederum $x^* = a$ und auch hier gilt die Gleichung (18), so daß für n genügend groß $a < x_n < \frac{1}{2}$ und folglich $H[f(x_n)] = 0$ ist. Somit folgt aus (18) $H[f(x_0)] = 0$, und damit haben wir unsere Behauptung für beliebige Werte $\frac{1}{2} < x < 1$ bewiesen. Gleichzeitig gilt wegen der Stetigkeit $H[f(1)] = 0$ und damit haben wir unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Unter 2., 3. und 4. haben wir bewiesen, daß für festgewählte Werte von A und von B $H(x) \equiv 0$ ist, und so folgt aus (10) $G(x) = Ax + B$, womit wir unseren Satz restlos bewiesen haben.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes

Der erste Teil des Beweises verläuft genau so wie bei dem von A. RÉNYI bewiesenen Satz (vgl. [7], Satz 1). Der Vollständigkeit halber gehen wir auch darauf ein. Es sei

$$\varphi(p) = H[(p)] \qquad 0 < p \leqq 1 \tag{19}$$

wo (p) eine aus einer einzigen Wahrscheinlichkeit bestehende Verteilung ist. Auf Grund von Postulat 4 gilt die Funktionalgleichung

$$\varphi(pq) = \varphi(p) + \varphi(q) \qquad 0 < p \leqq 1,\ 0 < q \leqq 1. \tag{20}$$

Nach Postulat 2 ist $\varphi(p)$ eine stetige Funktion, und hat folglich die Gestalt

$$\varphi(p) = c \log_2 p,$$

(vgl. [*1*] Nr. 2.1.2., 2.1.4) und wegen Postulat 3 ist $c \log_2 \frac{1}{2} = 1$, d. h. $c = -1$, und so

$$H[(p)] = \varphi(p) = -\log_2 p. \tag{21}$$

Es sei $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ein beliebiges Element von Δ, dann kann P in der Gestalt

$$P = (p_1) \cup (p_2) \cup \ldots \cup (p_n)$$

geschrieben werden. Auf Grund von Postulat 5 und wegen (21) gilt nun

$$\begin{aligned} H[P] &= H[(p_1) \cup (p_2) \cup \ldots \cup (p_n)] \\ &= g^{-1}\left\{\frac{w[(p_1)]\, g(H[(p_1)]) + \cdots + w[(p_n)]\, g(H[(p_n)])}{w[(p_1)] + \cdots + w[(p_n)]}\right\} \\ &= g^{-1}\left[\frac{p_1 g(-\log_2 p_1) + \cdots + p_n g(-\log_2 p_n)}{p_n + \cdots + p_n}\right] \end{aligned} \tag{22}$$

wobei g eine streng monotone und stetige Funktion ist. Es sei

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta \quad \text{und} \quad Q = (q_1, q_2, \ldots, q_m) \in \Delta\,.$$

Dann gilt auf Grund von Postulat 4 und wegen (22) für g die Funktionalgleichung

$$g^{-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j g(-\log_2 p_i q_j)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j}\right] = g^{-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i g(-\log_2 p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right] + g^{-1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{m} q_j g(-\log_2 q_j)}{\sum_{j=1}^{m} q_j}\right] \tag{23}$$

mit beliebigen Verteilungen P und Q. Es sei $f(t) = g(-\log_2 t)$, dann gewinnen wir für $f(t)$ aus (23) die Funktionalgleichung

$$f^{-1}\left[\frac{\sum_i\sum_j p_i q_j f(p_i q_j)}{\sum_i\sum_j p_i q_j}\right] = f^{-1}\left[\frac{\sum_i p_i f(p_i)}{\sum_i p_i}\right] \cdot f^{-1}\left[\frac{\sum_j q_j f(q_j)}{\sum_j q_j}\right]. \tag{24}$$

Es sei $Q = (q)$ $(0 < q \leqq 1)$, dann folgt aus (24) die Gleichung

$$\frac{1}{q} f^{-1}\left[\frac{\sum p_i f(p_i q)}{\sum p_i}\right] = f^{-1}\left[\frac{\sum p_i f(p_i)}{\sum p_i}\right]. \tag{25}$$

Wenn wir $h_q(t) = f(qt)$ setzen, erhalten wir aus (25) die Gleichung

$$M_f(P) = M_{h_q}(P). \tag{26}$$

Offenbar sind f und h_q streng monotone und stetige Funktionen so daß aus Satz 2

$$h_q(t) = A_q f(t) + B_q \tag{27}$$

folgt, wobei jetzt die Größen A_q und B_q Funktionen von q sind. In einer ausführlicheren Schreibweise wird aus (27)

$$f(qt) = A(q) f(t) + B(q) \qquad q, t \in (0, 1]. \tag{28}$$

Bekanntlich (vgl. [*5*], Satz 84, und auch [*1*], [*2*] und [*7*]) hat eine stetige Lösung $f(t)$ der Funktionalgleichung (28) die Gestalt

$$f(t) = a \log_2 t + b \tag{29}$$

oder die Gestalt

$$f(t) = a t^{\alpha-1} + b. \tag{30}$$

Hier ist $a \neq 0$, da f nicht konstant ist und b sowie $\alpha \neq 1$ sind beliebige konstante Werte. Indem wir von $f(t) = g(-\log_2 t)$ Gebrauch machen, erhalten wir aus (29) und (30)

$$g(x) = -ax + b \tag{31}$$

oder

$$g(x) = a\, 2^{(1-\alpha)x} + b, \tag{32}$$

und so folgt aus (22) $H[P] = H_1[P]$ oder $H_\alpha[P]$. Damit haben wir den Hauptsatz vollständig bewiesen.

Literatur

[1] Aczél, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel, Stuttgart und Berlin 1961.

[2] — und Z. Daróczy: Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie. Acta. math. Acad. Sci. Hungar. **14**, 95—121 (1963).

[3] Chintschin, A. Ja.: Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Arbeiten zur Informationstheorie, I. Berlin 1957, 7—25.

[4] Faddejew, D. K.: Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsschemas. Arbeiten zur Informationstheorie, I. Berlin 1957, 86—90.

[5] Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities. Cambridge 1952.

[6] Rényi, A.: Einige Grundfragen der Informationstheorie. (Ungarisch) Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **10**, 251—282 (1960).

[7] — On measures of entropy and information. Proc. Fourth Berkeley Sympos. Statist. and Probability, 1960, 547—561.

[8] Shannon, C. E.: A mathematical theory of communication. Bell System techn. J. **27**, 379—423 and 623—653 (1948).

[9] Tverberg, H.: A new derivation of the information function. Math. Scand. **6**, 297—298 (1958).

Mathematisches Institut
der Universität „Kossuth Lajos“
Debrecen 10/Ungarn

(Eingegangen am 7. August 1962)